Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 88, 2013, стор. 135–143

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 88, 2013, pp. 135–143

ВЕЛИКІ ВІДХИЛЕННЯ ДЛЯ ІМПУЛЬСНИХ ПРОЦЕСІВ В СХЕМІ АПРОКСИМАЦІЇ ЛЕВІ

УДК 519.21

І. В. САМОЙЛЕНКО

Анотація. В роботі проведено асимптотичний аналіз проблеми великих відхилень для імпульсних процесів в схемі апроксимації Леві. Великі відхилення для імпульсних процесів в схемі апроксимації Леві визначаються експоненційним генератором для стрибкового процесу з незалежними приростами.

Abstract. Asymptotic analysis of large deviation problem for impulsive processes in the scheme of Lévy approximation is realized. Large deviations for random evolutions in the scheme of Lévy approximation are defined by exponential generator for jump process with independent increments.

Аннотация. В работе проведен асимптотический анализ проблемы больших уклонений для импульсных процессов в схеме аппроксимации Леви. Большие уклонения для случайных эволюций в схеме аппроксимации Леви задаются экспоненциальным генератором для скачкообразного процесса с независимыми приращениями.

1. Вступ

В роботі проведено асимптотичний аналіз проблеми великих відхилень для імпульсних процесів в схемі апроксимації Леві (див. [7, Ch. 9]).

Асимптотичний аналіз імпульсних процесів в схемі апроксимації Леві проведено в роботах [8, 9].

В монографії [2] для дослідження проблеми великих відхилень розвинуто ефективний метод, побудований на теорії збіжності експоненційних (нелінійних) операторів. В роботах [5, 6] експоненційний оператор в схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$, має вигляд:

$$\mathbb{H}^\varepsilon \varphi(x) := e^{-\varphi(x)/\varepsilon} \varepsilon \mathbb{L}^\varepsilon e^{\varphi(x)/\varepsilon},$$

де оператори $\mathbb{L}^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, що визначають марковські процеси $x^\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, $\varepsilon > 0$, в схемі серій.

Імпульсні процеси (див. [7, Ch. 2]) задаються співвідношенням

$$\xi(t) = \xi_0 + \sum_{k=1}^{\nu(t)} \alpha_k(x_{k-1}), \qquad t \geq 0,\ \xi_0 \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Тут випадкові величини $\alpha_k(x)$, $k \geq 1$, $x \in E$, є незалежними та однаково розподіленими з функцією розподілу

$$G_x(dv) = \mathsf{P}(\alpha_k(x) \in dv).$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60J55, 60B10, 60F17, 60K10; Secondary 60G46, 60G60.

Ключові слова і фрази. Великі відхилення, імпульсний процес, апроксимація Леві, експоненційний нелінійний оператор.

Автор висловлює щиру подяку академіку НАН України В. С. Королюку за постановку задачі та постійну увагу до її реалізації.

Перемикаючим процесом $x(t)$, $t \geq 0$, є марковський процес стрибків на стандартному фазовому просторі станів $(\mathcal{E}, E)$. Нехай цей процес визначається генератором

$$Q\varphi(x) = q(x) \int_{\mathbb{E}} [\varphi(y) - \varphi(x)]\, P(x, dy), \qquad x \in E. \tag{2}$$

Напівмарковське ядро

$$Q(x, B, t) = P(x, B) \left(1 - e^{-q(x)t}\right), \qquad x \in E,\ B \in \mathcal{E},\ t \geq 0,$$

визначає асоційований марковський процес відновлення (x_k, τ_k), $k \geq 0$, де x_k, $k \geq 0$ це вкладений ланцюг Маркова, заданий стохастичним ядром

$$P(x, B) = \mathsf{P}(x_{k+1} \in B \mid x_k = x),$$

а τ_k, $k \geq 0$, це точковий процес моментів стрибків, який визначається функцією розподілу часу перебування $\theta_{k+1} = \tau_{k+1} - \tau_k$, $k \geq 0$,

$$\mathsf{P}(\theta_{k+1} \leq t \mid x_k = x) = 1 - e^{-q(x)t}.$$

Нарешті рахуючий процес стрибків $\nu(t) = \max\{k\colon \tau_k \leq t\}$.

Основним припущенням щодо перемикаючого марковського процесу є умова

C1: Марковський процес $x(t)$, $t \geq 0$, равномірно ергодичний зі стаціонарним розподілом $\pi(A)$, $A \in \mathcal{E}$.

