ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД СТОХАСТИЧНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ЗІ СТАЦІОНАРНИМИ ПРИРОСТАМИ

УДК 519.21

М. М. ЛУЗ І М. П. МОКЛЯЧУК

Анотація. Досліджується задача оптимального оцінювання лінійного функціонала

$$A_N\xi = \sum_{k=0}^{N} a(k)\xi(k)$$

від невідомих значень стохастичної послідовності $\{\xi(m), m \in \mathbb{Z}\}$ зі стаціонарними n-ми приростами за спостереженнями послідовності у моменти часу $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \dots, N\}$. Знайдені формули для обчислення величини середньоквадратичної похибки та спектральної характеристики оптимальної оцінки функціонала за умови, що спектральна щільність послідовності точно відома. У тому випадку, коли вигляд спектральної щільності невідомий, проте задана множина допустимих спектральних щільностей, застосовується мінімаксний метод оцінювання лінійного функціонала. Для заданих множин допустимих спектральних щільностей визначені множини найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксні спектральні характеристики оптимальної оцінки функціонала.

Abstract. The problem of optimal estimation of linear functional $A_N\xi = \sum_{k=0}^{N} a(k)\xi(k)$ depending on the unknown values of stochastic sequence $\{\xi(m), m \in \mathbb{Z}\}$ with stationary n-th increments from observations of the sequence at points $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0, 1, \dots, N\}$ is considered. Formulas for calculating mean square error and spectral characteristic of optimal linear estimation of the functional are derived in the case where spectral density is known exactly. In the case where spectral density is not known exactly, but a set of admissible spectral densities are given the minimax-robust approach to the problem of optimal estimation of linear functional ia applied. Formulas that determine the least favorable spectral densities and the minimax spectral characteristics are proposed for the given sets of admissible spectral densities.

Аннотация. Исследуется задача оптимального оценивания линейного функционала

$$A_N\xi = \sum_{k=0}^{N} a(k)\xi(k)$$

от неизвестных значений стохастической последовательности $\{\xi(m), m \in \mathbb{Z}\}$ со стационарными n-ми приращениями по наблюдениях последовательности в моменты времени $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \dots, N\}$. Найдены формулы для вычисления среднеквадратической ошибки и спектральной характеристики оптимальной оценки функционала при условии что спектральная плотность последовательности точно известна. В том случае когда спектральная плотность последовательности точно не известна но определено множество допустимых спектральных плотностей используется минимаксный метод оценивания. Для заданных множеств допустимых спектральных плотностей определены множества наименее благоприятных спектральных плотностей и минимаксные спектральные характеристики оптимальной линейной оценки функционала.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G10, 60G25, 60G35; Secondary 62M20, 93E10, 93E11.

Ключові слова і фрази. Послідовність зі стаціонарними приростами, робастна оцінка, середньоквадратична похибка, найменш сприятлива спектральна щільність, мінімаксна спектральна характеристика.

1. Вступ

Випадкові процеси зі стаціонарними n-ми приростами досліджувались А. М. Ягломом у статті [18]. В роботі було отримано спектральне зображення стохастичних приростів, розв'язана задача прогнозування значень стохастичного приросту за відомими спостереженнями. Задача прогнозування процесів зі стаціонарними приростами зводиться до задачі прогнозування значення стаціонарного приросту. Випадкові процеси зі стаціонарними n-ми приростами вивчались також у роботах М.С. Пінскера [12], А. М. Яглома та М. С. Пінскера [11].

Класичні методи розв'язування задач екстраполяції, інтерполяції та фільтрації стаціонарних процесів із відомими спектральними щільностями запропоновані А. М. Колмогоровим [5], Н. Вінером [15], А. М. Ягломом [16, 17]. У тому випадку, коли вигляд спектральної щільності невідомий, проте задана множина допустимих спектральних щільностей, застосовється мінімаксний метод розв'язування задач оцінювання, який полягає у визначенні оцінки, що мінімізує величину похибки одночасно для всіх щільностей із заданого класу. Вперше мінімаксний підхід до задачі екстраполяції стаціонарних процесів запропонував У. Гренандер [1]. У роботах Ю. Франке [2], Ю. Франке та Х. Пура [3] досліджуються задачі мінімаксної екстраполяції та інтерполяції стаціонарних послідовностей за допомогою методів опуклої оптимізації. У роботах М. П. Моклячука [7] -[10] досліджуються задачі екстраполяції, інтерполяції та фільтрації для стаціонарних процесів і послідовностей.

У даній роботі досліджується задача оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_N\xi = \sum_{k=0}^{N} a(k)\xi(k)$ від невідомих значень стохастичної послідовності $\{\xi(m), m \in \mathbb{Z}\}$ зі стаціонарними n-ми приростами за спостереженнями цієї послідовності у моменти часу $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \dots, N\}$. Розв'язано задачу інтерполяції послідовностей зі стаціонарними n-ми приростами за умови, що відома спектральна щільність послідовності $\{\xi(m), m \in \mathbb{Z}\}$. У випадку, коли спектральна щільність невідома, але задані множини допустимих спектральних щільностей, знайдені множини найменш сприятливих спектральних щільностей та формули для обчислення мінімаксноих спектральних характеристик оптимальної лінійної оцінки функціонала.

2. Стаціонарні прирости. Спектральний розклад

Означення 2.1. Стохастичним n-м приростом з кроком $\mu \in \mathbb{Z}$ стохастичної послідовності $\{\xi(m), m \in \mathbb{Z}\}$ називається функція

$$\xi^{(n)}(m, \mu) = (1 - B_\mu)^n \xi(m) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l C_n^l \xi(m - l\mu), \tag{1}$$

де B_μ оператор зсуву на μ кроків, такий що $B_\mu\xi(m) = \xi(m - \mu)$, $\mu \in \mathbb{Z}$.

Для стохастичного n-го приросту справджуються співвідношення

$$\xi^{(n)}(m, -\mu) = (-1)^n \xi^{(n)}(m + n\mu, \mu), \tag{2}$$

$$\xi^{(n)}(m, k\mu) = \sum\nolimits_{l=0}^{(k-1)n} A_l \xi^{(n)}(m - l\mu, \mu), \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

де $\{A_l, l = 0, 1, 2, \dots, (k-1)n\}$ — коефіцієнти при відповідних степенях x^l розкладу многочлена $(1 + x + \dots + x^{k-1})^n$ за степенями x.

Означення 2.2. Стохастичний n-й приріст $\xi^{(n)}(m, \mu)$ стохастичної послідовності $\{\xi(m), m \in \mathbb{Z}\}$ називається стаціонарним (в широкому сенсі), якщо математичні сподівання

$$\mathsf{E}\,\xi^{(n)}(m_0, \mu) = c^{(n)}(\mu),$$

$$\mathsf{E}\,\xi^{(n)}(m_0 + m, \mu_1)\xi^{(n)}(m_0, \mu_2) = D^{(n)}(m, \mu_1, \mu_2)$$

існують при довільних цілих m_0, μ, m, μ_1, μ_2 і не залежать від m_0. Функція $c^{(n)}(\mu)$ називається середнім значенням стаціонарного n-го приросту, а функція

$$D^{(n)}(m, \mu_1, \mu_2)$$

називається структурною функцією стаціонарного n-го приросту (або структурною функцією n-го порядку стохастичної послідовності $\{\xi(m), m \in \mathbb{Z}\}$).

Стохастична послідовність $\{\xi(m), m \in \mathbb{Z}\}$ яка визначає стаціонарний n-й приріст $\xi^{(n)}(m, \mu)$ за формулою (1), називається послідовністю зі стаціонарними n-ми приростами.

Теорема 2.1. *Середнє значення $c^{(n)}(\mu)$ та структурну функцію $D^{(n)}(m, \mu_1, \mu_2)$ стаціонарного стохастичного n-го приросту $\xi^{(n)}(m, \mu)$ можна подати у вигляді*

$$c^{(n)}(\mu) = c\mu^n, \tag{4}$$

$$D^{(n)}(m, \mu_1, \mu_2) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda m}(1 - e^{-i\mu_1 \lambda})^n (1 - e^{i\mu_2 \lambda})^n \frac{1}{\lambda^{2n}}\, dF(\lambda), \tag{5}$$

де c — константа, функція $F(\lambda)$ неперервна зліва неспадна обмежена, $F(-\pi) = 0$, причому константа c та функція $F(\lambda)$ однозначно визначаються приростом $\xi^{(n)}(m, \mu)$.

