Теорія йомвір. та матем. статист.
Вип. 88, 2013, стор. 171–180

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 88, 2013, pp. 171–180

БАКСТЕРІВСЬКА ОЦІНКА НЕВІДОМОГО ПАРАМЕТРА КОВАРІАЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ У НЕГАУССОВОМУ ВИПАДКУ

УДК 519.21

О. О. СИНЯВСЬКА

Анотація. Вивчається задача оцінювання параметра H коваріаційної функції одного негауссового випадкового процесу. За допомогою бакстерівських статистик знайдено неасимптотичні довірчі інтервали.

Abstract. The problem of estimation the parameter H of covariance function of one non-Gaussian stochastic process is studied. A non-asymptotic confidence intervals are found by using Baxter statistics.

Аннотация. Изучается задача оценивания параметра H ковариационной функции одного негауссовского случайного процесса. При помощи бакстеровских статистик найдены неасимптотические доверительные интервалы.

1. Вступ

Граничні теореми, в яких доводиться збіжність в середньому квадратичному або з ймовірністю одиниця бакстерівських сум випадкового процесу до додатної сталої, називаються теоремами Леві–Бакстера або теоремами бакстерівського типу. Для випадкових процесів і полів такі теореми розглядались в роботах П. Леві [16], Г. Бакстера [10], Є. Г. Гладишева [3], С. М. Бермана [11], Т. Кавади [14], С. М. Краснитського [5] та інших.

Є. П. Бесклінська та Ю. В. Козаченко [1] отримали бакстерівські теореми для передгауссових випадкових процесів. Теореми бакстерівського типу для сумісно строго субгауссових та сумісно псевдогауссових випадкових процесів досліджувалися в монографії В. В. Булдигіна та Ю. В. Козаченка [2]. О. О. Курченко [7] довів бакстерівську теорему для сумісно строго субгауссових випадкових полів. Ю. В. Козаченко та О. О. Курченко [15] отримали для певного класу випадкових процесів без припущення гауссовості граничні теореми бакстерівського типу.

Теореми бакстерівського типу для оцінювання параметрів коваріаційної функції випадкових процесів та полів застосовувалися в роботах Р. Є. Майбороди [8], Ю. В. Козаченка та О. О. Курченка [4], О. О. Курченка [6], Дж.-Кр. Бретона, І. Нурдена, Дж. Пеккаті [12] та інших.

2. Постановка задачі

Нехай (Ω, F, P) — ймовірнісний простір.

Означення 2.1 ([15]). Випадковий вектор $(\xi,\eta)\in L_4(\Omega)\times L_4(\Omega)$ має властивість K, якщо

(1) $\mathsf{E}\,\xi=\mathsf{E}\,\eta=0$,
(2) $\mathsf{E}(\xi\pm\eta)^4\le 3\big(\mathsf{E}\,(\xi\pm\eta)^2\big)^2$.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 42C40; Secondary 60G12.

Ключові слова і фрази. Бакстерівські суми, довірчий інтервал, випадковий процес з приростами класу K.

Підклас K_1 класу K визначимо як множину усіх тих векторів класу K, для яких $\mathsf{E}(\xi \pm \eta)^4 = 3\big(\mathsf{E}\big(\xi \pm \eta\big)^2\big)^2$.

Означення 2.2 ([15]). Випадковий процес $\{X(t), t \in [0,1]\}$ з нульовим середнім називається процесом з приростами першого та другого порядку класу K, якщо для довільних $0 \le s \le t \le u \le v \le 1$ випадкові вектори (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), де

$$\xi_1 = X(t) - X(s), \qquad \eta_1 = X(v) - X(u), \qquad \xi_2 = X(t) - 2X\left(\frac{t+s}{2}\right) + X(s),$$
$$\eta_2 = X(v) - 2X\left(\frac{u+v}{2}\right) + X(u),$$

мають властивість K. Випадковий процес $\{X(t), t \in [0,1]\}$ називається процесом з приростами першого та другого порядку класу K_1, якщо випадкові вектори (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) належать класу K_1.

Наприклад, гауссові випадкові процеси з нульовим середнім значенням є випадковими процесами з приростами першого та другого порядку класу K_1.

Зауважимо, що для випадкового процесу $\{\xi(t), t \in [0,1]\}$ з приростами першого та другого порядку класу K_1 прирости ξ_i, $i = 1, 2$, задовольняють рівність $\mathsf{E}\,\xi_i^4 = 3\left(\mathsf{E}\,\xi_i^2\right)^2$, $i = 1, 2$.

Нехай $\{\xi(t), t \in [0,1]\}$ — випадковий процес з нульовим середнім значенням, коваріаційною функцією:

$$r(t,s) = \frac{1}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right), \qquad t, s \in [0,1],\ H \in (0,1), \tag{1}$$

та приростами першого та другого порядку класу K_1. За спостереженнями випадкового процесу $\{\xi(t), t \in [0,1]\}$ в точках $\left\{\frac{k}{a_n}, \frac{k+0.5}{a_n} \;\middle|\; 0 \le k \le a_n, n \ge 1\right\}$, де послідовність $(a_n) \subset \mathbf{N}$, $a_n \to +\infty$, $n \to \infty$, потрібно отримати оцінку невідомого параметра H та знайти неасимптотичні довірчі інтервали. Надалі будемо припускати, що для довільного $\alpha > 0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-\alpha}$ збіжний.

