Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 87, 2012, стор. 144–151

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 87, 2012, pp. 144–151

ВЛАСТИВОСТІ ОБЛАСТІ ОПТИМАЛЬНОЇ ЗУПИНКИ В МОДЕЛІ ЛЕВІ

УДК 519.21

А. Г. МОРОЗ

Анотація. Розглянуто задачу оптимальної реалізації платіжного зобов'язання Американського типу у моделі Леві фінансового ринку. Наведено умови, за яких область зупинки є непорожньою та має порогову структуру.

Abstract. The optimal exercise problem in a Levy financial market model is considered. Conditions for the stopping domain to be non-empty and to have a threshold structure are given.

Аннотация. Рассмотрена задача оптимальной реализации платежного обязательства Американского типа в модели Леви финансового рынка. Приведены условия, при которых область остановки непустая и имеет пороговую структуру.

1. Вступ

Розглядається модель Леві фінансового(B, S)-ринку, в якій присутні два активи: безризиковий і ризиковий. Еволюція ціни безризикового активу моделюється процесом $B_t = e^{qt}$, $t \geq 0$, де $q \geq 0$ — безризикова відсоткова ставка. Ціна ризикового активу визначається як

$$S_t = S_0 e^{X_t}, \qquad t \geq 0,$$

де $X = \{X_t, t \geq 0\}$ — процес з незалежними приростами з початковим значенням $X_0 = 0$. Цей процес визначено на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathsf{P})$ з фільтрацією, яка задовольняє звичайні умови і $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$.

Американське платіжне зобов'язання з з функцією виплат $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ та терміном дії T гарантує інвестору виплату $f(S_t)$ у разі реалізації в момент $t \in [0, T]$. Задача оптимальної реалізації полягає в максимізації очікуваної виплати $\mathsf{E}\left(f(S_\tau)e^{-q\tau}\right)$ у класі M_T всіх марківських моментів τ відносно $\{\mathcal{F}_t\}$ зі значеннями в $[0, T]$. Цю задачу природно переформулювати в термінах процесу X: визначимо $g(z) = f(e^z)$ і розглянемо задачу максимізації

$$\mathsf{E}\left(g(X_\tau + x)e^{-q\tau}\right) \to \max.$$

Визначимо функцію вартості

$$V(T, x) = \sup_{\tau \in M_T} \mathsf{E}\left(g(X_\tau + x)e^{-q\tau}\right).$$

Такий момент зупинки $\tau^* \in M_T$, що

$$V(T, x) = \mathsf{E}\left(g(X_\tau^* + x)e^{-q\tau^*}\right),$$

назвемо оптимальним моментом зупинки або оптимальним моментом реалізації платіжного зобов'язання. Добре відомо (див., наприклад, [6]), що в задачі оптимальної зупинки для марківських процесів мінімальний оптимальний момент зупинки має вигляд

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0\colon (t, X_t) \in G\},$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G40, 60G51.
Ключові слова і фрази. Модель Леві, область зупинки, непорожність, порогова структура.

де множина

$$G = \{(t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R} \mid V(T-t, x) = g(x)\}$$

називається областю оптимальної зупинки опціону.

Визначимо також t-переріз множини G:

$$G_t = \{x \in \mathbf{R} \mid V(T-t, x) = g(x)\}.$$

При наближеному розв'язанні задачі оптимальної реалізації та чисельній побудові області зупинки важливо апріорі знати, що вона є непорожньою та має порогову структуру, тобто має вигляд

$$G_t = [c(t), \infty).$$

Дослідженням порогової структури області зупинки було присвячено багато робіт. Так, наприклад, у статті [6] досліджується непорожність та вигляд області зупинки для американського опціону, записаного для декількох активів. У роботі [4] для експоненційної моделі Леві розглядається поведінка ціни та досліджується границя області зупинки для Американського пут-опціону на актив, за яким сплачуються дивіденди. У статті [3] було встановлено порогову структуру для множини зупинки у задачі перепродажу Європейського кол-опціону. В роботі [7] досліджуються непорожність та порогова структура в дифузійній моделі ринку. У роботі [2] нами було досліджено непорожність і вигляд області зупинки у моделі Леві для платіжного зобов'язання з неперервно диференційовною функцією виплат g. У даній роботі ми отримаємо подібні результати для більш широкого класу функцій виплат.