З іншого боку, функція $c^{(n)}(\mu)$ вигляду (4) з деякою константою c та функція $D^{(n)}(m, \mu_1, \mu_2)$ вигляду (5), де $F(\lambda)$ задовольняє вказаним вище умовам, є середнім значенням та структурною функцією деякого стаціонарного n-го приросту $\xi^{(n)}(m, \mu)$.

Використовуючи зображення (5) структурної функції стаціонарного n-го приросту $\xi^{(n)}(m, \mu)$ та теорему Карунена [4], отримуємо зображення стаціонарного n-го приросту $\xi^{(n)}(m, \mu)$ у такому вигляді

$$\xi^{(n)}(m, \mu) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\lambda}(1 - e^{-i\mu\lambda})^n \frac{1}{(i\lambda)^n}\, dZ(\lambda), \tag{6}$$

де $Z(\lambda)$ — ортогональна стохастична міра на $[-\pi, \pi)$, що підпорядкована структурній мірі, яка породжена функцією $F(\lambda)$:

$$\mathsf{E}\, Z(A_1)\overline{Z(A_2)} = F(A_1 \cap A_2) < \infty. \tag{7}$$

Скористаємося спектральним розкладом (6) для знаходження оптимальної лінійної оцінки невідомих значень стохастичної послідовності.

3. Задача інтерполяції

Нехай стохастична послідовність $\{\xi(m), m \in \mathbb{Z}\}$ визначає стаціонарний n-й приріст $\xi^{(n)}(m, \mu)$ з абсолютно неперервною спектральною функцією $F(\lambda)$, яка має спектральну щільність $f(\lambda)$:

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\lambda} f(\lambda)\, d\lambda.$$

Припустимо, що ми знаємо результати спостереження послідовності $\xi(m)$ в точках $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2, \ldots, N\}$. Розглянемо задачу оптимального в середньоквадратичному сенсі лінійного оцінювання функціонала $A_N\xi = \sum_{k=0}^{N} a(k)\xi(k)$ від невідомих значень послідовності $\xi(m)$.

Із співвідношення (1) за допомогою формальних перетворень можна отримати наступне співвідношення

$$\xi(k) = \frac{1}{(1 - B_\mu)^n} \xi^{(n)}(k, \mu) = \sum_{j=-\infty}^{k} d_\mu(k - j)\xi^{(n)}(j, \mu), \tag{8}$$

де $\{d_\mu(k)\colon k\geq 0\}$ — коефіцієнти при x^k в розкладі $\sum_{k=0}^{\infty} d_\mu(k)x^k = \left(\sum_{j=0}^{\infty} x^{\mu j}\right)^n$.

З (8) та (1) випливають наступі співвідношення

$$\sum_{k=0}^{N} a(k)\xi(k) = -\sum_{i=-\mu n}^{-1} v(i)\xi(i) + \sum_{i=0}^{N}\left(\sum_{k=i}^{N} a(k)d_\mu(k-i)\right)\xi^{(n)}(i,\mu),$$

$$\sum_{k=0}^{N} b_\mu(k)\xi^{(n)}(k,\mu) = \sum_{i=-\mu n}^{-1}\xi(i)\sum_{l=[-\frac{i}{\mu}]'}^{n}(-1)^l C_n^l b_\mu(l\mu+i) + \sum_{i=0}^{N}\xi(i)\sum_{l=0}^{n}(-1)^l C_n^l b_\mu(l\mu+i),$$

де $[x]'$ — найменше ціле число серед чисел, що більші або рівні x. З двох останніх співвідношень можна отримати наступне представлення функціонала $A_N\xi$ у вигляді різниці функціоналів $A_N\xi = B_N\xi - V_N\xi$, де

$$B_N\xi = \sum_{k=0}^{N} b_\mu(k)\xi^{(n)}(k,\mu), \qquad V_N\xi = \sum_{k=-\mu n}^{-1} v(k)\xi(k),$$

$$v(k) = \sum_{l=[-\frac{k}{\mu}]'}^{n}(-1)^l C_n^l b_\mu(l\mu+k), \qquad k=-1,-2,\dots,-\mu n, \tag{9}$$

$$b_\mu(k) = \sum_{m=k}^{N} a(m)d_\mu(m-k) = \left(D_N^\mu a^{(1)}\right)_k, \qquad k=0,1,\dots,N, \tag{10}$$

де D_N^μ — матриця розмірності $(N+1)\times(N+1)$ з елементами $D_{k,j}^\mu = d_\mu(j-k)$, якщо $0\leq k\leq j\leq N$, та $D_{k,j}^\mu = 0$, якщо $j<k$ або $j,k>N$; вектор $a^{(1)} = (a(0),a(1),a(2),\dots,a(N))$.

Позначимо через $\widehat{A}_N\xi$ оптимальну в середньоквадратичному сенсі лінійну оцінку значення функціонала $A_N\xi$ за спостереженнями випадкової послідовності $\xi(m)$ у точках множини $\mathbb{Z}\setminus\{0,1,2,\dots,N\}$, а через $\widehat{B}_N\xi$ оптимальну в середньоквадратичному сенсі лінійну оцінку значення функціонала $B_N\xi$ за спостереженнями стохастичного n-го приросту $\xi^{(n)}(k,\mu)$ у точках множини $\mathbb{Z}\setminus\{0,1,2,\dots,N+\mu n\}$. Позначимо через $\Delta(f,\widehat{A}_N) = \mathsf{E}\,|A_N\xi - \widehat{A}_N\xi|^2$ середньоквадратичну похибку оцінки $\widehat{A}_N\xi$, а через $\Delta(f,\widehat{B}_N)$ — середньоквадратичну похибку оцінки $\widehat{B}_N\xi$. Оскільки нам відомі значення послідовності $\xi(m)$ в точка $-1,-2,\dots,-\mu n$, то ми можемо записати наступну рівність

$$\widehat{A}_N\xi = \widehat{B}_N\xi - V_N\xi. \tag{11}$$

Тому справедливі наступі співвідношення:

$$\Delta(f,\widehat{A}_N) = \mathsf{E}\,|A_N\xi - \widehat{A}_N\xi|^2 = \mathsf{E}\,|A_N\xi + V_N\xi - \widehat{B}_N\xi|^2 = \mathsf{E}\,|B_N\xi - \widehat{B}_N\xi|^2 = \Delta(f,\widehat{B}_N).$$

Щоб знайти оптимальну у середньоквадратичному сенсі лінійну оцінку функціонала $B_N\xi$ скористаємося методом ортогональних проекцій у гільбертовому просторі який запропонував А.М.Колмогоров [5].

Позначимо через $H^{0-}(\xi_\mu^{(n)})$ замкнутий лінійний підпростір, що породжений величинами $\{\xi^{(n)}(k,\mu)\colon k\leq -1\}$ у просторі $H = L_2(\Omega,\mathcal{F},P)$ випадкових величин другого порядку, а через $H^{N+}(\xi_{-\mu}^{(n)})$ позначимо замкнутий лінійний підпростір у просторі H, який породжений величинами $\{\xi^{(n)}(k,-\mu)\colon k\geq N+1\}$. Оскільки $e^{i\lambda k}(1-e^{i\lambda\mu})^n = (-1)^n e^{i\lambda(k+\mu n)}(1-e^{-i\lambda\mu})^n$, то $\xi^{(n)}(k,-\mu) = (-1)^n\xi^{(n)}(k+\mu n,\mu)$. Тому $H^{N+}(\xi_{-\mu}^{(n)}) = H^{(N+\mu n)+}(\xi_\mu^{(n)})$. Визначимо також підпростори $L_2^{0-}(f)$ та $L_2^{N+}(f)$ у просторі $L_2(f)$, які породжені відповідно функціями

$$\left\{e^{i\lambda k}(1-e^{-i\lambda\mu})^n\frac{1}{(i\lambda)^n}\colon k\leq -1\right\}$$

та

$$\left\{e^{i\lambda k}(1-e^{-i\lambda\mu})^n\frac{1}{(i\lambda)^n}: k\geq N+1\right\}.$$

Із формули (6) випливає, що між елементами $\xi^{(n)}(k,\mu)$ простору H та елементами $e^{i\lambda k}(1-e^{-i\lambda\mu})^n/(i\lambda)^n$ простору $L_2(f)$ маємо взаємно однозначну відповідність.