Дробовий броунівський рух є прикладом випадкового процесу з коваріаційною функцією (1) і приростами першого та другого порядку класу K_1. Нижче наведений приклад негауссового випадкового процесу з коваріаційною функцією (1) і приростами першого та другого порядку класу K_1.

Приклад 2.1. У статті [13] отримано наступний розклад дробового броунівського руху $\{B_H(t), t \in [0,1]\}$ з параметром Хюрста $H \in (0,1)$:

$$B_H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x_n t)}{x_n} X_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(y_n t)}{y_n} Y_n, \qquad t \in [0,1],$$

де X_n, Y_n — незалежні послідовності незалежних гауссових випадкових величин, $\mathsf{E}\,X_n = \mathsf{E}\,Y_n = 0, n \ge 1$;

$$\operatorname{Var} X_n = 2c_H^2 x_n^{-2H} J_{1-H}^{-2}(x_n), \tag{2}$$
$$\operatorname{Var} Y_n = 2c_H^2 y_n^{-2H} J_{-H}^{-2}(y_n); \tag{3}$$

$c_H^2 = \pi^{-1}\Gamma(1+2H)\sin\pi H$; J_ν, $\nu \ne -1, -2, \ldots$ — функція Бесселя першого роду порядку ν; (x_n) — зростаюча послідовність додатніх нулів функції Бесселя J_{-H}; (y_n) — зростаюча послідовність додатніх нулів функції Бесселя J_{1-H}.

Нехай, далі (ξ_n), (η_n) — незалежні послідовності незалежних випадкових величин, $\mathsf{E}\,\xi_n = \mathsf{E}\,\eta_n = 0$, $\mathsf{E}\,\xi_n^4 = 3(\mathsf{E}\,\xi_n^2)^2$, $\mathsf{E}\,\eta_n^4 = 3(\mathsf{E}\,\eta_n^2)^2$, $\operatorname{Var}\xi_n = \operatorname{Var} X_n$, $\operatorname{Var}\eta_n = \operatorname{Var} Y_n$.

Тоді випадковий процес

$$\xi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x_n t)}{x_n} \xi_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(y_n t)}{y_n} \eta_n, \qquad t \in [0,1], \tag{4}$$

має коваріаційну функцію (1) та прирости першого порядку класу K_1. Для довільного $t \in [0,1]$ доведемо збіжність в $L_4(\Omega)$ першого ряду в правій частині (4). Збіжність другого ряду доводиться аналогічно. Нехай $1 \le N < M$. Внаслідок нерівності Гельдера для $p = \frac{4}{3}$, $q = 4$, $\forall \lambda \in (0, \frac{1}{4})$ маємо:

$$\left| \sum_{n=N}^{M} \frac{\sin x_n t}{x_n} \xi_n \right| \le \sum_{n=N}^{M} \frac{1}{x_n^{1-\lambda}} \frac{|\xi_n|}{x_n^{\lambda}} \le \left(\sum_{n=N}^{M} \frac{1}{x_n^{4(1-\lambda)/3}} \right)^{3/4} \left(\sum_{n=N}^{M} \frac{\xi_n^4}{x_n^{4\lambda}} \right)^{1/4}.$$

Оскільки для довільного $p > 0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/x_n^{1+p}$ збіжний [13], а $\frac{4}{3}(1-\lambda) > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/x_n^{4(1-\lambda)/3}$ збіжний для $\lambda < \frac{1}{4}$. Далі,

$$\mathsf{E} \left| \sum_{n=N}^{M} \frac{\sin x_n t}{x_n} \xi_n \right|^4 \le \left(\sum_{n=N}^{M} \frac{1}{x_n^{4(1-\lambda)/3}} \right)^3 \mathsf{E} \left(\sum_{n=N}^{M} \frac{\xi_n^4}{x_n^{4\lambda}} \right).$$

Так як $\mathsf{E}\,\xi_n^4 = 3(\mathsf{E}\,\xi_n^2)^2$, то

$$\mathsf{E} \left(\sum_{n=N}^{M} \frac{\xi_n^4}{x_n^{4\lambda}} \right) = 3 \sum_{n=N}^{M} \frac{(\mathsf{E}\,\xi_n^2)^2}{x_n^{4\lambda}} = 3 \sum_{n=N}^{M} \frac{4c_H^4}{x_n^{4\lambda+4H} J_{1-H}^4(x_n)}.$$

Враховуючи, що $J_{1-H}^2(x_n) \sim \frac{2}{\pi x_n}$, $n \to \infty$ [13], отримаємо

$$\frac{1}{x_n^{4\lambda+4H} J_{1-H}^4(x_n)} \sim \frac{\pi^2}{4} \frac{x_n^2}{x_n^{4\lambda+4H}} = \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{x_n^{4\lambda+4H-2}}.$$

При $H > \frac{1}{2}$ знайдеться $\lambda < \frac{1}{4}$ таке, що $4\lambda + 4H - 2 > 1$. Враховуючи, що для довільного $p > 0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/x_n^{1+p} < +\infty$, отримаємо збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n^{4\lambda+4H} J_{1-H}^4(x_n) \right)^{-1}.$$

Отже,

$$\mathsf{E} \left(\sum_{n=N}^{M} \frac{\sin x_n t}{x_n} \xi_n \right)^4 \to 0, \qquad N, M \to \infty,$$