Зауваження 1.1. Якщо $x(t)$, $t \geq 0$, має стаціонарний розподіл $\pi(x)$, то x_n, $n \geq 1$, також має стаціонарний розподіл $\rho(x)$ та мають місце співвідношення

$$\pi(dx)q(x) = q\,\rho(dx), \qquad q := \int_E \pi(dx)q(x).$$

Позначимо через Π проектор на підпростір нулів зведено-оборотного оператора Q, означеного в (2):

$$\Pi\varphi(x) = \int_E \pi(dx)\varphi(x).$$

Виконується наступне співвідношення

$$Q\Pi = \Pi Q = 0.$$

Потенціал R_0 має властивість [7, ch. 1]:

$$QR_0 = R_0 Q = \Pi - I.$$

Зауваження 1.2. З останнього співвідношення випливає, що за умови розв'язності

$$\Pi\psi = 0$$

рівняння Пуасона

$$Q\varphi = \psi$$

має єдиний розв'язок

$$\varphi = R_0\psi,$$

при $\Pi\varphi = 0$.

Імпульсний процес (1) характеризуєтся генератором двохкомпонентного марковського процесу $\xi(t)$, $x(t)$, $t \geq 0$ (див. [7, Ch. 2])

$$\mathbb{L}\varphi(u, x) = q(x) \int_E P(x, dy) \int_{\mathbb{R}} G_y(dv)[\varphi(u + v, y) - \varphi(u, x)]$$

Зауваження 1.3. Остінній генератор можна переписати у вигляді

$$\mathbb{L}\varphi(u,x) = [Q + Q_0 G_x]\varphi(u,x),$$

де

$$Q_0\varphi(x) := q(x)\int_E P(x,dy)\varphi(y),$$
$$G_x\varphi(u) := \int_{\mathbb{R}} G_x(dv)[\varphi(u+v) - \varphi(u)].$$

Зауваження 1.4. Дослідження граничних властивостей марковських процесів базується на мартингальній харатеризації таких процесів, а саме розглядаються мартингали

$$\mu_t = \varphi(x(t)) - \varphi(x(0)) - \int_0^t \mathbb{L}\varphi(x(s))\,ds, \tag{3}$$

де $\mathbb{L}$ — генератор, що визначає марковський процес $x(t)$, $t \geq 0$, на стандартному фазовому просторі $(E, \mathcal{E})$, має щільну область визначення $\mathcal{D}(\mathbb{L}) \subseteq \mathcal{B}_E$, яка містить неперервні разом зі своїми похідними функції. Тут $\mathcal{B}_E$ — банахів простір дійснозначних обмежених тест-функцій $\varphi(x) \in E$, з нормою: $\|\varphi\| := \sup_{x\in E}|\varphi(x)|$.

Теорія великих відхилень базується на використанні експоненційної мартингальної характеризації (див. [2, Ch.1]):

$$\widetilde{\mu}_t = \exp\left\{\varphi(x(t)) - \varphi(x(0)) - \int_0^t \mathbb{H}\varphi(x(s))\,ds\right\} \tag{4}$$

є мартингалом.

Тут експоненційний нелінійний оператор

$$\mathbb{H}\varphi(x) := e^{-\varphi(x)}\mathbb{L}e^{\varphi(x)}, \qquad \varphi(x) \in \mathcal{B}_E.$$

Еквівілентність співвідношень (3) та (4) випливає з наступного:

Твердження 1 ([1, с.66])**.**

$$\mu(t) = x(t) - \int_0^t y(s)\,ds$$

є мартингалом тоді і тільки тоді, коли

$$\widetilde{\mu}(t) = x(t) exp\left\{-\int_0^t \frac{y(s)}{x(s)}\,ds\right\}$$

є мартингал.

Зауваження 1.5. Проблема великих відхилень, як правило, реалізується в 4 етапи [2, Ch.2]:

1) Обчислення граничного експоненційного (нелінійного) оператора, що визначає великі відхилення.
2) Визначення експоненційної компактності.
3) Визначення принципу порівняння для граничного оператора.
4) Конструкція варіаційного представлення функціоналу дії, що визначає великих відхилень.

Етапи 2)–4) для експоненційного генератора що відповідає різним типам випадкових блукань реалізовано в монографії [2].

Класичним підходом до розв'язання проблеми великих відхилень є використання кумулянти процесу [3]. Зв'язок між кумулянтою та експоненційним генератором описано, наприклад, в [10].