Лінійну оцінку $\widehat{B}_N\xi$ значення $B_N\xi$ будемо шукати у вигляді

$$\widehat{B}_N\xi=\int_{-\pi}^{\pi}h_\mu(\lambda)\,dZ(\lambda), \tag{12}$$

де $h_\mu(\lambda)$ — спектральна характеристика оцінки.

Оптимальна оцінка $\widehat{B}_N\xi$ — це проекція елемента $B_N\xi$ простору H на підпростір $H^{0-}(\xi^{(n)}_\mu)\oplus H^{N+}(\xi^{(n)}_{-\mu})=H^{0-}(\xi^{(n)}_\mu)\oplus H^{(N+\mu n)+}(\xi^{(n)}_\mu)$. Спектральна характеристика $h_\mu(\lambda)$ оптимальної оцінки визначається умовами:

1) $h_\mu(\lambda)\in L_2^{0-}(f)\oplus L_2^{(N+\mu n)+}(f)$;

2) $(B_N^\mu(e^{i\lambda})(1-e^{-i\lambda\mu})^n\frac{1}{(i\lambda)^n}-h_\mu(\lambda))\perp L_2^{0-}(f)\oplus L_2^{(N+\mu n)+}(f)$, де

$$B_N^\mu(e^{i\lambda})=\sum_{k=0}^{N}b_\mu(k)e^{i\lambda k}.$$

З умови 2) випливає, що для всіх $k\leq -1$, та для всіх $k\geq N+\mu n+1$ функція $h_\mu(\lambda)$ задовольняє співвідношення

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(B_N^\mu(e^{i\lambda})\left(1-e^{-i\lambda\mu}\right)^n\frac{1}{(i\lambda)^n}-h_\mu(\lambda)\right)e^{-i\lambda k}(1-e^{i\lambda\mu})^n\frac{1}{(-i\lambda)^n}f(\lambda)\,d\lambda=0.$$

Звідси випливає, що спектральна характеристика $h_\mu(\lambda)$ оцінки має вигляд

$$h_\mu(\lambda)=B_N^\mu(e^{i\lambda})(1-e^{-i\lambda\mu})^n\frac{1}{(i\lambda)^n}-\frac{(-i\lambda)^nC_N^\mu(e^{i\lambda})}{(1-e^{i\lambda\mu})^nf(\lambda)},$$

$$C_N^\mu(e^{i\lambda})=\sum_{k=0}^{N+\mu n}c_\mu(k)e^{i\lambda k},$$

де $c_\mu(k)$ — невідомі коефіцієнти. Знайдемо рівняння, що визначають ці коефіцієнти.

З умови 1) випливає, що функція $h_\mu(\lambda)$ має вигляд

$$h_\mu(\lambda)=h(\lambda)\left(1-e^{-i\lambda\mu}\right)^n\frac{1}{(i\lambda)^n},\qquad h(\lambda)=\sum_{k=-\infty}^{-1}s(k)e^{i\lambda k}+\sum_{k=N+\mu n+1}^{\infty}s(k)e^{i\lambda k},$$

та задовольняє співвідношення

$$\int_{-\pi}^{\pi}|h(\lambda)|^2|1-e^{i\lambda\mu}|^2\frac{f(\lambda)}{\lambda^{2n}}\,d\lambda<\infty,$$

$$\frac{(i\lambda)^nh_\mu(\lambda)}{(1-e^{-i\lambda\mu})^n}\in L_2^{0-}\oplus L_2^{(N+\mu n)+},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(B_N^\mu(e^{i\lambda})-\frac{\lambda^{2n}C_N^\mu(e^{i\lambda})}{(1-e^{-i\lambda\mu})^n(1-e^{i\lambda\mu})^nf(\lambda)}\right)e^{-i\lambda l}d\lambda=0, \quad l=0,1,\ldots,N+\mu n. \tag{13}$$

Нехай виконуються умови

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{f(\lambda)}\,d\lambda<\infty,\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\lambda^{2n}}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}f(\lambda)}d\lambda<\infty. \tag{14}$$

Тоді можна визначити коефіцієнти Фур'є функції $\frac{\lambda^{2n}}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}f(\lambda)}$:

$$f_\mu(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\lambda^{2n} e^{-i\lambda k}}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n} f(\lambda)}\, d\lambda, \qquad |k| = 0, 1, \dots, N+\mu n.$$

Спектральна щільність $f(\lambda)$ задовольняє умову $f(\lambda) = f(-\lambda)$, тому коефіцієнти Фур'є $f_\mu(k)$ мають наступну властивість: $f_\mu(k) = f_\mu(-k)$, $k = 0, 1, \dots, N+\mu n$. Покладемо $b_\mu(l) = 0$, $l = N+1, N+2, \dots, N+\mu n$. Тоді з рівняння (13) отримуємо таку систему рівнянь

$$b_\mu(l) = \sum_{k=0}^{N+\mu n} f_\mu(l-k) c_\mu(k), \qquad l = 0, 1, \dots, N+\mu n. \tag{15}$$

Останню систему рівнянь можна записати у вигляді

$$b_\mu = \mathbf{F} c_\mu, \tag{16}$$

де b_μ — вектор розмірності $(N+\mu n+1)$, утворений елементами $b_\mu(l)$, $l = 0, \dots, N+\mu n$; c_μ — вектор розмірності $(N+\mu n+1)$, утворений елементами $c_\mu(l)$, $l = \overline{0, N+\mu n}$; $\mathbf{F}$ — матриця розмірності $(N+\mu n+1)\times(N+\mu n+1)$ з елементами $F_{l,k} = f_\mu(l-k)$, $l, k = 0, \dots, N+\mu n$.

Покажемо, що матриця $\mathbf{F}$ має обернену. Якщо в співвідношенні (16) замість вектора b_μ розглянути вектор $\widetilde{b}_\mu = (\widetilde{b}_\mu(0), \widetilde{b}_\mu(1), \dots, \widetilde{b}_\mu(N+\mu n))$, то ми отримаємо задачу побудови проекції $\widehat{B}_{N+\mu n}$ елемента $B_{N+\mu n} = \sum_{k=0}^{N+\mu n} \widetilde{b}_\mu(k) \xi^{(n)}(k,\mu)$ простору H на підпростір $H^{0-}(\xi_\mu^{(n)}) \oplus H^{(N+\mu n)+}(\xi_\mu^{(n)})$. Оскільки підпростір $H^{0-}(\xi_\mu^{(n)}) \oplus H^{(N+\mu n)+}(\xi_\mu^{(n)})$ замкнутий і опуклий, то шукана проекція однозначно визначається для довільного набору чисел $\widetilde{b}_\mu(0), \widetilde{b}_\mu(1), \dots, \widetilde{b}_\mu(N+\mu n)$, які одночасно не рівні нулю. Тобто, для довільного вектора $\widetilde{b}_\mu \neq 0$ система (16) має єдиний розв'язок, звідки випливає, що матриця $\mathbf{F}$ невироджена і має обернену $\mathbf{F}^{-1}$.

З рівняння (16) знаходимо, що невідомі коефіцієнти $c_\mu(k)$, $k = 0, \dots, N+\mu n$ мають вигляд

$$c_\mu(k) = (\mathbf{F}^{-1} b_\mu)_k,$$

де $(\mathbf{F}^{-1} b_\mu)_k$ — k-й елемент вектора $\mathbf{F}^{-1} b_\mu$. Таким чином, спектральна характеристика $h_\mu(\lambda)$ оптимальної оцінки $\widehat{B}_N\xi$ значення $B_N\xi$ має вигляд

$$h_\mu(\lambda) = B_N^\mu(e^{i\lambda})(1-e^{-i\lambda\mu})^n \frac{1}{(i\lambda)^n} - \frac{(-i\lambda)^n \sum_{k=0}^{N+\mu n} (\mathbf{F}^{-1} b_\mu)_k e^{i\lambda k}}{(1-e^{i\lambda\mu})^n f(\lambda)}. \tag{17}$$

Середньоквадратична похибка оцінки обчислюється за формулою

$$\Delta(f, \widehat{B}_N) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\lambda^{2n} \left|\sum_{k=0}^{N+\mu n} (\mathbf{F}^{-1} b_\mu)_k e^{i\lambda k}\right|^2}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n} f(\lambda)}\, d\lambda = \langle \mathbf{F}^{-1} b_\mu, b_\mu \rangle. \tag{18}$$

Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема 3.1. *Нехай стохастична послідовність $\{\xi(m), m \in \mathbb{Z}\}$ визначає стаціонарний n-й приріст $\xi^{(n)}(m,\mu)$ з абсолютно неперервною спектральною функцією $F(\lambda)$ яка має спектральну щільність $f(\lambda)$, що задовольняє умови* (14)*. Тоді оптимальна лінійна оцінка $\widehat{B}_N\xi$ значення функціонала $B_N\xi$ від невідомих елементів $\xi^{(n)}(m,\mu)$, $m \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$, $\mu > 0$, за відомими спостереженнями послідовності $\xi(m)$ в точках множини $\mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2, \dots, N\}$ визначається за формулою* (12)*. Спектральна характеристика $h_\mu(\lambda)$ оптимальної оцінки $\widehat{B}_N\xi$ обчислюється за формулою* (17)*. Величина середньоквадратичної похибки $\Delta(f, \widehat{B}_N)$ обчислюється за формулою* (18)*.*

З теореми (3.1) як наслідок можна отримати оцінку невідомого значення приросту $\xi^{(n)}(m,\mu)$, $m \in \{0,1,\dots,N\}$, за спостереженнями послідовності $\xi(m)$ в точках множини $\mathbb{Z} \setminus \{0,1,2,\dots,N\}$. Підставимо у формулу (17) вектор b_μ, у якого на m-му місці стоїть 1, а всі інші елементи рівні нулю. Тоді спектральна характеристика оцінки

$$\widehat{\xi}^{(n)}(m,\mu) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_m(\lambda,\mu)\, dZ(\lambda) \tag{19}$$

набуде вигляду

$$\varphi_m(\lambda,\mu) = e^{i\lambda m}(1-e^{-i\lambda\mu})^n \frac{1}{(i\lambda)^n} - \frac{(-i\lambda)^n \sum_{k=0}^{N+\mu n} (\mathbf{F}^{-1}e_m)_k e^{i\lambda k}}{(1-e^{i\lambda\mu})^n f(\lambda)}. \tag{20}$$

Середньоквадратична похибка оцінки обчислюється за формулою

$$\begin{aligned}\Delta(f,\xi^{(n)}(m,\mu)) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\lambda^{2n}\left|\sum_{k=0}^{N+\mu n}(\mathbf{F}^{-1}e_m)_k e^{i\lambda k}\right|^2}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n} f(\lambda)}\, d\lambda \\ &= \langle \mathbf{F}^{-1}e_m, e_m\rangle = (\mathbf{F}^{-1})_{m,m}.\end{aligned} \tag{21}$$

Таким чином, має місце наступний наслідок.

Наслідок 3.1. *Оптимальна лінійна оцінка $\widehat{\xi}^{(n)}(m,\mu)$ невідомого значення приросту $\xi^{(n)}(m,\mu)$, $m = 0,1,2,\dots,N$, $\mu > 0$, за відомими спостереженнями послідовності $\xi(m)$ в точках множини $\mathbb{Z} \setminus \{0,1,2,\dots,N\}$ визначається за формулою* (19)*. Спектральна характеристика $\varphi(\lambda,\mu)$ оптимальної оцінки $\widehat{\xi}^{(n)}(m,\mu)$ обчислюється за формулою* (20)*. Величина середньоквадратичної похибки $\Delta(f,\xi^{(n)}(m,\mu))$ обчислюється за формулою* (21)*.*

Використовуючи формулу (11) та теорему 3.1 побудуємо оцінку

$$\widehat{A}_N\xi = -\sum_{k=-\mu n}^{-1} v(k)\xi(k) + \int_{-\pi}^{\pi} h_\mu^{(a)}(\lambda)\, dZ(\lambda) \tag{22}$$

функціонала $A_N\xi$. Позначимо через $[D_N^\mu a^{(1)}]_{+\mu n}$ вектор, утворений дописуванням μn нулів до вектора $D_N^\mu a^{(1)}$. Підставимо у співвідношення (17) та (18) вектор b_μ з коефіцієнтами, визначеними в (10). Отримаємо наступі формули для визначення спектральної характеристики та середньоквадратичної похибки оцінки:

$$h_\mu^{(a)}(\lambda) = A_N^\mu(e^{i\lambda})(1-e^{-i\lambda\mu})^n \frac{1}{(i\lambda)^n} - \frac{(-i\lambda)^n \sum_{k=0}^{N+\mu n}(\mathbf{F}^{-1}[D_N^\mu a^{(1)}]_{+\mu n})_k e^{i\lambda k}}{(1-e^{i\lambda\mu})^n f(\lambda)}, \tag{23}$$

де $A_N^\mu(e^{i\lambda}) = \sum_{k=0}^{N}(D_N^\mu a^{(1)})_k e^{i\lambda k}$,

$$\begin{aligned}\Delta(f,\widehat{A}_N) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\lambda^{2n}\left|\sum_{k=0}^{N+\mu n}(\mathbf{F}^{-1}[D_N^\mu a^{(1)}]_{+\mu n})_k e^{i\lambda k}\right|^2}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n} f(\lambda)}\, d\lambda \\ &= \langle \mathbf{F}^{-1}[D_N^\mu a^{(1)}]_{+\mu n}, [D_N^\mu a^{(1)}]_{+\mu n}\rangle.\end{aligned} \tag{24}$$

Отже, має місце наступна теорема.

Теорема 3.2. *Нехай стохастична послідовність $\{\xi(m), m \in \mathbb{Z}\}$ визначає стаціонарний n-й приріст $\xi^{(n)}(m,\mu)$ з абсолютно неперервною спектральною функцією $F(\lambda)$ яка має спектральну щільність $f(\lambda)$, що задовольняє умови* (14)*. Тоді оптимальна лінійна оцінка $\widehat{A}_N\xi$ значення функціонала $A_N\xi$ від невідомих елементів $\xi(m)$, $m \in \{0,1,2,\dots,N\}$, $\mu > 0$, за відомими спостереженнями послідовності $\xi(m)$ в точках множини $\mathbb{Z} \setminus \{0,1,2,\dots,N\}$ визначається за формулою* (22)*, де коефіцієнти $v(k)$, $k = -1,-2,\dots,-\mu n$, обчислюється за формулою* (9)*. Спектральна* *характеристика* $h_\mu^a(\lambda)$ *оптимальної оцінки* $\widehat{A}_N\xi$ *обчислюється за формулою* (23). *Величина середньоквадратичної похибки* $\Delta(f,\widehat{A}_N)$ *обчислюється за формулою* (24).

Приклад 3.1. Розглянемо стохастичну послідовність $\{\xi(m)\colon m\in\mathbb{Z}\}$ зі стаціонарними приростами другого порядку. Нехай прирости другого порядку з кроком $\mu=1$ утворюють послідовність авторегресії першого порядку з параметром ψ. Знайдемо оптимальну в середньоквадатичному сенсі лінійну оцінку значення функціонала $A_1\xi=a\xi(0)+b\xi(1)$ від невідомих значень послідовності за спостереженнями в моменти часу $m\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1\}$. Спектральна щільність випадкової послідовності $\xi(m)$ задається наступним чином

$$f(\lambda)=\frac{\lambda^4}{|1-e^{i\lambda}|^4|1-\psi e^{i\lambda}|^2}.$$

Спектральна характеристика оптимальної оцінки функціонала $A_1\xi$ обчислюється за формулою

$$h_1^{(a)}(\lambda)=\Psi^{-1}(\Psi_{-1}e^{-i\lambda}+\Psi_4e^{3i\lambda})(1-e^{-i\lambda})^2\frac{1}{(i\lambda)^2},$$

де $\Psi=1+\psi^2+\psi^4+\psi^6+\psi^8$, $\Psi_{-1}=a\psi(1+\psi^2+\psi^4+\psi^6)+b\psi(2+\psi+2\psi^2+\psi^3+2\psi^4+\psi^5+2\psi^6)$, $\Psi_4=a\psi^3(1+\psi^2)+b\psi^2(1+2\psi^1+2\psi^2+2\psi^3+\psi^4)$. Оптимальна оцінка функціонала обчислюється за формулою

$$\begin{aligned}\widehat{A}_1\xi&=-(a+2b)\xi(-2)+(2a+3b)\xi(-1)+\Psi^{-1}\Psi_{-1}\xi^{(2)}(-1,1)+\Psi^{-1}\Psi_4\xi^{(2)}(4,1)\\&=\varphi_{-3}\xi(-3)+\varphi_{-2}\xi(-2)+\varphi_{-1}\xi(-1)+\varphi_2\xi(2)+\varphi_3\xi(3)+\varphi_4\xi(4),\end{aligned}$$

$$\varphi_{-3}=\Psi^{-1}\Psi_{-1},\qquad\varphi_{-2}=-(a+2b+2\Psi^{-1}\Psi_{-1}),\qquad\varphi_{-1}=(2a+3b+\Psi^{-1}\Psi_{-1}),$$
$$\varphi_2=\Psi^{-1}\Psi_4,\qquad\varphi_3=-2\Psi^{-1}\Psi_4,\qquad\varphi_4=\Psi^{-1}.$$

4. Мінімаксна інтерполяція

Величина середньоквадратичної похибки $\Delta(h_\mu^{(a)}(f);f):=\Delta(f,\widehat{A}_N)$ та спектральна характеристика $h_\mu^{(a)}$ оптимальної лінійної оцінки $\widehat{A}_N\xi$ функціонала $A_N\xi$ від невідомих значень послідовності $\xi(m)$ зі стаціонарними n-ми приростами визначаються формулами (23) та (24), якщо відома спектральна щільність $f(\lambda)$ послідовності $\xi(m)$. У випадку, коли задано лише множину $\mathcal{D}$ допустимих щільностей, застосовується мінімакний підхід до задачі оцінювання функціонала, тобто визначається оцінка, яка мінімізує значення середньоквадратичної похибки одночасно для всіх спектральних щільностей із класу $\mathcal{D}$.