і тому, внаслідок критерію Коші, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin x_n t / x_n) \xi_n$ збіжний в $L_4(\Omega)$. Доведемо, що $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin x_n t / x_n) \xi_n$ є процесом з приростами першого порядку класу K_1. Нехай

$$X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \xi_n, \qquad t \in [0,1],$$

де $\varphi_n(t) = \sin x_n t / x_n$, $n \ge 1$. Для довільних відрізків $[s,t], [u,v] \subset [0,1]$ без спільних внутрішніх точок покладемо

$$X_{1,N} = \sum_{n=1}^{N} \rho_n \xi_n, \quad \text{де } \rho_n = \varphi_n(t) - \varphi_n(s),$$

$$X_{2,N} = \sum_{n=1}^{N} \tau_n \xi_n, \quad \text{де } \tau_n = \varphi_n(v) - \varphi_n(u), \quad n \ge 1.$$

Доведемо, що

$$\mathsf{E} \left(X_{1,N} \pm X_{2,N} \right)^4 = 3 \left(\mathsf{E} \left(X_{1,N} \pm X_{2,N} \right)^2 \right)^2. \tag{5}$$

Оскільки $X_{1,N} \pm X_{2,N} = \sum_{n=1}^{N} \mu_n \xi_n$, де $\mu_n = \rho_n \pm \tau_n$, $1 \le n \le N$, то

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left(\sum_{n=1}^{N} \mu_n \xi_n\right)^4 &= \sum_{n=1}^{N} \mu_n^4 \,\mathsf{E}\,\xi_n^4 + 6 \sum_{\substack{n,m=1\\ n<m}}^{N} \mu_n^2 \mu_m^2 \,\mathsf{E}\,\xi_n^2 \,\mathsf{E}\,\xi_m^2 \\
&= 3\left(\sum_{n=1}^{N} \mu_n^4 \left(\mathsf{E}\,\xi_n^2\right)^2 + 2 \sum_{\substack{n,m=1\\ n<m}}^{N} \mu_n^2 \mu_m^2 \,\mathsf{E}\,\xi_n^2 \,\mathsf{E}\,\xi_m^2\right) \\
&= 3\left(\sum_{n=1}^{N} \mu_n^2 \,\mathsf{E}\,\xi_n^2\right)^2 = 3\left(\mathsf{E}\left(\sum_{n=1}^{N} \mu_n \xi_n\right)^2\right)^2 .
\end{aligned}$$

Нехай $X_i = \lim_{N\to\infty} X_{i,N}$ в $L_4(\Omega)$, де $i = 1, 2$. Після граничного переходу при $N \to \infty$ в (5) одержимо $\mathsf{E}\,(X_1 \pm X_2)^4 = 3\big(\mathsf{E}\,(X_1 \pm X_2)^2\big)^2$. Отже, випадковий процес $X(t)$ є процесом з приростами першого порядку класу K_1. Аналогічно, випадковий процес $Y(t) = \sum_{n=1}^{\infty}((1 - \cos y_n t)/y_n)\eta_n$, $t \in [0, 1]$, є процесом з приростами першого порядку класу K_1. Тоді, випадковий процес $\xi(t) = X(t) + Y(t)$, $t \in [0, 1]$ є процесом з приростами першого порядку класу K_1. Дійсно, для $X_1 = X(t) - X(s)$, $X_2 = X(v) - X(u)$ та $Y_1 = Y(t) - Y(s)$, $Y_2 = Y(v) - Y(u)$ маємо:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\,((X_1 + Y_1) \pm (X_2 + Y_2))^4 = \mathsf{E}\,((X_1 \pm X_2) + (Y_1 \pm Y_2))^4 \\
&\quad = 3\left(\left(\mathsf{E}\,(X_1 \pm X_2)^2\right)^2 + 2\,\mathsf{E}\,(X_1 \pm X_2)^2 \,\mathsf{E}\,(Y_1 \pm Y_2)^2 + \left(\mathsf{E}\,(Y_1 \pm Y_2)^2\right)^2\right) \\
&\quad = 3\left(\mathsf{E}\,(X_1 \pm X_2)^2 + \mathsf{E}\,(Y_1 \pm Y_2)^2\right)^2 = 3\left(\mathsf{E}\,((X_1 \pm X_2) + (Y_1 \pm Y_2))^2\right)^2 \\
&\quad = 3\left(\mathsf{E}\,((X_1 + Y_1) \pm (X_2 + Y_2))^2\right)^2 .
\end{aligned}$$

Аналогічно, доводиться, що випадковий процес $\xi(t) = X(t) + Y(t)$, $t \in [0, 1]$, є процесом з приростами другого порядку класу K_1.

3. Сильно консистентна оцінка параметра H

Для випадковго процесу $\{\xi(t), t \in [0, 1]\}$ введемо такі позначення:

$$\xi_{k,n}^{(1)} = \xi\left(\frac{k+1}{a_n}\right) - \xi\left(\frac{k}{a_n}\right),$$

$$\xi_{k,n}^{(2)} = \xi\left(\frac{k+1}{a_n}\right) - 2\xi\left(\frac{k+0.5}{a_n}\right) + \xi\left(\frac{k}{a_n}\right), \qquad 0 \le k \le a_n - 1.$$

Розглянемо наступні послідовності бакстерівських сум:

$$S_n^{(i)} = \sum_{k=0}^{a_n-1} \left(\xi_{k,n}^{(i)}\right)^2, \qquad \hat{S}_n^{(i)} = a_n^{2H-1} S_n^{(i)}, \qquad i = 1, 2.$$

Для оцінки дисперсії бакстерівських сум $\hat{S}_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, ми застосуємо наступну лему.