2. Допоміжні твердження

Нехай X_t є процесом Леві зі скінченною мірою Леві ν, тоді він має розклад

$$X_t = at + bW_t + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} y\, \mu(ds, dy),$$

де W – вінерівський процес, μ — пуасонівська міра стрибків з $\mathsf{E}(\mu(dt, dx)) = \nu(dx)\, dt$. Надалі припускатимемо, що міра Леві процесу X_t задовольняє умову

$$\int_{|x| \geqslant 1} e^{p|x|} \nu(dx) < \infty$$

для всіх $p \geqslant 0$.

Позначимо через $C_b^2(\mathbf{R})$ множину всіх обмежених двічі неперервно диференційованих функцій з обмеженими похідними. Для $g \in C_b^2(\mathbf{R})$ генератор процесу X_t визначається як

$$Ag(x) = ag'(x) + \frac{b^2}{2} g''(x) + \int_{\mathbf{R}} (g(x+y) - g(x))\, \nu(dy).$$

Визначимо також оператор

$$A_q g(x) = ag'(x) + \frac{b^2}{2} g''(x) + \int_{\mathbf{R}} (g(x+y) - g(x))\, \nu(dy) - qg(x).$$

Для функцій $g \in C(\mathbf{R})$ ми розумітимемо дію цих операторів в узагальненому сенсі. Позначимо через $D(\mathbf{R})$ множину всіх основних функцій, тобто нескінченно неперервно диференційованих функцій з обмеженим носієм.

Припущення 2.1. (i) *для деяких $c > 0$, $\alpha > 0$ та всіх $x \in \mathbf{R}$ $|g(x)| \leqslant c(1+|x|^\alpha)$.*
(ii) $g \in C^1(\mathbf{R})$.
(iii) *Існує таке $\beta \in \mathbf{R}$ (можливо від'ємне), що $g(x) > x^\beta$ для достатньо великих $x > 0$.*
(iv) $\lim_{x\to+\infty} \sup_{|a| \leqslant \ln x} \frac{g(x+a)}{g(x)} = 1$.

Далі нам знадобиться наступна допоміжна теорема:

Теорема 2.1 ([2]). *Нехай функція вартості $g \in C(\mathbf{R})$ задовольняє пункт (i) Припущення 2.1. Тоді область зупинки у моделі Леві порожня тоді й тільки тоді, коли $A_q g$ є ненульовою невід'ємною мірою на $\mathbf{R}$.*

3. Основні результати

3.1. Непорожність області зупинки.

Теорема 3.1. *Область зупинки для процесів Леві зі скінченною мірою Леві та без броунівської частини і функції виплат, що задовольняє Припущення 2.1, є непорожньою.*

Доведення. Припустимо протилежне. Нехай область зупинки є порожньою. Тоді з теореми 2.1 випливає, що $\forall \theta \in D(\mathbf{R})$, $\theta \geqslant 0$, виконано

$$\langle A_q g(x), \theta(x) \rangle \geqslant 0. \tag{1}$$

За умовою теореми, $b = 0$ і міра Леві ν скінченна та симетрична. Тоді A_q має вигляд

$$\begin{aligned} A_q g(x) &= a g'(x) + \int_{-\infty}^{\infty} (g(x+y) - g(x))\, \nu(dy) - q g(x) \\ &= a g'(x) - \frac{q}{2} g(x) + \mathsf{E}\left[g(x+\xi) - (1 + \frac{q}{2\nu(R)} g(x)) \right], \end{aligned}$$

де ξ — випадкова величина, що має такий самий розподіл, як і стрибки процесу X_t. У [2] нами було доведено, що існує таке x_0, що для всіх $x > x_0$,

$$\mathsf{E}\left[g(x+\xi) - \left(1 + \frac{q}{2\nu(\mathbf{R})} g(x)\right) \right] < 0. \tag{2}$$

Позначимо

$$\begin{aligned} \tilde{A}_q g(x) &= a g'(x) - \frac{q}{2} g(x), \\ \tilde{\tilde{A}}_q g(x) &= \mathsf{E}\left[g(x+\xi) - \left(1 + \frac{q}{2\nu(\mathbf{R})} g(x)\right) \right]. \end{aligned}$$

З (2) випливає, що для всіх $\theta \in D(\mathbf{R})$, $\theta \geqslant 0$, $\operatorname{supp} \theta \subset [x_0, \infty)$:

$$\left\langle \tilde{\tilde{A}}_q g\ , \theta \right\rangle \leqslant 0. \tag{3}$$