Означення 4.1. Для заданого класу спектральних щільностей $\mathcal{D}$ спектральна щільність $f_0(\lambda)\in\mathcal{D}$ називається найменш сприятливою в $\mathcal{D}$ для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_N\xi$, якщо

$$\Delta(f_0)=\Delta(h_\mu^{(a)}(f_0);f_0)=\max_{f\in\mathcal{D}}\Delta(h_\mu^{(a)}(f);f).$$

Означення 4.2. Для заданого класу спектральних щільностей $\mathcal{D}$ спектральна характеристика $h^0(\lambda)$ оптимальної оцінки функціонала $A_N\xi$ називається мінімаксною (робастною), якщо

$$h^0(\lambda)\in H_{\mathcal{D}}=\bigcap_{f\in\mathcal{D}}L_2^{0-}(f)\oplus L_2^{(N+\mu n)+}(f),$$

$$\min_{h\in H_{\mathcal{D}}}\max_{f\in\mathcal{D}}\Delta(h;f)=\sup_{f\in\mathcal{D}}\Delta(h^0;f).$$

Лема 4.1. *Спектральна щільність $f_0 \in \mathcal{D}$, що задовольняє умову (14), найменш сприятлива в класі $\mathcal{D}$ для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_N\xi$, якщо матриця $\mathbf{F}^0$, яка утворена за допомогою коефіцієнтів Фур'є функції*

$$f^0_\mu(\lambda) = \frac{\lambda^{2n}}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n} f^0(\lambda)}, \tag{25}$$

визначає розв'язок екстремальної задачі

$$\max_{f\in\mathcal{D}} \langle \mathbf{F}^{-1}[D^\mu_N a^{(1)}]_{+\mu n}, [D^\mu_N a^{(1)}]_{+\mu n}\rangle = \langle (\mathbf{F}^0)^{-1}[D^\mu_N a^{(1)}]_{+\mu n}, [D^\mu_N a^{(1)}]_{+\mu n}\rangle.$$

Якщо $h^{(a)}_\mu(f_0) \in H_\mathcal{D}$, то мінімаксна спектральна характеристика визначається як $h^0 = h^{(a)}_\mu(f_0)$.

Функції h^0 та f_0 утворюють сідлову точку функції $\Delta(h; f)$ на множині $H_\mathcal{D} \times \mathcal{D}$. Нерівності сідлової точки

$$\Delta(h; f_0) \geq \Delta(h^0; f_0) \geq \Delta(h^0; f) \qquad \forall f \in \mathcal{D},\ \forall h \in H_\mathcal{D}$$

виконуються, якщо $h^0 = h^{(a)}_\mu(f_0)$ та $h^{(a)}_\mu(f_0) \in H_\mathcal{D}$, де f_0 — розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\widetilde{\Delta}(f) = -\Delta(h^{(a)}_\mu(f_0); f) \to \inf, \qquad f \in \mathcal{D}, \tag{26}$$

$$\Delta(h^{(a)}_\mu(f_0); f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\lambda^{2n}\left|\sum_{k=0}^{N+\mu n}((\mathbf{F}^0)^{-1}[D^\mu_N a^{(1)}]_{+\mu n})_k e^{i\lambda k}\right|^2}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n} f_0^2(\lambda)} f(\lambda)\, d\lambda.$$

Остання задача еквівалентна задачі на безумовний екстремум

$$\Delta_\mathcal{D}(f) = \widetilde{\Delta}(f) + \delta(f|\mathcal{D}) \to \inf,$$

розв'язок f_0 якої визначається умовою $0 \in \partial\Delta_\mathcal{D}(f_0)$ [13].

5. Найменш сприятливі щільності в класі $\mathcal{D}^-_{0,n}$

Розглянемо наступну множину спектральних щільностей

$$\mathcal{D}^-_{0,n} = \left\{ f(\lambda)\colon \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\lambda^{2n}}{f(\lambda)}\, d\lambda \geq P \right\}.$$

З умови $0 \in \partial\Delta_\mathcal{D}(f_0)$ отримуємо наступне співвідношення, що визначає найменш сприятливу спектральну щільність

$$\left|\sum_{k=0}^{N+\mu n} ((\mathbf{F}^0)^{-1}[D^\mu_N a^{(1)}]_{+\mu n})_k e^{i\lambda k}\right|^2 = p_0^2 |1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}. \tag{27}$$

Позначимо через p^μ вектор розмірності $(N+\mu n+1)$ з координатами $p_\mu(\mu l) = (-1)^l p_0 C^l_n$, $l = 0, 1, \dots, n$, та $p(k) = 0$, $k \neq \mu l$, $l = 0, 1, \dots, n$. Тоді рівняння (27) задовольняють коефіцієнти Фур'є $f^0_\mu(k) = f^0_\mu(-k)$, $k = 0, 1, \dots, N+\mu n$ функції (25), знайдені з рівняння

$$\mathbf{F}^0 p^\mu = [D^\mu_N a^{(1)}]_{+\mu n}. \tag{28}$$

Розглянемо детальніше останнє рівняння. Зауважимо, що матриця $\mathbf{F}^0$ симетрична, а останні N координат вектора p^μ рівні 0.

Введемо наступні позначення. Нехай $\mathbf{d}$ — деякий вектор розмірності p. Для $p_1 < p$ позначимо через $[\mathbf{d}]_{p_1}$ вектор, складений з перших p_1 координат вектора $\mathbf{d}$. Нехай $\mathbf{D}$ — деяка матриця розмірності $(p \times q)$. Для $p_1 < p$, $q_1 < q$ позначимо через $[\mathbf{D}]_{p_1,q_1}$ матрицю розмірності $(p_1 \times q_1)$, елементи якої відповідають елементам матриці $\mathbf{D}$, через $[\mathbf{D}]_{\cdot,q_1}$ позначимо матрицю, складену з перших q_1 стовпчиків матриці $\mathbf{D}$.

Розглянемо систему $[\mathbf{F}^0]_{\cdot,\mu n+1}[p^\mu]_{\mu n+1} = [D_N^\mu a^{(1)}]_{+\mu n}$, що рівносильна системі (28). Розіб'ємо матрицю $[\mathbf{F}^0]_{\cdot,\mu n+1}$ на два блоки $\mathbf{F}^0_{(1)} = [\mathbf{F}^0]_{\mu n+1,\mu n+1}$ та $\mathbf{F}^0_{(2)}$, записані один над одним. Блок $\mathbf{F}^0_{(1)}$ – симетрична матриця, а $[p^0]_{\mu n+1}$ — симетричний вектор (можливо, з точністю до множника -1). Тому серед перших $\mu n+1$ рівнянь системи (28) буде $K = [(\mu n+1)/2]$ рівнянь з однаковою лівою частиною. Враховуючи довільність коефіцієнтів $a(k)$, $k = 0, 1, \ldots, N$, отримуємо, що система (28), взагалі кажучи, несумісна. Для розв'язання цієї проблеми введемо додаткові коефіцієнти. Покладемо $a^{(2)} = (a(N+1), \ldots, a(N+\mu n))$ і розглянемо функціонал

$$A_{N+\mu n}\xi = \sum_{k=0}^{N+\mu n} a(k)\xi(k),$$

де коефіцієнти $a(0), a(1), \ldots, a(N)$ задані, а $a(N+1), \ldots, a(N+\mu n)$ — довільні. Тоді мають місце співвідношення

$$\begin{aligned} A_{N+\mu n}\xi &= \sum_{k=0}^{N+\mu n} b_\mu(k; a^{(2)})\xi^{(n)}(k,\mu) - \sum_{k=-\mu n}^{-1} v(k, a^{(2)})\xi(k) \\ &= B_{N+\mu n}\xi - \sum_{k=-\mu n}^{-1} v(k, a^{(2)})\xi(k), \end{aligned}$$

$$A_N\xi = -\sum_{k=N+1}^{N+\mu n} a(k)\xi(k) - \sum_{k=-\mu n}^{-1} v(k, a^{(2)})\xi(k) + B_{N+\mu n}\xi,$$