Лема 3.1 ([15]). *Нехай випадковий вектор (ξ, η) належить класу K. Тоді виконується наступна нерівність:*

$$\mathsf{E}\left(\xi^2\eta^2\right) \le 2\left(\mathsf{E}\,\xi\eta\right)^2 + \mathsf{E}\,\xi^2 \,\mathsf{E}\,\eta^2 + \frac{1}{2}\left(\left(\mathsf{E}\,\xi^2\right)^2 - \frac{1}{3}\,\mathsf{E}\,\xi^4\right) + \frac{1}{2}\left(\left(\mathsf{E}\,\eta^2\right)^2 - \frac{1}{3}\,\mathsf{E}\,\eta^4\right).$$

Із цієї леми випливає, що для випадкового процесу $\{\xi(t), t \in [0,1]\}$ з приростами першого та другого порядку класу K_1 випадкові вектори (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) із означення 2.2 задовольняють нерівність:

$$\mathsf{E}\left(\xi_i^2 \eta_i^2\right) \le 2\left(\mathsf{E}(\xi_i \eta_i)\right)^2 + \mathsf{E}\,\xi_i^2\,\mathsf{E}\,\eta_i^2, i = 1, 2. \tag{6}$$

Лема 3.2. *Нехай* $H^* \in (0,1)$. *Тоді*

$$\sup_{H \in (0, H^*]} \operatorname{Var} \hat{S}_n^{(1)} \le \begin{cases} \frac{2}{a_n}\left(3 + 2\zeta(4 - 4H^*)\right), & \textit{якщо } H^* \in (0, \frac{3}{4}); \\ \frac{2}{a_n}\left(3 + 2\left(1 + \ln a_n\right)\right), & \textit{якщо } H^* = \frac{3}{4}; \\ \frac{2}{a_n}\left(3 + 2\frac{a_n^{4H^*-3}}{4H^*-3}\right), & \textit{якщо } H^* \in \left(\frac{3}{4}, 1\right), \end{cases}$$

де

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad s > 1. \tag{7}$$

Доведення. Маємо:

$$\operatorname{Var} \hat{S}_n^{(1)} = a_n^{4H-2} \operatorname{Var} S_n^{(1)};$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Var} S_n^{(1)} &= \mathsf{E}\left(S_n^{(1)} - \mathsf{E}\,S_n^{(1)}\right)^2 = \mathsf{E}\left(\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(\xi_{k,n}^{(1)}\right)^2 - \sum_{k=0}^{a_n-1}\mathsf{E}\left(\xi_{k,n}^{(1)}\right)^2\right)^2 \\ &= \mathsf{E}\left(\sum_{k,j=0}^{a_n-1}\left(\left(\xi_{k,n}^{(1)}\right)^2 - \mathsf{E}\left(\xi_{k,n}^{(1)}\right)^2\right)\left(\left(\xi_{j,n}^{(1)}\right)^2 - \mathsf{E}\left(\xi_{j,n}^{(1)}\right)^2\right)\right) \\ &= \sum_{k,j=0}^{a_n-1}\left(\mathsf{E}\left(\xi_{k,n}^{(1)}\right)^2\left(\xi_{j,n}^{(1)}\right)^2 - \mathsf{E}\left(\xi_{k,n}^{(1)}\right)^2\mathsf{E}\left(\xi_{j,n}^{(1)}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Внаслідок нерівності (6),

$$\operatorname{Var} S_n^{(1)} \le 2\sum_{k,j=0}^{a_n-1}\left(\mathsf{E}\,\xi_{k,n}^{(1)}\xi_{j,n}^{(1)}\right)^2.$$

Далі,

$$\mathsf{E}\,\xi_{k,n}^{(1)}\xi_{j,n}^{(1)} = \frac{1}{2}\left|\frac{(k-j)+1}{a_n}\right|^{2H} - \left|\frac{k-j}{a_n}\right|^{2H} + \frac{1}{2}\left|\frac{(k-j)-1}{a_n}\right|^{2H}, \qquad 0 \le k, j \le a_n - 1.$$

Покладемо $v_l := (l+1)^{2H} - 2l^{2H} + (l-1)^{2H}$, $l \ge 1$. Тоді

$$\operatorname{Var} S_n^{(1)} \le 2\left(a_n^{1-4H} + \frac{a_n^{-4H}}{2}\sum_{\substack{k,j=0,\\ k<j}}^{a_n-1} v_{j-k}^2\right) \le 2a_n^{1-4H}\left(1 + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{a_n-1} v_l^2\right).$$

Оскільки $v_1^2 = \left(2^{2H} - 2\right)^2 \le 4$ при $H \in (0,1)$, то $\operatorname{Var} S_n^{(1)} \le 2a_n^{1-4H}\left(3 + \frac{1}{2}\sum_{l=2}^{a_n-1} v_l^2\right)$. Далі, так як v_l — приріст другого порядку функції $f(x) = x^{2H}$, $x \ge 1$, на відрізку $[l-1, l+1]$, то з формули для приросту n-го порядку при $n = 2$ [9, с. 244] випливає, що $v_l = 2H(2H-1)\theta_l^{2H-2}$, де $\theta_l \in (l-1, l+1)$. Враховуючи, що $\sup_{H \in (0,1)} |2H(2H-1)| = 2$, отримаємо

$$v_l^2 \le \frac{4}{(l-1)^{4-4H}}, \qquad l \ge 2,$$

звідки

$$\operatorname{Var} S_n^{(1)} \le 2a_n^{1-4H}\left(3 + 2\sum_{l=2}^{a_n-1}\frac{1}{(l-1)^{4-4H}}\right).$$