Нормування імпульсного процесу (1) малим параметром серії для розв'язання проблеми великих відхилень в схемі апроксимації Леві реалізується з використанням двох малих параметрів $\varepsilon, \delta \to 0$ таких що $\varepsilon^{-1}\delta \to 1$:

$$\xi^{\varepsilon,\delta}(t) = \xi_0^{\varepsilon,\delta} + \varepsilon \sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon^3)} \alpha_k^\delta(x_{k-1}), \qquad t \ge 0,$$

$$\mathbb{L}^{\varepsilon,\delta}\varphi(u,x) = \varepsilon^{-3} q(x) \int_E P(x,dy) \int_{\mathbb{R}} G_y^\delta(dv)[\varphi(u+\varepsilon v, y) - \varphi(u,x)],$$

де ядро $G_x^\delta(v)$ задовольняє умовам апроксимації Леві.

2. Основні умови апроксимації Леві

C2: *Апроксимація Леві.* Сім'я процесів $\alpha_k^\delta(x)$, $k \ge 1$, $x \in E$, $t \ge 0$, задовольняє умови апроксимації Леві:

LA1: Апроксимация середніх:

$$a_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}} v\, G_x^\delta(dv) = \delta a_1(x) + \delta^2 \left[a(x) + \theta_a^\delta(x)\right],$$

та

$$c_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}} v^2\, G_x^\delta(dv) = \delta^2 \left[c(x) + \theta_c^\delta(x)\right],$$

де

$$\sup_{x\in E} |a_1(x)| \le a < +\infty, \qquad \sup_{x\in E} |a(x)| \le a < +\infty, \sup_{x\in E} |c(x)| \le c < +\infty.$$

LA2: Для ядра інтенсивностей має місце асимптотичне представлення

$$G_{g,x}^\delta = \int_{\mathbb{R}} g(v)\, G_x^\delta(dv) = \delta^2 \left[G_{g,x} + \theta_g^\delta(x)\right]$$

для всіх $g \in C_3(\mathbb{R})$ — класу функцій, що визначає міру (див. [4, Ch.7]), $G_{g,x}$ обмежене ядро

$$|G_{g,x}| \le G_g \quad \text{(константа залежна від } g\text{)}.$$

Ядро $G_x^0(dv)$ задано на класі функцій, що визначає міру $C_3(\mathbb{R})$ співвідношенням

$$G_{g,x} = \int_{\mathbb{R}} g(v)\, G_x^0(dv), \qquad g \in C_3(\mathbb{R}).$$

Знехтувально малі доданки θ_a^δ, θ_c^δ, θ_g^δ задовольняють умову

$$\sup_{x\in E} |\theta_\cdot^\delta(x)| \to 0, \qquad \delta \to 0.$$

LA3: Умова балансу

$$q \int_E \rho(dx) a_1(x) = 0.$$

C3: *Рівномірна квадратична інтегровність*:

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{x\in E} \int_{|v|>c} v^2\, G_x^0(dv) = 0.$$

C4: *Експоненційна обмеженість*:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{p|v|}\, G_x^\delta(dv) < \infty, \qquad \forall p \in \mathbb{R}.$$

3. Основний результат

Теорема 3.1. *Розв'язання проблеми великих відхилень для імпульсного процесу*

$$\xi^{\varepsilon,\delta}(t) = \xi_0^{\varepsilon,\delta} + \varepsilon \sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon^3)} \alpha_k^\delta(x_{k-1}), \qquad t \geq 0,$$

заданого генератором двохкомпонентного марковського процесу $\xi^{\varepsilon,\delta}(t)$, $x(t/\varepsilon^3)$, $t \geq 0$

$$\mathbb{L}^{\varepsilon,\delta}\varphi(u,x) = \varepsilon^{-3}q(x)\int_E P(x,dy)\int_{\mathbb{R}} G_y^\delta(dv)[\varphi(u+\varepsilon v, y) - \varphi(u,x)],$$

або

$$\mathbb{L}^{\varepsilon,\delta}\varphi(u,x) = \left[\varepsilon^{-3}Q + Q_0 G_x^{\varepsilon,\delta}\right]\varphi(u,x), \tag{5}$$

де

$$G_x^{\varepsilon,\delta}\varphi(u) := \varepsilon^{-3}\int_{\mathbb{R}} G_x^\delta(dv)[\varphi(u+\varepsilon v) - \varphi(u)] \tag{6}$$

визначається експоненційним генератором

$$H^0\varphi(u) = (\widetilde{a} - \widetilde{a}_0)\varphi'(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)(\varphi'(u))^2 + \int_{\mathbb{R}}\left[e^{v\varphi'(u)} - 1\right]\widetilde{G}^0(dv), \tag{7}$$