де елементи $v(k, a^{(2)})$, $k = -1, -2, \ldots, -\mu n$, визначаться за формулою (9). Оскільки нам відомі значення $\{\xi(k)\colon k = -\mu n, \ldots, -1\}$ та $\{\xi(k)\colon k = N+1, \ldots, N+\mu n\}$, то

$$\Delta(f, A_N) = \mathsf{E}\,|A_N\xi - \widehat{A}_N\xi|^2 = \mathsf{E}\,|B_{N+\mu n}\xi - \widehat{B}_{N+\mu n}\xi|^2 = \Delta(f, B_{N+\mu n}\xi).$$

Для визначення найменш сприятливої спектрально щільності розглянемо наступну задачу на безумовний екстремум:

$$\Delta_{\mathcal{D}}(f) = \widetilde{\Delta}(f) + \delta(f|\mathcal{D}) \to \inf,$$

$$\widetilde{\Delta}(f) = -\Delta(h_\mu^{(a)}(f_0); f) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\lambda^{2n}\left|\sum_{k=0}^{N+\mu n}((\mathbf{F}^0)^{-1}b_\mu(a^{(2)}))_k e^{i\lambda k}\right|^2}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n} f_0^2(\lambda)} f(\lambda)\,d\lambda.$$

При $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{0,n}^-$ з умови $0 \in \partial\Delta_{\mathcal{D}}(f_0)$ отримаємо співвідношення

$$\left|\sum_{k=0}^{N+\mu n}((\mathbf{F}^0)^{-1}b_\mu(a^{(2)}))_k e^{i\lambda k}\right|^2 = p_0^2|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}. \tag{29}$$

Розглянемо систему рівнянь

$$\mathbf{F}^0 p^\mu = b_\mu(a^{(2)}), \tag{30}$$

де $b_\mu(a^{(2)}) = (b_\mu(0, a^{(2)}), \ldots, b_\mu(N+\mu n, a^{(2)}))$ — вектор розмірності $(N+\mu n+1)$. Для сумісності системи (30) необхідно виконання наступних рівностей

$$b_\mu(i; a^{(2)}) = (-1)^{\mu n} b_\mu(\mu n - i; a^{(2)}), \qquad i = 0, 1, \ldots, K. \tag{31}$$

Таким чином, рівняння (29) задовольняють коефіцієнти Фур'є функції (25), знайдені з системи (30)–(31). Система (30)–(31) складається з $N+\mu n+1$ рівнянь та містить $N+2\mu n+2$ невідомих: $\{f_\mu(k)\colon k=0,1,\dots,N+\mu n\}$, $a^{(2)}=(a(k)\colon k=N+1,\dots,N+\mu n)$ та p_0. Коефіцієнт p_0 знаходиться з рівняння

$$\sum_{m=-N-\mu n}^{N+\mu n} f_\mu^0(|m|)\int_{-\pi}^{\pi}|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}e^{i\lambda m}\,d\lambda=2\pi P. \tag{32}$$

Тому коефіцієнти $\{f_\mu(k)\colon k=0,1,\dots,N+\mu n\}$ та $a^{(2)}=(a(k)\colon kN+1,\dots,N+\mu n)$ залежать від параметра $\alpha=(\alpha(1),\dots,\alpha(\mu n))$. Покладемо

$$\mathcal{B}=\{\alpha\in\mathbb{R}^{\mu n}\colon (f_\mu(0;\alpha)\dots,f_\mu(N+\mu n;\alpha)) - \text{строго позитивна послідовність}\}.$$

Взагалі кажучи, множина $\mathcal{B}$ залежить від набору $(a(0),a(1),\dots,a(N))$. Найменш сприятлива щільність задається співвідношенням

$$\frac{\lambda^{2n}}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}f^0(\lambda)}=\sum_{m=-N-\mu n}^{N+\mu n} f_\mu^0(|m|;\alpha)e^{i\lambda m}=\left|\sum_{k=0}^{N+\mu n}\gamma_\mu(k;\alpha)e^{-i\lambda k}\right|^2,\qquad \alpha\in\mathcal{B}.$$

Отже клас найменш сприятливих щільностей має вигляд

$$\mathcal{R}=\left\{f^0(\lambda)\in\mathcal{D}_{0,n}^{-}\colon f^0(\lambda)=\lambda^{2n}\left(|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}\sum_{m=-N-\mu n}^{N+\mu n} f_\mu^0(|m|;\alpha)e^{i\lambda m}\right)^{-1},\ \alpha\in\mathcal{B}\right\}. \tag{33}$$

Мінімаксна оцінка функціонала $A_N\xi$ обчислюється за формулою

$$\widehat{A}_N\xi=-\sum_{k=N+1}^{N+\mu n}a(k;\alpha)\xi(k)-\sum_{k=-\mu n}^{-1}v(k,a^{(2)}(\alpha))\xi(k)+\int_{-\pi}^{\pi}h_{\mu;\alpha}^{(a)}(\lambda)\,d\lambda,\qquad \alpha\in\mathcal{B}, \tag{34}$$

$$h_{\mu;\alpha}^{(a)}(\lambda)=A_{N+\mu n}(e^{i\lambda})(1-e^{-i\lambda\mu})^n\frac{1}{(i\lambda)^n}-\frac{(-i\lambda)^n\sum_{k=0}^{N+\mu n}((\mathbf{F}^0)^{-1}D_{N+\mu n}^{\mu}\mathbf{a})_k e^{i\lambda k}}{(1-e^{i\lambda\mu})^n f(\lambda)}, \tag{35}$$

де $A_{N+\mu n}(e^{i\lambda})=\sum_{k=0}^{N+\mu n}(D_{N+\mu n}^{\mu}\mathbf{a})_k e^{i\lambda k}$, $a^{(2)}(\alpha)=(a(k;\alpha)\colon k=N+1,\dots,N+\mu n)$, вектор $\mathbf{a}$ утворений об'єднанням векторів $a^{(1)}$ та $a^{(2)}(\alpha)$.

Теорема 5.1. *Нехай коефіцієнти* $\{f_\mu^0(k;\alpha)\colon k=0,\dots,N+\mu n,\alpha\in\mathcal{B}\}$ *визначаються системою* (30), (31), (32). *Якщо послідовність* $(a(0),a(1),\dots,a(N))$ *така, що множина* $\mathcal{B}$ *непорожня, а система* (31) *сумісна, то множина найменш сприятливих в класі* $\mathcal{D}_{0,n}^{-}$ *щільностей для побудови лінійної оцінки функціонала* $A_N\xi$ *за спостереженнями послідовності в моменти часу* $\mathbb{Z}\setminus\{0,1,\dots,N\}$ *має вигляд* (33). *Мінімаксна оцінка функціонала* $A_N\xi$ *обчислюється за формулою* (34). *Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою* (35).

Приклад 5.1. Знайдемо мінімаксну оцінку функціонала $A_1\xi=\xi(0)+2\xi(1)$ від випадкової послідовності $\{\xi(m):m\in\mathbb{Z}\}$ зі стаціонарними приростами 2-го порядку за спостереження послідовності у моменти часу $\mathbb{Z}\setminus\{0,1\}$. Розглянемо прирости з кроком $\mu=1$. Функціонал $A_1\xi$ можна подати у вигляді

$$A_1\xi=-a(2)\xi(2)-a(3)\xi(3)-v(-2)\xi(-2)-v(-1)\xi(-1)+\sum_{k=0}^{3}b_1(k)\xi^{(2)}(k,1),$$

де $b_1(0)=5+3a(2)+4a(3)$; $b_1(1)=2+2a(2)+3a(3)$; $b_1(2)=a(2)+2a(3)$; $b_1(3)=a(3)$; $v(-1)=-4-3a(2)-4a(3)$; $v(-2)=a(2)+2a(3)$. Система для визначення найменш сприятливої спектральної щільності має вигляд

$$\begin{cases} b_1(0) = p_0(f_1^0(0) - 2f_1^0(1) + f_1^0(2)); \\ b_1(1) = p_0(f_1^0(1) - 2f_1^0(0) + f_1^0(1)); \\ b_1(3) = p_0(f_1^0(3) - 2f_1^0(2) + f_1^0(1)); \\ b_1(0) = b_1(2). \end{cases}$$

Останнє рівняння задає наступний підпростір можливих комбінацій коефіцієнтів $a^{(2)} = (a(2), a(3))$: $\mathcal{L} = \{(a(2), a(3)) \in \mathbb{R}^2 \colon 2a(2) + 2a(3) + 5 = 0\}$.