Таким чином
$$\operatorname{Var}\hat{S}_n^{(1)} \le \frac{2}{a_n}\left(3 + 2\sum_{l=2}^{a_n-1}\frac{1}{(l-1)^{4-4H}}\right)$$
і
$$\sup_{H\in(0,H^*]}\operatorname{Var}\hat{S}_n^{(1)} \le \frac{2}{a_n}\left(3 + 2\sum_{l=2}^{a_n-1}\frac{1}{(l-1)^{4-4H^*}}\right). \tag{8}$$
Оскільки
$$\sum_{l=1}^{a_n}\frac{1}{l^{4-4H^*}} \le \begin{cases}\zeta(4-4H^*), & H^*\in(0,\frac{3}{4});\\ 1+\ln a_n, & H^*=\frac{3}{4};\\ \frac{a_n^{4H^*-3}}{4H^*-3}, & \text{якщо } H^*\in\left(\frac{3}{4},1\right),\end{cases}$$
де $\zeta(s)=\sum_{n=1}^\infty n^{-s}$, $s>1$, то із нерівності (8) отримуємо твердження леми. Лема доведена. □

Теорема 3.1. $\hat{S}_n^{(1)} \to 1$ *з ймовірністю одиниця при* $n\to\infty$.

Доведення.
$$\mathsf{E}\,\hat{S}_n^{(1)} = a_n^{2H-1}a_n\,\mathsf{E}\left(\xi_{0,n}^{(1)}\right)^2 = 1, \qquad n\ge 1. \tag{9}$$
З леми 3.2 та припущення про збіжність ряду $\sum_{n=1}^\infty a_n^{-\alpha}$ для довільного $\alpha>0$ випливає, що для довільного $H\in(0,1)$ ряд $\sum_{n=1}^\infty \operatorname{Var}\hat{S}_n^{(1)} < +\infty$. Враховуючи (9), отримуємо твердження теореми. □

Лема 3.3. *Для довільного* $H\in(0,1)$
$$\operatorname{Var}\hat{S}_n^{(2)} \le \frac{2}{a_n}\left(9+\frac{c}{2}+\frac{c_*^2}{2}\zeta(4)\right),$$
де $\zeta(4)=\pi^4/90$,
$$c = \sup_{H\in(0,1)}\left(\frac{6\cdot 2^{2H}-4-4\cdot 3^{2H}+2^{4H}}{2^{2H}}\right)^2,$$
$$c_* = \sup_{H\in(0,1)}\left|\frac{2H(2H-1)(2H-2)(2H-3)}{2^4}\right|.$$

Доведення. Маємо:
$$\operatorname{Var}\hat{S}_n^{(2)} = a_n^{4H-2}\operatorname{Var}S_n^{(2)}.$$
Як і у доведенні леми 3.2, отримаємо нерівність
$$\operatorname{Var}S_n^{(2)} \le 2\sum_{k,j=0}^{a_n-1}\left(\mathsf{E}\,\xi_{k,n}^{(2)}\xi_{j,n}^{(2)}\right)^2.$$

Далі,
$$\mathsf{E}\left(\xi_{k,n}^{(2)}\xi_{j,n}^{(2)}\right) = \frac{1}{2}\left(-\left|\frac{(k-j)-1}{a_n}\right|^{2H} + 4\left|\frac{(k-j)-1/2}{a_n}\right|^{2H} - 6\left|\frac{k-j}{a_n}\right|^{2H}\right.$$
$$\left. + 4\left|\frac{(k-j)+1/2}{a_n}\right|^{2H} - \left|\frac{(k-j)+1}{a_n}\right|^{2H}\right),$$
$$0\le k,j\le a_n-1.$$

При $k=j$ маємо $\mathsf{E}\big(\xi_{k,n}^{(2)}\big)^2 = \mathsf{E}\big(\xi_{0,n}^{(2)}\big)^2 = a_n^{-2H}(2^{2-2H}-1)$.

Покладемо

$$w_l := \left(|l-1|^{2H} - 4|l-\frac{1}{2}|^{2H} + 6l^{2H} - 4|l+\frac{1}{2}|^{2H} + |l+1|^{2H}\right), \qquad l \geq 1.$$

При $l = 1$ одержимо $w_1 = (6 \cdot 2^{2H} - 4 - 4 \cdot 3^{2H} + 2^{4H})/(2^{2H})$. Тоді

$$\begin{aligned}\operatorname{Var} S_n^{(2)} &\leq 2\left(a_n^{1-4H}(2^{2-2H}-1)^2 + \frac{a_n^{-4H}}{2}\sum_{\substack{k,j=0,\\ k<j}}^{a_n-1} w_{j-k}^2\right)\\ &\leq 2\Biggl(a_n^{1-4H}(2^{2-2H}-1)^2\\ &\qquad + \frac{a_n^{1-4H}}{2}\left(\frac{6\cdot 2^{2H} - 4 - 4\cdot 3^{2H} + 2^{4H}}{2^{2H}}\right)^2 + \frac{a_n^{1-4H}}{2}\sum_{l=2}^{a_n-1} w_l^2\Biggr).\end{aligned}$$