де

$$\widetilde{a} = \Pi a(x) := q\int_E \rho(dx)a(x), \qquad \widetilde{a}_0 = \Pi a_0(x) := q\int_E \rho(dx)a_0(x),$$
$$a_0(x) = \int_{\mathbb{R}} vG^0(dv), \qquad \widetilde{c} = \Pi c(x) := q\int_E \rho(dx)c(x),$$
$$\widetilde{c}_0 = \Pi c_0(x) := q\int_E \rho(dx)c_0(x), \qquad c_0(x) = \int_{\mathbf{R}} v^2G^0(dv),$$
$$\sigma^2 = (\widetilde{c} - \widetilde{c}_0) + 2q\int_E \rho(dx)a_1(x)R_0a_1(x), \qquad \widetilde{G}^0(v) = \Pi G^0(v) := q\int_E \rho(dx)G^0(v).$$

Усереднення проводиться по стаціонарній мірі вкладеного ланцюга Маркова перемикаючого марковського процесу.

Зауваження 3.1. Граничний генератор в Евклідовому просторі $\mathbb{R}^d$, $d > 1$, має наступний вигляд:

$$H^0\varphi(u) = \sum_{k=1}^d(\widetilde{a}_k - \widetilde{a}_k^0)\varphi_k' + \frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^d \sigma_{k,r}\varphi_k'\varphi_r' + \int_{\mathbb{R}^d}\left[e^{v\varphi'(u)} - 1\right]\widetilde{G}^0(dv),$$
$$\varphi_k' := \partial\varphi(u)/\partial u_k, \qquad 1 \leq k \leq d.$$

Тут $\sigma^2 = [\sigma_{kr}; 1 \leq k, r \leq d]$ — варіаційна матриця.

Більше того, останній експоненційний генератор можна розширити на простір абсолютно неперервних функцій (див. [2])

$$C_b^1(\mathbb{R}^d) = \left\{\varphi\colon \exists \lim_{|u|\to\infty}\varphi(u) = \varphi(\infty),\ \lim_{|u|\to\infty}\varphi'(u) = 0\right\}.$$

Доведення. Граничний перехід для експоненційного нелінійного генератора реалізується на тест-функціях

$$\varphi_\varepsilon^\delta(u,x) = \varphi(u) + \varepsilon\ln[1 + \delta\varphi_1(u,x) + \delta^2\varphi_2(u,x)],$$

де $\varphi(u) \in C^3(\mathbb{R})$ (простір неперервних обмежених функцій з неперервними обмеженими похідними до третього порядку включно). Враховуючи вигляд генератора (5), маємо

$$\begin{aligned}\mathbb{H}^{\varepsilon,\delta}\varphi_\varepsilon^\delta &= e^{-\varphi_\varepsilon^\delta/\varepsilon}\varepsilon\mathbb{L}^{\varepsilon,\delta}e^{\varphi_\varepsilon^\delta/\varepsilon} = e^{-\varphi_\varepsilon^\delta/\varepsilon}\left[\varepsilon^{-2}Q + \varepsilon Q_0 G_x^{\varepsilon,\delta}\right]e^{\varphi_\varepsilon^\delta/\varepsilon}\\ &= e^{-\varphi/\varepsilon}\left[1+\delta\varphi_1+\delta^2\varphi_2\right]^{-1}\left[\varepsilon^{-2}Q+\varepsilon Q_0 G_x^{\varepsilon,\delta}\right]e^{\varphi/\varepsilon}\left[1+\delta\varphi_1+\delta^2\varphi_2\right].\end{aligned}$$

Для подальшого доведення теореми нам знадобляться наступні леми.

Лема 3.1. *Експоненційний генератор*

$$H_Q^\varepsilon\varphi_\varepsilon^\delta(u,x) = e^{-\varphi_\varepsilon^\delta/\varepsilon}\varepsilon^{-2}Qe^{\varphi_\varepsilon^\delta/\varepsilon} \tag{8}$$

має наступне асимптотичне представлення

$$H_Q^\varepsilon\varphi_\varepsilon^\delta = \varepsilon^{-1}Q\varphi_1 + Q\varphi_2 - \varphi_1 Q\varphi_1 + \theta_Q^{\varepsilon,\delta}(x), \tag{9}$$

де $\sup_{x\in E}\left|\theta_Q^{\varepsilon,\delta}(x)\right| \to 0$, $\varepsilon,\delta\to 0$.