Тоді для таких θ, з огляду на (1), маємо:

$$\left\langle \tilde{A}_q g\ , \theta \right\rangle \geqslant 0. \tag{4}$$

Розглянемо

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{A}_q g, \theta \right\rangle &= \left\langle g, (\tilde{A}_q)^* \theta \right\rangle = \int_{\mathbf{R}} g(x) \left(-a\theta'(x) - \frac{q}{2}\theta(x) \right) dx \\ &= -\int_{\mathbf{R}} g(x) \left(a\theta'(x) + \frac{q}{2}\theta(x) \right) dx. \end{aligned}$$

Зробимо заміну $\theta(x) = e^{\beta x}\phi(x)$. Тоді остання рівність набуде вигляду

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{A}_q g, \theta \right\rangle &= -\int_{\mathbf{R}} g(x) \left(a\theta'(x) + \frac{q}{2}\theta(x) \right) dx \\ &= -\int_{\mathbf{R}} g(x) e^{\beta x} \left(a\phi'(x) + \left(a\beta + \frac{q}{2} \right) \phi(x) \right) dx. \end{aligned}$$

Згідно з (4), має виконуватися нерівність

$$\int_{\mathbf{R}} g(x) e^{\beta x} \left(a\phi'(x) + \left(a\beta + \frac{q}{2} \right) \phi(x) \right) dx \leqslant 0 \qquad \forall \phi \in D(\mathbf{R}), \qquad \operatorname{supp} \phi \subset [x_0, \infty).$$

Покладемо $\beta = -\frac{q}{2a}$. Тоді остання нерівність рівносильна такій:

$$\int_{\mathbf{R}} g(x)e^{-\frac{q}{2a}x}(a\phi'(x))\,dx \leqslant 0 \qquad \forall \phi \in D(\mathbf{R}), \qquad \operatorname{supp}\phi \subset [x_0, \infty).$$

Розглянемо випадки:

1) $a > 0$.

Тоді

$$\left\langle g(x)e^{-\frac{q}{2a}x}, \phi'(x) \right\rangle \leqslant 0 \Leftrightarrow \left\langle (g(x)e^{-\frac{q}{2a}x})', \phi(x) \right\rangle \geqslant 0,$$

звідки випливає, що $g(x)\exp\{-\frac{q}{2a}x\}$ зростає за x. Таким чином, для достатньо великих x

$$g(x) \geqslant ce^{-\frac{q}{2a}x}, \qquad c > 0,$$

що суперечить пункту i) Припущення 2.1.

2) $a < 0$.

Тоді

$$\left\langle g(x)e^{-\frac{q}{2a}x}, \phi'(x) \right\rangle \geqslant 0 \Leftrightarrow \left\langle (g(x)e^{-\frac{q}{2a}x})', \phi(x) \right\rangle \leqslant 0,$$

звідки випливає, що $g(x)\exp\{-\frac{q}{2a}x\}$ спадає за x. Таким чином, для достатньо великих x

$$g(x) \leqslant ce^{-\frac{q}{2a}x}, \qquad c > 0,$$

що суперечить пункту ii) Припущення 2.1. Таким чином, ми одержали суперечність, що доводить непорожність області зупинки. $\square$

Зауважимо, що аналогічний результат був одержаний нами у [2] для $g \in C^1(\mathbf{R})$.

У випадку, коли броунівська компонента присутня, непорожність області оптимальної зупинки вдалося довести для опціону продажу в моделі Блека–Шоулза, виплаті за яким відповідає функція $g(x) = (K - e^x)^+$.

Теорема 3.2. *Нехай*

$$g(x) = (K - e^x)^+.$$

Тоді область зупинки є непорожньою.