Покладемо $f_1^0(0) = \alpha(1)$, $a(3) = \alpha(2)$. Тоді з останньої системи отримаємо

$$f_1^0(0) = \alpha(1); \qquad f_1^0(1) = \frac{-11 - 2\alpha(2)}{4p_0} + \alpha(1); \qquad f_1^0(2) = \frac{-21 - 4\alpha(2)}{2p_0} + \alpha(1);$$
$$f_1^0(3) = \frac{-83 - 18\alpha(2)}{4p_0} + \alpha(1).$$

З умови

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\lambda^4}{f^0(\lambda)}\, d\lambda = P$$

отримуємо $p_0 = P^{-1}$. Найменш сприятлива щільність має вигляд

$$\begin{aligned} f^0(\lambda) = \lambda^4 |1 - e^{i\lambda}|^{-4}\big(\alpha(1) &+ (2\alpha(1) - P\alpha(2) - 5.5P)\cos\lambda \\ &+ (2\alpha(1) - 4P\alpha(2) - 21\pi P)\cos 2\lambda \\ &+ (2\alpha(1) - 9P\alpha(2) - 41.5P)\cos 3\lambda\big)^{-1}, \\ \alpha = (\alpha(1), \alpha(2)) &\in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Покладемо коефіцієнт $a(3)$ рівний $-\frac{5}{4}$. Тоді $a(2) = -\frac{5}{4}$. Нехай також $P = \frac{1}{4}$. При цьому мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою

$$\begin{aligned} h_{\mu;t}^{(a)}(\lambda) = \bigg(&\frac{-121 + 2\alpha(1)}{8} e^{-3i\lambda} - \frac{-89 + \alpha(1)}{4} e^{-2i\lambda} + \frac{-5}{4} e^{-i\lambda} \\ &- \frac{-89 + \alpha(1)}{4} e^{4i\lambda} + \frac{-121 + 2\alpha(1)}{8} e^{5i\lambda}\bigg) \frac{(1 - e^{-i\lambda})^2}{(i\lambda)^2}. \end{aligned}$$

Середньоквадратична похибка $\Delta(h_{\mu;t}^{(a)}, f^0) = 1/4$.

6. Найменш сприятливі щільності в класі $\mathcal{D}_{M,n}^-$

Розглянемо множину спектральних щільностей

$$\mathcal{D}_{M,n}^- = \left\{ f(\lambda) \colon \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\lambda^{2n}}{f(\lambda)} \cos(m\lambda)\, d\lambda = r(m), m = 0, 1 \ldots, M \right\},$$

де $r(m)$, $m = 0, 1, \ldots, M$ — строго позитивна послідовність. З умови $0 \in \partial\Delta_{\mathcal{D}}(f^0)$ знаходимо рівняння

$$\left| \sum_{k=0}^{N+\mu n} c(k) e^{i\lambda k} \right|^2 = |1 - e^{i\lambda\mu}|^{2n} \sum_{m=0}^{M} \alpha_m \cos m\lambda = \left| (1 - e^{i\lambda\mu})^n \sum_{m=0}^{M} p(m) e^{i\lambda m} \right|^2, \quad (36)$$

де α_m, $m = 0, 1, \ldots, M$ — множники Лагранжа, $c(k)$, $k = 0, 1, \ldots, N + \mu n$ — розв'язки рівняння $\mathbf{F}^0 c = b_\mu(a^{(2)})$.

Розглянемо два випадки: $M > N$ та $M \leq N$.

Нехай $M > N$. Покажемо, що найменш сприятливою буде щільність вигляду

$$f^0(\lambda) = \left(\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{\lambda^{2n}} \sum_{k=-M-\mu n}^{M+\mu n} f^0_\mu(|k|) e^{i\lambda k} \right)^{-1} = \left| \frac{(i\lambda)^n}{(1-e^{-i\lambda\mu})^n \sum_{k=0}^{M+\mu n} \gamma_\mu(k) e^{-i\lambda k}} \right|^2. \tag{37}$$

Враховуючи обмеження на моменти функції $\frac{\lambda^{2n}}{f^0(\lambda)}$, отримаємо наступні співвідношення

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m-\mu n}^{m+\mu n} f^0_\mu(|k|) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\lambda m) |1-e^{I\lambda\mu}|^{2n} e^{I\lambda k}\, d\lambda = r(m), \qquad m = 0,1,\dots,m.$$

Покладемо

$$u_\mu(m,k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\lambda m) |1-e^{i\lambda\mu}|^{2n} e^{i\lambda k}\, d\lambda, \qquad k,m = 0,1,\dots,M+\mu n.$$

Тоді отримаємо

$$f^0_\mu(0) u_\mu(m,0) + 2 \sum_{k=1}^{M+\mu n} f^0_\mu(k) u_\mu(m,k) = 2\pi r(m), \qquad m = 0,1,\dots,M. \tag{38}$$

Рівність (36) справджується, якщо виконане наступне співвідношення

$$\sum_{k=0}^{N+\mu n} c(k) e^{i\lambda k} = (1-e^{i\lambda\mu})^n \sum_{m=0}^{M} p(m) e^{i\lambda m} = \sum_{k=0}^{M+\mu n} w_\mu(k) e^{i\lambda k}, \tag{39}$$

де

$$w_\mu(k) = \sum_{l=\max\left\{0,\left[\frac{k-M}{\mu}\right]'\right\}}^{\min\left\{n,\left[\frac{k}{\mu}\right]\right\}} (-1)^l C_n^l p(k-\mu l).$$

Оскільки $M > N$, то з (39) маємо $w_\mu(k) = c(k)$ при $k = 0,1,\dots,N+\mu n$, $w_\mu(k) = 0$ при $k = N+\mu n+1,\dots,M+\mu n$, тобто

$$\mathbf{F}^0 w = b_\mu\left(a^{(2)}\right), \qquad w = (w_\mu(0),\dots,w_\mu(N+\mu n)), \tag{40}$$

$$\sum_{l=\max\left\{0,\left[\frac{k-M}{\mu}\right]'\right\}}^{\min\left\{n,\left[\frac{k}{\mu}\right]\right\}} (-1)^l C_n^l p(k-\mu l) = 0, \qquad k = N+\mu n+1,\dots,M+\mu n. \tag{41}$$

При розв'язанні системи (40) можуть виникнути співвідношення для коефіцієнтів $b_\mu(i;a^{(2)})$ (аналогічні співвідношенням (31)), які задають лінійний підпростір $\mathcal{L}_1$ простору $\mathbb{R}^{\mu n}$ параметрів $a^{(2)}$.

Система (38),(40), (41) складається з $2M+\mu n+2$ рівнянь та містить $2(M+\mu n+1)$ невідомих: $\{f_\mu(k)\colon k = 0,1,\dots,M+\mu n\}$, $a^{(2)} = (a(k)\colon k = N+1,\dots,N+\mu n)$ та $\{p(k)\colon k = 0,1,\dots,M\}$. Тому отримаємо розв'язки, що залежать від параметра $\alpha = (\alpha(1),\dots,\alpha(\mu n))$: $\{f_\mu(k;\alpha)\colon k = 0,1,\dots,M+\mu n, \alpha \in \mathbb{R}^{\mu n}\}$ та $a^{(2)}(\alpha) = (a(k;\alpha) : k = N+1,\dots,N+\mu n, \alpha \in \mathbb{R}^{\mu n})$.

Визначимо також множину $\mathcal{B}_1$ параметрів $\alpha \in \mathbb{R}^{\mu n}$, при кожному з яких послідовність розв'язків системи (38),(40),(41) $\{f_\mu(k;\alpha) : k = 0,\dots,N+\mu n\}$ строго позитивна.