Доведення. Маємо:

$$\begin{aligned}H_Q^\varepsilon\varphi_\varepsilon^\delta &= e^{-\varphi/\varepsilon}\left[1+\delta\varphi_1+\delta^2\varphi_2\right]^{-1}\varepsilon^{-2}Qe^{\varphi/\varepsilon}\left[1+\delta\varphi_1+\delta^2\varphi_2\right]\\ &= \left[1-\delta\varphi_1+\delta^2\frac{\varphi_1^2+\delta\varphi_1\varphi_2-\varphi_2}{1+\delta\varphi_1+\delta^2\varphi_2}\right]\left[\delta\varepsilon^{-2}Q\varphi_1+\delta^2\varepsilon^{-2}Q\varphi_2\right]\\ &= \delta\varepsilon^{-2}Q\varphi_1+\delta^2\varepsilon^{-2}Q\varphi_2-\delta^2\varepsilon^{-2}\varphi_1Q\varphi_1+\theta_Q^{\varepsilon,\delta}(x),\end{aligned}$$

де

$$\theta_Q^{\varepsilon,\delta}(x) = \delta^3\varepsilon^{-2}\frac{\varphi_1^2+\delta\varphi_1\varphi_2-\varphi_2}{1+\delta\varphi_1+\delta^2\varphi_2}[Q\varphi_1+\delta Q\varphi_2]-\delta^3\varepsilon^{-2}\varphi_1Q\varphi_2.$$

Завдяки граничній умові $\varepsilon^{-1}\delta\to 1$, $\varepsilon,\delta\to 0$, остаточно отримаємо (9).

Лему доведено. □

Лема 3.2. *Експоненційний генератор*

$$H_G^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi_\varepsilon^\delta(u,x) = e^{-\varphi_\varepsilon^\delta/\varepsilon}\varepsilon Q_0 G_x^{\varepsilon,\delta}e^{\varphi_\varepsilon^\delta/\varepsilon} \tag{10}$$

має наступне асимптотичне представлення

$$H_G^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi_\varepsilon^\delta = H_G(x)\varphi(u)+\varepsilon^{-1}a_1(x)\varphi'(u)+\theta_G^{\varepsilon,\delta}(x),$$

де

$$\begin{aligned}H_G(x)\varphi(u) &= Q_0\mathcal{H}_G(x)\\ &:= Q_0\Bigg[(a(x)-a_0(x))\varphi'(u)+\frac{1}{2}(c(x)-c_0(x))(\varphi'(u))^2\\ &\qquad + \int_{\mathbb{R}}\left[e^{v\varphi'(u)}-1\right]G^0(dv)\Bigg],\end{aligned} \tag{11}$$

та $\sup_{x\in E}|\theta_G^{\varepsilon,\delta}(x)|\to 0$, $\varepsilon,\delta\to 0$.

Доведення. Маємо:

$$\begin{aligned}H_G^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi_\varepsilon^\delta &= e^{-\varphi/\varepsilon}\left[1+\delta\varphi_1+\delta^2\varphi_2\right]^{-1}\varepsilon Q_0G_x^{\varepsilon,\delta}e^{\varphi/\varepsilon}\left[1+\delta\varphi_1+\delta^2\varphi_2\right]\\ &= e^{-\varphi/\varepsilon}\left[1-\delta\varphi_1+\delta^2\frac{\varphi_1^2+\delta\varphi_1\varphi_2-\varphi_2}{1+\delta\varphi_1+\delta^2\varphi_2}\right]\\ &\quad\times\left[\varepsilon Q_0G_x^{\varepsilon,\delta}e^{\varphi/\varepsilon}+\varepsilon\delta Q_0G_x^{\varepsilon,\delta}e^{\varphi/\varepsilon}\varphi_1+\varepsilon\delta^2Q_0G_x^{\varepsilon,\delta}e^{\varphi/\varepsilon}\varphi_2\right]\\ &= H_G^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u)+e^{-\varphi/\varepsilon}\varepsilon\delta\left[Q_0G_x^{\varepsilon,\delta}e^{\varphi/\varepsilon}\varphi_1-\varphi_1Q_0G_x^{\varepsilon,\delta}e^{\varphi/\varepsilon}\right]+\widetilde{\theta}_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x),\end{aligned} \tag{12}$$