Доведення. Для $x < \ln K$ функція $g(x)$ є двічі неперервно диференційовною, тому $A_q g(x)$ визначене у класичному сенсі та

$$A_q g(x) = ag'(x) + \frac{b^2}{2}g''(x) + \int_{\mathbf{R}} (g(x+y) - g(x))\,\nu(dy) - qg(x).$$

При $x \to -\infty$ має місце збіжність: $ag'(x) + \frac{b^2}{2}g''(x) \to 0$, $-qg(x) \to -qK < 0$. Оскільки $g(x+y) - g(x) \to 0$ при $x \to -\infty$, $|g(x+y) - g(x)| \leqslant K$ і $\nu(\mathbf{R}) < \infty$, то за теоремою про мажоровану збіжність

$$\int_{\mathbf{R}} (g(x+y) - g(x))\,\nu(dy) \to 0.$$

Отже, $\exists x_0 < \ln K\colon \forall x < x_0\ A^q g(x) < 0$, що доводить непорожність області зупинки згідно з теоремою 2.1. $\square$

3.2. **Порогова структура.** Розглянемо задачу оптимальної реалізації на нескінченному часовому інтервалі (тобто задачу оптимальної реалізації довічного Американського платіжного зобов'язання). Як і раніше, визначимо функцію вартості

$$V(x) = \sup_{\tau \in M} \mathsf{E}\left(g(X_\tau + x)e^{-q\tau}\right),$$

де супремум береться по множині моментів зупинки відносно $\{\mathcal{F}_t\}$. За умови

$$\mathsf{E}\left(\sup_{t \geq 0} g(X_t)e^{-qt}\right) < \infty$$

функція вартості є коректно визначеною, тобто виконано $V(x) < \infty$. У такому випадку оптимальним моментом зупинки є

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0 \colon X_t \in G_0\},$$

тобто момент першого потрапляння в область зупинки

$$G_0 = \{x \in \mathbf{R} \colon V(x) = g(x)\}.$$

Щодо функції g, припускатимемо наступне.

Припущення 3.1. *(i) Нехай $D = \{a_1, \ldots, a_n\}$, де $n \in \mathbf{N}$ і $a_1, \ldots, a_n$ — додатні дійсні числа, такі що $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Припустимо, що g неперервна на $\mathbf{R}$ і така, що g' і g'' існують та неперервні на $\mathbf{R} \setminus D$, і границі*

$$g'(a_i\pm) := \lim_{x \to a_i\pm} g'(x)$$

та

$$g''(a_i\pm) := \lim_{x \to a_i\pm} g''(x)$$

існують та скінченні.

(ii) Існує $C > 0$ і $p > 0$ такі, що для всіх $x \in \mathbf{R}$,

$$|g(x)| + |g'(x)| + |g''(x)| \leqslant C(1 + |x|^p).$$

Згідно з Припущенням 3.1, оператор $A_q g$ можна записати в наступному вигляді:

$$A_q g(x) = \left[a g'(x) + \frac{b^2}{2} g''(x)\right] \mathbf{1}_{\{x \notin D\}} + \int_{\mathbf{R}} \left(g(x+y) - g(x)\right) \nu(dy)$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} \Big(a\big(g'(a_i+) - g'(a_i-)\big) + \frac{b^2}{2}\big(g''(a_i+) - g''(a_i-)\big)\Big)\delta_{a_i} - q g(x),$$

де δ_{a_i} — міра Дірака, зосереджена в точці a_i.

Щоб довести основний результат цього розділу, нам знадобляться декілька допоміжних лем.

Лема 3.1. *Нехай g задовольняє Припущення 3.1. Тоді*

$$\mathsf{E}\left(\sup_{t \geqslant 0} g(X_t)e^{-qt}\right) < \infty.$$

Доведення. Без обмеження загальності припустимо, що $p \geqslant 1$. У статті [1] було доведено, що для будь-якого $T \geqslant 1$

$$\mathsf{E}\left[\sup_{t \in [0,T]} |X_t|^p\right] < C_1(T \wedge T^p) \leqslant C_1 T^p.$$

Тоді запишемо:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left[\sup_{t\geqslant 0} g(X_t)e^{-qt}\right] &\leqslant \mathsf{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{t\in[n-1,n]} g(X_t)e^{-qt}\right] \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} e^{-q(n-1)}\,\mathsf{E}\left[\sup_{t\in[0,n]}|g(X_t)|\right]\\ &\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} e^{-q(n-1)}\,\mathsf{E}\left[\sup_{t\in[0,n]}(1+|X_t|^p)\right]\\ &\leqslant CC_1\sum_{n=1}^{\infty} e^{-q(n-1)}(1+n^p)<\infty. \qquad\square\end{aligned}$$

Лема 3.2. *Нехай g задовольняє Припущення 3.1, причому для деякого x_0 виконано $g'(x_0+) > g'(x_0-)$. Тоді $V(x_0) > g(x_0)$.*

Доведення. За формулою Тейлора

$$g(x) = g(x_0) + (x-x_0)^+g'(x_0+) - (x-x_0)^-g'(x_0-) + (x-x_0)\varepsilon(x-x_0),$$

де $\lim_{y\to 0}\varepsilon(y) = 0$.