Оскільки $\sup_{H\in(0,1)}(2^{2-2H}-1)^2 = 9$, то

$$\operatorname{Var} S_n^{(2)} \leq 2a_n^{1-4H}\left(9 + \frac{c}{2} + \frac{1}{2}\sum_{l=2}^{a_n-1} w_l^2\right),$$

де

$$c = \sup_{H\in(0,1)}\left(\frac{6\cdot 2^{2H} - 4 - 4\cdot 3^{2H} + 2^{4H}}{2^{2H}}\right)^2. \tag{10}$$

Далі, w_l — приріст четвертого порядку функції $f(x) = x^{2H}$, $x \geq 1$, на відрізку $[l-1, l+1]$, тому з формули для приросту n-го порядку при $n = 4$ [9, с. 244] одержимо, що

$$w_l = \frac{2H(2H-1)(2H-2)(2H-3)}{2^4}\theta_l^{2H-4},$$

де $\theta_l \in (l-1, l+1)$. Враховуючи, що

$$c_* = \sup_{H\in(0,1)}\left|\frac{2H(2H-1)(2H-2)(2H-3)}{2^4}\right|, \tag{11}$$

отримаємо

$$w_l^2 \leq c_*^2 \frac{1}{(l-1)^{8-4H}}, \qquad l \geq 2,$$

звідки

$$\operatorname{Var} S_n^{(2)} \leq 2a_n^{1-4H}\left(9 + \frac{c}{2} + \frac{c_*^2}{2}\sum_{l=2}^{a_n-1}\frac{1}{(l-1)^{8-4H}}\right) \leq 2a_n^{1-4H}\left(9 + \frac{c}{2} + \frac{c_*^2}{2}\zeta(4)\right),$$

де $\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} = \frac{\pi^4}{90} = 1.08232323\ldots$. Таким чином, $\sup_{H\in(0,1)} \operatorname{Var} \hat{S}_n^{(2)} \leq$ $\leq \frac{2}{a_n}\bigl(9 + \frac{c}{2} + \frac{c_*^2}{2}\zeta(4)\bigr)$. Лема доведена. □

Теорема 3.2. *$\hat{S}_n^{(2)} \to 2^{2-2H} - 1$ з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$.*

Доведення.

$$\mathsf{E}\,\hat{S}_n^{(2)} = a_n^{2H-1} a_n\, \mathsf{E}\left(\xi_{0,n}^{(2)}\right)^2 = 2^{2-2H} - 1.$$

Із леми 3.3 та збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1}$ випливає, що для довільного $H \in (0,1)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Var} \hat{S}_n^{(2)} < +\infty$. Теорему доведено. □

Із теорем 3.1 та 3.2 випливає наступний наслідок.

Наслідок 3.1.

$$\frac{S_n^{(2)}}{S_n^{(1)}} = \frac{\hat{S}_n^{(2)}}{\hat{S}_n^{(1)}} \to 2^{2-2H} - 1, \qquad H \in (0,1), \tag{12}$$

з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$.

Покладемо

$$\theta(H) := 2^{2-2H} - 1, \qquad H \in (0,1). \tag{13}$$

Функція

$$\varphi(\theta) = 1 - \frac{1}{2}\log_2(\theta + 1), \qquad \theta \in (0,3) \tag{14}$$

— обернена до функції $\theta(H)$, $H \in (0,1)$.

Теорема 3.3. *Статистика*

$$\hat{H}_n = 1 - \frac{1}{2}\log_2(\theta_n + 1), \qquad n \geq 1,$$

де $\theta_n = S_n^{(2)}/S_n^{(1)}$, $n \geq 1$, є сильно консистентною оцінкою параметра H.

Доведення. Оскільки функція (14) обернена до функції (13), то із збіжності (12) випливає, що $\hat{H}_n \to H$ з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$. □

4. Довірчі інтервали

Лема 4.1. *Нехай $\{X_k \mid 0 \leq k \leq a_n, a_n \in N\}$, $\{Y_k \mid 0 \leq k \leq a_n, a_n \in N\}$ — набори випадкових величин з нульовим середнім та скінченими моментами 4-го порядку такі, що:*

$$\mathsf{E}\,X_k = \mathsf{E}\,Y_k = 0, \qquad \mathsf{E}\,X_k^2 = \mathsf{E}\,X_0^2, \qquad \mathsf{E}\,Y_k^2 = \mathsf{E}\,Y_0^2, \qquad 0 \leq k \leq a_n;$$

$$S_1 = \sum_{k=0}^{a_n} X_k^2, \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{a_n} Y_k^2, \qquad \theta = \frac{\mathsf{E}\,X_0^2}{\mathsf{E}\,Y_0^2}.$$

Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ має місце нерівність:

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{S_1}{S_2} - \theta\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{\operatorname{Var} Q_1}{(\mathsf{E}\,Q_1)^2} + \frac{\operatorname{Var} Q_2}{(\mathsf{E}\,Q_2)^2},$$

де $Q_1 = (\theta - \varepsilon)\,S_2 - S_1$, $Q_2 = S_1 - (\theta + \varepsilon)\,S_2$.