де

$$\begin{aligned}\widetilde{\theta}_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x) &= \varepsilon\delta^2 \left[e^{-\varphi/\varepsilon} Q_0 G_x^{\varepsilon,\delta} e^{\varphi/\varepsilon}\varphi_2 - e^{-\varphi/\varepsilon}\varphi_1 Q_0 G_x^{\varepsilon,\delta} e^{\varphi/\varepsilon}\varphi_1\right] \\ &\quad + \varepsilon\delta^2 \frac{\varphi_1^2 + \delta\varphi_1\varphi_2 - \varphi_2}{1+\delta\varphi_1+\delta^2\varphi_2} \\ &\qquad \times \left[e^{-\varphi/\varepsilon} Q_0 G_x^{\varepsilon,\delta} e^{\varphi/\varepsilon} + e^{-\varphi/\varepsilon}\delta Q_0 G_x^{\varepsilon,\delta} e^{\varphi/\varepsilon}\varphi_1 + e^{-\varphi/\varepsilon}\delta^2 Q_0 G_x^{\varepsilon,\delta} e^{\varphi/\varepsilon}\varphi_2\right] \\ &\quad - \varepsilon\delta^3 e^{-\varphi/\varepsilon}\varphi_1 Q_0 G_x^{\varepsilon,\delta} e^{\varphi/\varepsilon}\varphi_2.\end{aligned}$$

Для завершення доведення використаємо наступні два твердження.

Лема 3.3.

$$Q_0 G_x^{\varepsilon,\delta} e^{\varphi(u)/\varepsilon}\varphi_1(u,x) = \varphi_1(u,x) Q_0 G_x^{\varepsilon,\delta} e^{\varphi(u)/\varepsilon} + (\varepsilon\delta)^{-1}\widehat{\theta}_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x),$$

де знехтувальний доданок

$$\sup_{x\in E}\left|\widehat{\theta}_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)\right| \to 0, \qquad \varepsilon,\delta\to 0.$$

Доведення. Дійсно, згідно (6) маємо:

$$\begin{aligned}&Q_0 G_x^{\varepsilon,\delta} e^{\varphi(u)/\varepsilon}\varphi_1(u,x) \\ &\quad = \varepsilon^{-3} Q_0 \int_{\mathbb{R}} \left[e^{\varphi(u+\varepsilon v)/\varepsilon}\varphi_1(u+\varepsilon v, x) - e^{\varphi(u)/\varepsilon}\varphi_1(u,x)\right] G_x^\delta(dv) \\ &\quad = \varphi_1(u,x) Q_0 G_x^{\varepsilon,\delta} e^{\varphi(u)/\varepsilon} + (\varepsilon\delta)^{-1}\left[\varphi_1'(u,x)\varepsilon^{-1}\delta \int_{\mathbb{R}} e^{\varphi(u+\varepsilon v)/\varepsilon} v\, G_x^\delta(dv)\right].\end{aligned}$$

Оцінимо останній інтеграл. Оскільки функція $\varphi(u)$ обмежена, маємо для кожного фіксованого ε:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\varphi(u+\varepsilon v)/\varepsilon} v\, G_x^\delta(dv) < e^C \int_{\mathbb{R}} v\, G_x^\delta(dv) = \delta e^C \left[a_1(x) + \delta a(x) + \delta\theta_a^\delta(x)\right].$$

Таким чином, бачимо, що останній доданок є знехтувальним при умові $\varepsilon,\delta\to 0$. Лему 3.3 доведено. □

Лема 3.4. *Експоненційний генератор*

$$H_G^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) = e^{-\varphi/\varepsilon}\varepsilon Q_0 G_x^{\varepsilon,\delta} e^{\varphi/\varepsilon} \tag{13}$$

має наступне асимптотичне представлення

$$H_G^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) = H_G(x)\varphi(u) + \varepsilon^{-1}a_1(x)\varphi'(u) + \theta^{\varepsilon,\delta}(x),$$

де $\sup_{x\in E}|\theta^{\varepsilon,\delta}(x)| \to 0$, $\varepsilon,\delta\to 0$.

Доведення. Перепишемо (13), враховуючи вигляд генератора (6). Маємо:

$$H_G^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) = \varepsilon^{-2} Q_0 \int_{\mathbb{R}} \left[e^{\Delta_\varepsilon\varphi(u)} - 1\right] G_x^\delta(dv),$$

де

$$\Delta_\varepsilon\varphi(u) := \varepsilon^{-1}[\varphi(u+\varepsilon v) - \varphi(u)].$$

Перепишемо вираз для генератора наступним чином:

$$\begin{aligned}H_G^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) &= \varepsilon^{-2} Q_0 \int_{\mathbb{R}} \left[e^{\Delta_\varepsilon\varphi(u)} - 1 - \Delta_\varepsilon\varphi(u) - \frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon\varphi(u))^2\right] G_x^\delta(dv) \\ &\quad + \varepsilon^{-2} Q_0 \int_{\mathbb{R}} \left[\Delta_\varepsilon\varphi(u) + \frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon\varphi(u))^2\right] G_x^\delta(dv).\end{aligned}$$