Нехай подія H_t полягає у тому, що процес X не має стрибків на $[0,t]$, $\overline{H_t} = \Omega\setminus H_t$. Тоді на множині H_t: $X_s = as+bW_s$, $s\in[0,t]$. Тому ми можемо записати за формулою Іто–Танака

$$g(X_t+x_0) = g(x_0) + \big(g'(x_0+) - g'(x_0-)\big)\frac{b^2}{2}L_t^0 + \int_0^t \theta_s\,dX_s + X_t\varepsilon(X_t),$$

де L_t^0 — локальний час процесу X в нулі на відрізку $[0,t]$,

$$\theta_s = g'(x_0+)\mathbf{1}_{\{X_s>0\}} - g'(x_0-)\mathbf{1}_{\{X_s<0\}}.$$

Звідси

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}(g(X_t+x_0))\\ &\quad= \mathsf{E}\left[\left(g(x_0) + \big(g'(x_0+) - g'(x_0-)\big)\frac{b^2}{2}L_t^0 + \int_0^t\theta_s dX_s + X_t\varepsilon(X_t)\right)\mathbf{1}_{H_t}\right] \qquad (5)\\ &\qquad+ \mathsf{E}[g(X_t+x_0)\mathbf{1}_{\overline{H_t}}].\end{aligned}$$

Тепер оцінимо окремо кожний доданок останньої рівності. За формулою Іто–Танака

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[L_t^0\mathbf{1}_{H_t}] &= \mathsf{E}\left[|X_t| - \left(\int_0^t \operatorname{sign} X_s\,dX_s\right)\mathbf{1}_{H_t}\right]\\ &= \mathsf{E}\left[|X_t| - \left(\int_0^t \operatorname{sign} X_s(a\,ds + b\,dW_s)\right)\mathbf{1}_{H_t}\right].\end{aligned}$$

Запишемо

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left[\int_0^t \operatorname{sign} X_s\,dW_s\mathbf{1}_{H_t}\right] &= \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left[\int_0^t \operatorname{sign} X_s\,dW_s\mathbf{1}_{H_t}\,\middle|\,\mu\right]\right]\\ &= \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left[\int_0^t \operatorname{sign} X_s\,dW_s\,\middle|\,\mu\right]\mathbf{1}_{H_t}\right]\\ &= \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left[\int_0^t \mathsf{E}[\operatorname{sign} X_s\mid\mu]\,dW_s\right]\mathbf{1}_{H_t}\right] = 0,\end{aligned}$$

де ми використали незалежність W та μ. Таким чином,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[L_t^0\mathbf{1}_{H_t}] &= \mathsf{E}\left[\left(|X_t| - \int_0^t a\operatorname{sign} X_s\,ds\right)\mathbf{1}_{H_t}\right]\\ &\geq \mathsf{E}[|at+bW_t|] - \mathsf{E}[|at+bW_t|\,\mathbf{1}_{\overline{H_t}}] - a\,\mathsf{E}\left[\int_0^t \operatorname{sign} X_s ds\mathbf{1}_{H_t}\right]\\ &\geqslant \mathsf{E}[|at+bW_t|] - \mathsf{E}\big[|at+bW_t|^2\big]^{1/2}\mathsf{P}(\overline{H_t})^{1/2} - at \geqslant b\sqrt{t} + o(\sqrt{t}), \qquad t\to 0.\end{aligned}$$

Тут ми використали нерівність Коші–Буняковського і властивість процесу Леві: $\mathsf{P}(\overline{H_t}) = O(t)$, $t\to 0$. Далі,

$$\mathsf{E}\left[\int_0^t \theta_s\,dX_s\mathbf{1}_{H_t}\right] = \mathsf{E}\left[\int_0^t \theta_s(a\,ds + b\,dW_s)\mathbf{1}_{H_t}\right].$$

Як і вище, маємо:

$$\mathsf{E}\left[\int_0^t \theta_s dW_s\mathbf{1}_{H_t}\right] = 0.$$

З іншого боку,

$$\left|\mathsf{E}\left[\int_0^t \theta_s ds\mathbf{1}_{H_t}\right]\right| \leqslant |a|\,\mathsf{E}\left[\int_0^t |\theta_s|ds\right] \leqslant |a|\,\mathsf{E}\int_0^t C\,ds = Cat = o(\sqrt{t}).$$