Доведення. Маємо:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left\{\left|\frac{S_1}{S_2} - \theta\right| \geq \varepsilon\right\} &= \mathsf{P}\left\{|S_1 - \theta S_2| \geq \varepsilon S_2\right\} \\
&= \mathsf{P}\left\{S_1 - \theta S_2 \leq -\varepsilon S_2\right\} + \mathsf{P}\left\{S_1 - \theta S_2 \geq \varepsilon S_2\right\} \\
&= \mathsf{P}\left\{Q_1 \geq 0\right\} + \mathsf{P}\left\{Q_2 \geq 0\right\}.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\,Q_1 &= (\theta - \varepsilon)\,\mathsf{E}\,S_2 - \mathsf{E}\,S_1 = (\theta - \varepsilon)\,(a_n + 1)\,\mathsf{E}\,Y_0^2 - (a_n + 1)\,\mathsf{E}\,X_0^2 \\
&= (a_n + 1)(\theta - \varepsilon - \theta) = -\varepsilon(a_n + 1)\,\mathsf{E}\,Y_0^2 < 0; \\
\mathsf{E}\,Q_2 &= (a_n + 1)\,\mathsf{E}\,X_0^2 - (\theta + \varepsilon)\,(a_n + 1)\,\mathsf{E}\,Y_0^2 = -\varepsilon(a_n + 1)\,\mathsf{E}\,Y_0^2 < 0.
\end{aligned}$$

Оцінимо зверху ймовірність $\mathsf{P}\{Q_1 \geq 0\}$ за допомогою нерівності Чебишева:

$$\mathsf{P}\{Q_1 \geq 0\} = \mathsf{P}\{Q_1 - \mathsf{E}\,Q_1 \geq -\mathsf{E}\,Q_1\} \leq \mathsf{P}\{|Q_1 - \mathsf{E}\,Q_1| \geq -\mathsf{E}\,Q_1\} \leq \frac{\operatorname{Var} Q_1}{(\mathsf{E}\,Q_1)^2}.$$

Аналогічно оцінюється зверху ймовірність $\mathsf{P}\{Q_2 \geq 0\}$. □

За допомогою леми 4.1 спочатку побудуємо довірчий інтервал для параметра $\theta = 2^{2-2H} - 1$, $H \in (0,1)$. Нехай $1-p \in (0,1)$ — заданий рівень довіри. Додатне число $\gamma_n(p)$ визначимо так, щоб:

$$\mathsf{P}\left\{|\theta_n - \theta| \geq \gamma_n(p)\right\} < p.$$

З цією метою покладемо

$$Q_1 = (\theta - \gamma_n(p))\, \hat{S}_n^{(1)} - \hat{S}_n^{(2)}, \qquad Q_2 = \hat{S}_n^{(2)} - (\theta + \gamma_n(p))\, \hat{S}_n^{(1)},$$

де поки що $\gamma_n(p)$ не визначено. Для математичних сподівань випадкових величин Q_1, Q_2 маємо:

$$\mathsf{E}\, Q_1 = \mathsf{E}\, Q_2 = -\gamma_n(p).$$

Для оцінки зверху дисперсій випадкових величин Q_1, Q_2 використаємо нерівність $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, $a,b \in \mathbf{R}$. Маємо

$$\operatorname{Var} Q_1 \leq 2\left(\theta - \gamma_n(p)\right)^2 \operatorname{Var} \hat{S}_n^{(1)} + 2 \operatorname{Var} \hat{S}_n^{(2)},$$
$$\operatorname{Var} Q_2 \leq 2\left(\theta + \gamma_n(p)\right)^2 \operatorname{Var} \hat{S}_n^{(1)} + 2 \operatorname{Var} \hat{S}_n^{(2)}.$$

Оцінки для $\operatorname{Var} \hat{S}_n^{(1)}$, $\operatorname{Var} \hat{S}_n^{(2)}$ отримані у лемах 3.2, 3.3. Нагадаємо, що $\theta \in (0,3)$.

Будемо підбирати $\gamma_n(p)$ так, щоб

$$\frac{\operatorname{Var} Q_1}{\left(\mathsf{E}\, Q_1\right)^2} \leq \frac{2\left(\theta - \gamma_n(p)\right)^2 \operatorname{Var} \hat{S}_n^{(1)} + 2 \operatorname{Var} \hat{S}_n^{(2)}}{\gamma_n^2(p)} \leq \frac{p}{2}, \tag{15}$$

$$\frac{\operatorname{Var} Q_2}{\left(\mathsf{E}\, Q_2\right)^2} \leq \frac{2\left(\theta + \gamma_n(p)\right)^2 \operatorname{Var} \hat{S}_n^{(1)} + 2 \operatorname{Var} \hat{S}_n^{(2)}}{\gamma_n^2(p)} \leq \frac{p}{2}. \tag{16}$$

Для $H^* \in (0,1)$ покладемо

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{4}{a_n}\left(3 + 2\zeta(4-4H^*)\right), & H^* \in (0, \frac{3}{4}); \\ \frac{4}{a_n}\left(3 + 2\left(1 + \ln a_n\right)\right), & H^* = \frac{3}{4}; \\ \frac{4}{a_n}\left(3 + 2\frac{a_n^{4H^*-3}}{4H^*-3}\right), & H^* \in \left(\frac{3}{4}, 1\right), \end{cases}$$

$$\beta_n = \frac{4}{a_n}\left(9 + \frac{c}{2} + \frac{c_*}{2}\zeta(4)\right),$$

де c, c_*, $\zeta(s)$, $s > 1$, визначені рівностями (10), (11) та (7) відповідно.