Легко бачити, що функція $\psi_u^\varepsilon(v) = e^{\Delta_\varepsilon \varphi(u)} - 1 - \Delta_\varepsilon \varphi(u) - \frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon \varphi(u))^2$ належить класу $C_3(\mathbb{R})$. Дійсно,

$$\psi_u^\varepsilon(v)/v^2 \to 0, \qquad v \to 0.$$

Крім того, ця функція неперервна і обмежена для кожного ε за умови обмеженості функції $\varphi(u)$. Більше того, обмеженість функції $\psi_u^\varepsilon(v)$ є рівномірною по u за умов **C3, C4** та обмеженості похідної $\varphi'(u)$.

Таким чином, маємо:

$$\begin{aligned} H_G^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) &= \varepsilon^{-2}\delta^2 Q_0 \int_{\mathbb{R}} \left[e^{\Delta_\varepsilon \varphi(u)} - 1 - \Delta_\varepsilon \varphi(u) - \frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon \varphi(u))^2 \right] G_x^0(dv) \\ &+ \varepsilon^{-2} Q_0 \int_{\mathbb{R}} \left[\Delta_\varepsilon \varphi(u) - v\varphi'(u) - \varepsilon \frac{v^2}{2} \varphi''(u) \right] G_x^\delta(dv) \\ &+ \varepsilon^{-2}\delta Q_0 a_1(x)\varphi'(u) + \varepsilon^{-2}\delta^2 Q_0 a(x)\varphi'(u) + \varepsilon^{-1}\delta^2 Q_0 c(x)\varphi''(u) \\ &+ \varepsilon^{-2} Q_0 \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon \varphi(u))^2 - \frac{v^2}{2}(\varphi'(u))^2 \right] G_x^\delta(dv) \\ &+ \varepsilon^{-2}\delta^2 \frac{1}{2} Q_0 c(x)(\varphi'(u))^2. \end{aligned}$$

Застосовуючи формулу Тейлора до тест-функцій $\varphi(u) \in C^3(\mathbb{R})$, та умову **LA2** отримаємо:

$$\begin{aligned} H_G^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) &= \varepsilon^{-2}\delta^2 Q_0 \int_{\mathbb{R}} \left[e^{v\varphi'(u)} - 1 - v\varphi'(u) - \frac{v^2}{2}(\varphi'(u))^2 \right] G_x^0(dv) \\ &+ \varepsilon^{-2}\delta^2 Q_0 \int_{\mathbb{R}} \left(e^{v\varphi'(u)} \varepsilon \frac{v^2}{2} \varphi''(\widetilde{u}) - \varepsilon \frac{v^2}{2} \varphi''(\widetilde{u}) - \varepsilon^2 \frac{v^4}{8} (\varphi''(\widetilde{u}))^2 \right) G_x^0(dv) \\ &+ \varepsilon^{-2}\delta^2 Q_0 \int_{\mathbb{R}} \varepsilon^2 \frac{v^3}{3!} \varphi'''(\widetilde{u})\, G_x^0(dv) \\ &+ \varepsilon^{-2}\delta Q_0 a_1(x)\varphi'(u) + \varepsilon^{-2}\delta^2 Q_0 a(x)\varphi'(u) + \varepsilon^{-1}\delta^2 Q_0 c(x)\varphi''(u) \\ &+ \varepsilon^{-2}\delta^2 Q_0 \int_{\mathbb{R}} \varepsilon^2 \frac{v^4}{4} (\varphi''(\widetilde{u}))^2\, G_x^0(dv) + \varepsilon^{-2}\delta^2 \frac{1}{2} Q_0 c(x)(\varphi'(u))^2. \end{aligned}$$

Враховуючи граничну умову $\varepsilon^{-1}\delta \to 1$, остаточно маємо:

$$H_G^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) = H_G(x)\varphi(u) + \theta_G^{\varepsilon,\delta}(x),$$

де $\sup_{x\in E} |\theta_G^{\varepsilon,\delta}(x)| \to 0$, $\varepsilon, \delta \to 0$.

Лему 3.4 доведено. □

Застосування співвідношень, отриманих в Лемах 3.3 та 3.4 до формули (12) остаточно завершує доведення Леми 3.2.