Розглянемо випадок $M \le N$. Покладемо $w^N = (w_\mu(0),\dots,w_\mu(M+\mu n),0\dots,0)$ — вектор розмірності $(N+\mu n+1)$. Тоді з (39) випливає

$$\mathbf{F}^0 w^N = b_\mu\left(a^{(2)}\right). \tag{42}$$

Використовуючи обмеження на моменти функції

$$\frac{\lambda^{2n}}{f^0(\lambda)} = |1 - e^{i\lambda\mu}|^{2n} \sum_{k=-N-\mu n}^{N+\mu n} f_\mu^0(|k|)e^{i\lambda k},$$

отримаємо $M+1$ рівняння для визначення коефіцієнтів $p(m)$:

$$f_\mu^0(0)u_\mu(m,0) + 2\sum_{k=1}^{N+\mu n} f_\mu^0(k)u_\mu(m,k) = 2\pi r(m), \qquad m = 0,1,\ldots,M. \tag{43}$$

При розв'язанні системи (42) можуть виникнути співвідношення для коефіцієнтів $b_\mu(i;a^{(2)})$ (аналогічні співвідношенням (31)), які задають лінійний підпростір $\mathcal{L}_2$ простору $\mathbb{R}^{\mu n}$ параметрів $a^{(2)}$.

Система (42), (43) складається з $N+M+\mu n+2$ рівнянь та містить $N+M+2\mu n+2$ невідомих: $\{f_\mu(k)\colon k=0,1,\ldots,N+\mu n\}$, $a^{(2)} = (a(k)\colon k=N+1,\ldots,N+\mu n)$ та $\{p(k)\colon k=0,1,\ldots,M\}$. Тому отримаємо розв'язки, що залежать від параметра $\alpha = (\alpha(1),\ldots,\alpha(\mu n))$: $\{f_\mu(k;\alpha)\colon k=0,1,\ldots,N+\mu n, \alpha\in\mathbb{R}^{\mu n}\}$ та $a^{(2)}(\alpha) = (a(k;\alpha)\colon k = N+1,\ldots,N+\mu n, \alpha\in\mathbb{R}^{\mu n})$.

Позначимо $\{f_\mu(k;\alpha) : k=0,1,\ldots,N+\mu n, \alpha\in\mathbb{R}^{\mu n}\}$ — розв'язки систем (42), (43). Визначимо множину $\mathcal{B}_2$ параметрів $\alpha\in\mathbb{R}^{\mu n}$, при яких послідовність $\{f_\mu(k;\alpha) : k = 0,1,\ldots,N+\mu n\}$ строго позитивна.

Найменш сприятливою буде щільність

$$\begin{aligned} f^0(\lambda;\alpha) &= \lambda^{2n}\left(|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}\sum_{k=-N-\mu n}^{N+\mu n} f_\mu^0(|k|;\alpha)e^{i\lambda k}\right)^{-1} = \\ &= \left|\frac{(i\lambda)^n}{(1-e^{-i\lambda\mu})^n\sum_{k=0}^{N+\mu n}\gamma_\mu(k;\alpha)e^{-i\lambda k}}\right|^2, \qquad \alpha\in\mathcal{B}_2. \end{aligned} \tag{44}$$

Таким чином маємо наступну теорему.

Теорема 6.1. *Нехай $M > N$ і коефіцієнти $\{f_\mu(k;\alpha)\colon k=0,1,\ldots,M+\mu n, \alpha\in\mathcal{B}_1\}$ визначаються з систем (38), (40), (41). Якщо послідовність $a(0),a(1),\ldots,a(N)$ така, що множини $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{L}_1$ непорожні, то множина найменш сприятливих в класі $\mathcal{D}_{M,n}^-$ щільностей для побудови лінійної оцінки функціонала $A_N\xi$ за спостереженнями процесу у моменти часу $\mathbb{Z}\setminus\{0,1,\ldots,N\}$ має вигляд*

$$\mathcal{R}_1 = \left\{f^0(\lambda)\in\mathcal{D}_{M,n}^-\colon f^0(\lambda) = \left(\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{\lambda^{2n}}\sum_{m=-M-\mu n}^{M+\mu n} f_\mu^0(|m|;\alpha)e^{i\lambda m}\right)^{-1}, \alpha\in\mathcal{B}_1\right\}. \tag{45}$$

Оптимальна оцінка функціонала $A_N\xi$ обчислюється за формулою (34). Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою (35).

Якщо $M\le N$ і коефіцієнти $\{f_\mu(k;\alpha)\colon k=0,1,\ldots,N+\mu n, \alpha\in\mathcal{B}_2\}$ визначаються з систем (42), (43). Якщо послідовність $a(0),a(1),\ldots,a(N)$ така, що множини $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{L}_2$ непорожні, то множина найменш сприятливих в класі $\mathcal{D}_{M,n}^-$ щільностей для побудови лінійної оцінки функціонала $A_N\xi$ за спостереженнями процесу у моменти часу $\mathbb{Z}\setminus\{0,1,\ldots,N\}$ має вигляд

$$\mathcal{R}_2 = \left\{f^0(\lambda)\in\mathcal{D}_{M,n}^- : f^0(\lambda) = \left(\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{\lambda^{2n}}\sum_{m=-N-\mu n}^{N+\mu n} f_\mu^0(|m|;\alpha)e^{i\lambda m}\right)^{-1}, \alpha\in\mathcal{B}_2\right\}. \tag{46}$$

Оптимальна оцінка функціонала $A_N\xi$ *обчислюється за формулою* (34). *Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою* (35).

Література

1. U. Grenander, *A prediction problem in game theory*, Ark. Mat. **3** (1957), 371–379.
2. J. Franke, *Minimax robust prediction of discrete time series*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **68** (1985), 337–364.
3. J. Franke and H. V. Poor, *Minimax-robust filtering and finite-length robust predictors*, Robust and Nonlinear Time Series Analysis, Lecture Notes in Statistics, Springer-Verlag, vol. 26, 1984, pp. 87–126.
4. K. Karhunen, *Uber lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I (1947), no. 37.
5. А. Н. Колмогоров, *Теория вероятностей и математическая статистика*, Сборник статей, "Наука", Москва, 1986.
6. М. Луз, *Фільтри Вінера–Колмогорова для прогнозування стаціонарних процесів*, Вісн. Київ. Ун-ту. Математика. Механіка, **25** (2011), 26–29,
7. M. P. Moklyachuk, *Stochastic autoregressive sequences and minimax interpolation*, Theory Probab. Math. Stat. **48** (1994), 95–103.
8. M. P. Moklyachuk, *Robust procedures in time series analysis*, Theory Stoch. Process. **6(22)** (2000), no. 3–4, 127–147.
9. M. P. Moklyachuk, *Game theory and convex optimization methods in robust estimation problems*, Theory Stoch. Process. **7(23)** (2001), no. 1–2, 253–264.
10. М. П. Моклячук, *Робастні оцінки функціоналів від стохастичних процесів*, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", Київ, 2008.
11. М. С. Пинскер, А. М. Яглом, *О линейном экстраполировании случайных процессов со стационарными n-ми приращениями*, ДАН СССР **94** (1954), no. 3, 385-—388.
12. М. С. Пинскер, *Теория кривых в гильбертовом пространстве со стационарными n-ми приращениями*, ИАН СССР **19** (1955), no. 3, 319–344.
13. Б. Н. Пшеничный, *Необходимые условия экстремума*, "Наука", Москва, 1982.
14. Ю. А. Розанов, *Стационарные случайные процессы*, 2-е изд. доп., "Наука", Москва, 1990.
15. N. Wiener, *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of stationary Time Series. Whis Engineering Applications*, The M. I. T. Press, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 1966.
16. A. M. Yaglom, *Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 1: Basic results*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York etc., 1987.
17. A. M. Yaglom, *Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 2: Suplementary notes and references*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York etc., 1987.
18. A. M. Yaglom, *Корреляционная теория процессов со случайными стационарными n-ми приращениями*, Математичский сборик **37(79)** (1955), no. 1, 141–196.
19. A. M. Yaglom, *Некоторые классы случайных полей в n-мером пространстве, родственные стационарным случайным процессам*, Теория вероятн. и ёё примен. **11** (1957), №3, 292–337.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ 01601, Україна

Адреса електронної пошти: maksim_luz@ukr.net

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ 01601, Україна

Адреса електронної пошти: mmp@univ.kiev.ua

Надійшла 07/05/2012