Із лем 3.2, 3.3 випливає, що

$$\alpha_n \geq 2 \sup_{H \in (0,H^*]} \operatorname{Var} \hat{S}_n^{(1)}, \qquad \beta_n \geq 2 \sup_{H \in (0,H^*]} \operatorname{Var} \hat{S}_n^{(2)}.$$

При $H \in (0, H^*]$ нерівність (16) є наслідком нерівності

$$\frac{\left(3 + \gamma_n(p)\right)^2 \alpha_n + \beta_n}{\gamma_n^2(p)} \leq \frac{p}{2}.$$

Розв'язуючи цю нерівність відносно $\gamma_n(p)$ за умови $\frac{p}{2} - \alpha_n > 0$, що справджується для всіх достатньо великих n, отримаємо

$$\gamma_n(p) \geq \frac{3\alpha_n + \sqrt{\frac{D}{4}}}{\left(\frac{p}{2} - \alpha_n\right)},$$

де

$$D = 36\alpha_n^2 + 4\left(\frac{p}{2} - \alpha_n\right)\left(9\alpha_n + \beta_n\right).$$

Покладемо

$$\gamma_n(p) = \frac{3\alpha_n + \sqrt{\frac{D}{4}}}{\left(\frac{p}{2} - \alpha_n\right)}. \tag{17}$$

Звідси випливає наступна теорема.

Теорема 4.1. *Нехай* $H \in (0, H^*]$, *де* $H^* \in (0,1)$ *— фіксовано і* $\frac{p}{2} - \alpha_n > 0$. *Тоді інтервал* $(H_{n,l}, H_{n,r})$, *де*

$$H_{n,l} = \varphi\big(\min\left(\theta_n + \gamma_n(p), \theta(H^*)\right)\big), \qquad H_{n,r} = \varphi\big(\max\left(0, \theta_n - \gamma_n(p)\right)\big),$$

$\theta_n = S_n^{(2)}/S_n^{(1)}$, *функція* $\varphi(H)$ *визначена рівністю* (14), $\gamma_n(p)$ *обчислюється за формулою* (17), *є довірчим інтервалом для параметра* H *з рівнем довіри* $1-p$.

Зауважимо, що $\gamma_n(p) = O\left(\sqrt{\alpha_n}\right)$, $n \to \infty$.

5. Висновки

В роботі отримано бакстерівську оцінку невідомого параметра H коваріаційної функції (1) випадкового процесу з приростами першого та другого порядку класу K_1. Також знайдено неасимптотичні довірчі інтервали.

Література

1. Е. П. Бесклинская, Ю. В. Козаченко, *Сходимость в нормах пространства Орлича и теоремы Леви–Бакстера*, Теория вероятн. и матем. статист. **36** (1986), 3–6.
2. В. В. Булдыгин, Ю. В. Козаченко, *Метрические характеристики случайных величин и процессов*, "ТВіМС", Киев, 1998.
3. Е. Г. Гладышев, *Новая предельная теорема для случайных процессов с гауссовскими приращениями*, Теория вероятн. и применен. **6** (1961), 57–66.
4. Ю. В. Козаченко, О. О. Курченко, *Оцінювання параметрів гауссівських однорідних випадкових полів*, УМЖ **52** (2000), № 8, 1082–1088.
5. С. М. Краснитский, *О некоторых предельных теоремах для случайных полей с гауссовскими разностями m-го порядка*, Теория вероятн. и матем. статист. **5** (1971), 71–80.
6. О. О. Курченко, *Одна сильно консистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху*, Теорія ймовір. та матем. статист. **67** (2002), 45–54.
7. О. О. Курченко, *Теорема бакстерівського типу для строго субгауссових випадкових полів*, Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Математика. Механіка **5** (2009), 35–38.
8. Р. Є. Майборода, *Асимптотична нормальність бакстерівських оцінок параметрів нестаціонарних процесів*, Теорія ймовір. та матем. статист. **53** (1995), 97–102.
9. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. 1, "Наука", Москва, 1969.
10. G. Baxter, *A strong limit theorem for Gaussian processes*, Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), no. 3, 522–527.
11. S. M. Berman, *A version of Levy–Baxter theorem for Gaussian processes*, Proc. Amer. Math. Soc. **18** (1967), 1051–1055.
12. J-C. Breton, I. Nourdin, and G. Peccati, *Exact confidence intervals for the Hurst parameter of a fractional Brownian motion*, Electronic Journal of Statistics **3** (2009), 416–425.
13. K. Dzhaparidze and J. H. van Zanten, *A series expansion of fractional Brownian motion*, Probability Theory and Related Fields **130** (2004), no. 1, 39–55.
14. T. Kawada, *The Levy–Baxter theorem for Gaussian random fields*, Proc. Amer. Math. Soc. **53** (1975), 463–469.
15. Y. V. Kozachenko and O. O. Kurchenko, *Levy–Baxter theorems for one class of non-Gaussian stochastic processes*, Random Oper. Stoch. Equ. **4** (2011), 313–326.
16. P. Levy, *Le mouvement Brownian plan*, Amer J. Math. **62** (1940), 487–550.

Кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики, механіко-математичний факультет, Київський Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: olja_sunjavska@ua.fm.

Надійшла 07/11/2012