Наступний доданок у (5) оцінимо, використовуючи незалежність W та μ та властивість $\varepsilon(x) = o(x)$, $x\to 0$:

$$\begin{aligned}|\mathsf{E}[X_t\varepsilon(X_t)\mathbf{1}_{H_t}]| &= |\mathsf{E}[(at+bW_t)\varepsilon(at+bW_t)\mathbf{1}_{H_t}]|\\ &= |\mathsf{E}[(at+bW_t)\varepsilon(at+bW_t)]\,\mathsf{E}[\mathbf{1}_{H_t}]| \leqslant |\mathsf{E}[(at+bW_t)\varepsilon(at+bW_t)]|\\ &= o(\sqrt{t}), \qquad t\to 0.\end{aligned}$$

Нарешті, використовуючи нерівність Гельдера, оцінимо останній доданок (5):

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[g(X_t+x_0)\mathbf{1}_{\bar{H}_t}] &\leqslant (\mathsf{E}\,|g(X_t+x_0)|^4)^{1/4}\mathsf{P}(\overline{H_t})^{3/4}\\ &\leqslant C\big(\,\mathsf{E}\,[1+|X_t+x_0|^p]^4\big)^{1/4}\mathsf{P}(\overline{H_t})^{3/4} \leqslant (C_1 + C_2(p)t^{4p})^{1/4}O(t^{3/4})\\ &= o(\sqrt{t}), \qquad t\to 0.\end{aligned}$$

Остаточно маємо $\mathsf{E}(g(X_t+x_0)) = g(x_0) + b\sqrt{t} + o(\sqrt{t})$, $t\to 0$. Враховуючи, що $e^{-qt} = 1 + O(t)$, $t\to 0$, для достатньо малих t одержимо

$$\mathsf{E}(e^{-qt}g(X_t+x_0)) > g(x_0),$$

що і потрібно було довести. □

Лема 3.3. *Припустимо, що $x_0 \in G_0$ і що g — функція виплат, що задовольняє припущення 3.1. Якщо $A_q g$ — недодатна міра на відкритому інтервалі (x_0,∞), то G_0 містить інтервал (x_0,∞).*

Доведення. Доведення повністю аналогічне наведеному в [7, лема 4.2]. □

З наведених лем основний результат цього розділу може бути одержаний так само, як [7, теорема 4.1].

Теорема 3.3. *Нехай g — додатна функція виплат, що задовольняє Припущення 3.1, і нехай існує таке x_1, що $A_q g$ — ненульова додатна міра на інтервалі $(0,x_1)$ і недодатна міра на (x_1,∞). Тоді $G = [x^*,\infty)$ з $x^* \geqslant x_1$. Більше того, момент досягнення процесом X рівня x^* є оптимальним моментом зупинки.*

4. Висновки

У даній статті розглянуто задачу оптимальної реалізації платіжного зобов'язання Американського типу у моделі Леві, та дано умови, за яких область зупинки є непорожньою та має порогову структуру.

Література

1. А. Мороз, Г. Шевченко, *Асимптотична поведінка функції вартості Америкнського опціону у моделі Леві при необмеженому розширенні часового інтервалу*, Вісн. Київського ун-ту. Математика. Механіка **24** (2010), 39–43.
2. А. Мороз, Г. Шевченко, *Структура області зупинки в моделі Леві*, Теор. ймовір. мат. стат. **84** (2011), 102–110.
3. A. Kukush, Yu. Mishura, ans G. Shevchenko, *On reselling of European option*, Theory Stoch. Proc. **12(28)** (2006), no. 1–2, 75–87.
4. D. Lamberton and M. Mikou, *The critical price for the American put in an exponential Levy model*, Finance Stoch. **12** (2008), no. 4, 561–581.
5. P. E. Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2004.
6. S. Villeneuve, *Exercise regions of American Options on several assets*, Finance Stoch. **3** (1999), no. 3, 295–322.
7. S. Villeneuve, *On threshold strategies and the smooth fit principle for optimal stopping problems*, Appl. Prob. **44** (2007), no. 1, 181–198.

Кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: mag-87@inbox.ru

Надійшла 19/09/2012