Лему 3.2 доведено. □

З формул (8) та (10) бачимо

$$\mathbb{H}^{\varepsilon,\delta}\varphi_\varepsilon^\delta = H_Q^\varepsilon \varphi_\varepsilon^\delta(u,x) + H_G^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi_\varepsilon^\delta(u,x)$$

Таким чином, з Лем 3.1 та 3.2 отримаємо асимптотичне представлення

$$\mathbb{H}^{\varepsilon,\delta}\varphi_\varepsilon^\delta = \varepsilon^{-1}[Q\varphi_1 + a_1(x)\varphi'(u)] + Q\varphi_2 - \varphi_1 Q\varphi_1 + H_G(x)\varphi(u) + h^{\varepsilon,\delta}(x),$$

де $h^{\varepsilon,\delta}(x) = \theta_Q^{\varepsilon,\delta}(x) + \theta_G^{\varepsilon,\delta}(x)$.

Тепер ми можемо застосувати розв'язання задачі сингулярного збурення для зведено-оборотного оператора Q (див. [7, Ch. 1])

$$\begin{gathered} Q\varphi_1 + a_1(x)\varphi'(u) = 0, \\ Q\varphi_2 - \varphi_1 Q\varphi_1 + H_G(x)\varphi(u) = H^0\varphi(u). \end{gathered}$$

Завдяки умові балансу **LA3** маємо з першого рівняння:

$$Q\varphi_1(u,x) = -a_1(x)\varphi'(u), \qquad \varphi_1(u,x) = R_0 a_1(x)\varphi'(u).$$

Після підстановки у друге рівняння, отримаємо

$$Q\varphi_2 + a_1(x)R_0 a_1(x)(\varphi'(u))^2 + H_G(x)\varphi(u) = H^0\varphi(u)$$

З умови розв'язності:

$$H^0\varphi(u) = \Pi H_G(x)\Pi\varphi(u) + \Pi a_1(x)R_0 a_1(x)(\varphi'(u))^2.$$

Враховуючи співвідношення (11) та Зауваження 1.1 можемо переписати

$$H^0\varphi(u) = \int_E \pi(dx)q(x)\int_E P(x,dy)\mathcal{H}_G(y)\varphi(u) = q\int_E \rho(dx)\mathcal{H}_G(x)\varphi(u),$$

отже остаточно отримуємо (7):

$$H^0\varphi(u) = (\widetilde{a} - \widetilde{a}_0)\varphi'(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)(\varphi'(u))^2 + \int_{\mathbb{R}}\left[e^{v\varphi'(u)} - 1\right]\widetilde{G}^0(dv).$$

Залишковий член $h^{\varepsilon,\delta}(x)$ можна обчислити в явному вигляді, використовуючи розв'язок рівняння Пуасона (див. Зауваження 1.2, детальніше [7])

$$\varphi_1(u,x) = R_0\widetilde{H}(x)\varphi(u), \qquad \widetilde{H}(x) := H_G(x) - H^0.$$

Теорему доведено. □

Література

1. S. N. Ethier and T. G. Kurtz, *Markov Processes: Characterization and Convergence*, J. Wiley & Sons, New York, 1986.
2. J. Feng and T. G. Kurtz, *Large Deviation for Stochastic Processes*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 131, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.
3. M. J. Freidlin and A. D. Wentzel, *Random Perturbation of Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
4. J. Jacod and A. N. Shiryaev, *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer-Verlang, Berlin, 1987.
5. В. С. Королюк, *Марковские случайные эволюции с независимыми приращениями в схеме асимптотически малой диффузии*, Допов. НАН України (2010), № 6, 22–26.
6. В. С. Королюк, *Проблема великих відхилень для марковських випадкових еволюцій з незалежними приростами у схемі асимптотично малої дифузії*, Укр. мат. ж. **62** (2010), № 5, 643–650.
7. V. S. Koroliuk and N. Limnios, *Stochastic Systems in Merging Phase Space*, WSP, 2005.
8. V. S. Koroliuk, N. Limnios, and I. V. Samoilenko, *Lévy approximation of impulsive recurrent process with semi-Markov switching*, Theory of Stochastic Processes **16(32)** (2010), no. 2, 77–85.
9. В. С. Королюк, Н. Лімніос, І. В. Самойленко, *Апроксимація Леві імпульсного рекурентного процесу з марковськими перемиканнями*, Теор. ймовір. та матем. статист. **80** (2009), 85–92.
10. І. В. Самойленко, *Великі відхилення для випадкових еволюцій з незалежними приростами в схемі пуасонової апроксимації*, Теор. ймовір. та матем. статист. **85** (2011), 95–101.

Відділ фрактального аналізу, Інститут математики НАН України, Терещенківська, 3, Київ 01601, Україна

Адреса електронної пошти: isamoil@imath.kiev.ua

Надійшла 10/10/2012