Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 90, 2014, стор. 22–38

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 90, 2014, pp. 22–38

ОЦІНКА ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ ПОСЛІДОВНОСТІ АДИТИВНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД РІЗНИЦЕВИХ АПРОКСИМАЦІЙ БАГАТОВИМІРНОГО ДИФУЗІЙНОГО ПРОЦЕСУ

УДК 519.21

Ю. В. ГАНИЧЕНКО

Анотація. Ми розглядаємо послідовність адитивних функціоналів від різницевих апроксимацій багатовимірного дифузійного процесу. Дана стаття є уточненням результату [8] по дослідженню достатніх умов слабкої збіжності такої послідовності до W-функціоналу від граничного процесу. Ми наводимо явну оцінку швидкості збіжності.

Abstract. We consider the sequence of additive functionals of difference appro-ximations for multidimensional diffusion. Current paper specifies the result of [8] to give sufficient conditions for such sequence to converge weakly to a W-functional of a limited process. We provide an explicit estimation of such convergence speed.

Аннотация. Мы рассматриваем последовательность аддитивных функционалов от разностных аппроксимаций многомерного диффузионного процесса. Данная статья уточняет результат [8] по исследованию достаточных условий слабой сходимости такой последовательности к W-функционалу от предельного процесса. Мы приводим явную оценку скорости сходимости.

1. Вступ

У даній статті ми будемо розглядати багатовимірний дифузійний процес X в $\mathbf{R}^m$, $m \geq 2$, що визначений наступною рівністю:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(X(s))\,ds + \int_0^t b(X(s))\,dW(s), \qquad t \in \mathbf{R}^+, \tag{1}$$

і послідовність процесів X_n, $n \geq 1$, значення яких у моменти часу $\frac{k}{n}$, $k \in \mathbf{N}$, визначені співвідношеннями

$$X_n\left(\frac{k}{n}\right) = X_n\left(\frac{k-1}{n}\right) + a\left(X_n\left(\frac{k-1}{n}\right)\right) \cdot \frac{1}{n} + b\left(X_n\left(\frac{k-1}{n}\right)\right) \cdot \frac{\xi_k}{\sqrt{n}}, \tag{2}$$

а в інші моменти часу — лінійним чином як

$$X_n(t) = X_n\left(\frac{k-1}{n}\right) + (nt-k+1)\left[X_n\left(\frac{k}{n}\right) - X_n\left(\frac{k-1}{n}\right)\right], \qquad t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right). \tag{3}$$

Тут і надалі W — вінерівський процес в $\mathbf{R}^m$, ξ_k — послідовність н.о.р. випадкових векторів в $\mathbf{R}^m$ з нульовим середнім та одиничною коваріаційною матрицею. При накладанні певних умов на коефіцієнти співвідношень (1), (2), розподіли процесів X_n в $C(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^m)$ із заданою початковою умовою $X_n(0) = x$ слабко збігаються до розподілу процесу X з аналогічною умовою $X(0) = x$ (див. [8]).

Окреслимо основні об'єкти, з якими ми будемо працювати в даній статті:

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60J55; Secondary 60G45, 60F17.

Ключові слова і фрази. Адитивний функціонал, характеристика адитивного функціоналу, W-міра, марковська апроксимація, дифузійний процес, локальний час, швидкість збіжності.

1) граничний дифузійний і дограничні процеси, що визначені в (1)–(3);

2) $\{\phi^{s,t}, 0 \le s \le t\}$ — W-функціонал від дифузійного процесу, заданого в (1). Тобто, за означенням (див. [3], гл. 6), ϕ — майже однорідний неперервний невід'ємний адитивний функціонал з характеристикою $f^t(x) \equiv E[\phi^{0,t}|X(0) = x]$, $t \ge 0$, $x \in \mathbf{R}^m$, що задовольняє умову $\sup_x f^t(x) < +\infty$, $t \ge 0$;

3) послідовність невід'ємних адитивних функціоналів $\{\phi_n^{s,t}, 0 \le s \le t\}$, $n \ge 1$, від процесів X_n наступного вигляду:

$$\phi_n^{s,t} = \phi_n^{s,t}(X_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k:\ s \le k/n < t} F_n\left(X_n\left(\frac{k}{n}\right)\right), \qquad 0 \le s < t, \qquad F_n(\cdot) \ge 0.$$

Раніше, у праці О. М. Кулика (див. [8], Theorem 2.1) були отримані достатні умови слабкої збіжності послідовності спільних розподілів (ϕ_n, X_n) з початковою умовою $X_n(0) = x$ до спільного розподілу (ϕ, X) з початковою умовою $X(0) = x$. Залишилось відкритим питання про швидкість такої збіжності в термінах певної імовірнісної метрики між імовірнісними мірами — дограничними і граничним розподілами. Знаходження такої оцінки на швидкість збіжності у термінах метрики Васерштейна степеня 2 (див. Означення 2.3 нижче) і є основним результатом даної статті (Теорема 2.1 наступного розділу).

Одна з мотивацій даного дослідження пов'язана з тим, що збіжність $(\phi_n, X_n) \Rightarrow (\phi, X)$ дає теоретичну можливість застосування методу Монте-Карло для розв'язання задачі Коші вигляду (див. [8])

$$\begin{cases} u_t'(t,x) = \sum_{i=1}^m a_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} u(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m \sigma_{ij} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(t,x) - \frac{d\mu}{d\lambda^m}(x) u(t,x), \\ u(0,x) = g(x),\ \sigma \equiv (\sigma_{ij})_{i,j=1}^m = bb^*, \end{cases}$$

де λ^m — міра Лебега в $\mathbf{R}^m$, μ — W-міра, що визначена співвідношенням (див. [8]): $f^t(x) = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^m} p_r(x,y)\,\mu(dy)\,dr$, $x \in \mathbf{R}^m$, $t \ge 0$. Тут $\{p_t(x,y), t \ge 0, x, y \in \mathbf{R}^m\}$ — щільності перехідних імовірностей для процесу X.

В подальшому ми плануємо використати основний результат даної статті для оцінки точності методу моделювання Монте-Карло розв'язку вказаного параболічного рівняння з сингулярними коефіцієнтами.

2. Основні об'єкти і результати

Надалі під позначенням $\|\cdot\|_2$ будемо розуміти норму Евкліда незалежно від простору, на якому вона визначена. D — довільна додатна константа з точністю до перепозначень. Клас функцій з k неперервними похідними будемо позначати як C^k. Під C_b^k будемо розуміти клас функцій, що неперервні та обмежені разом із k похідними. Градієнт будемо позначати як $\bigtriangledown$. Під слабкою збіжністю мір μ_n до міри μ, за означенням, будемо розуміти збіжність $\int_{\mathbf{R}^m} f\,d\mu_n \to \int_{\mathbf{R}^m} f d\mu$ для будь-якої $f \in C_b(\mathbf{R}^m)$.

Аналогічно W-функціоналу, характеристику f_n функціонала ϕ_n визначаємо як

$$f_n^{s,t}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{E}\left[\phi_n^{s,t} \mid X(s) = x\right], \qquad s \in \frac{1}{n}\mathbf{N},\ t \ge s,\ x \in \mathbf{R}^m.$$

Коректність такого означення вказана в [4]. З метою узгодженості позначень, ми будемо використовувати запис $f^{s,t} \equiv f^{t-s}$ для характеристики W-функціонала ϕ.

Означення 2.1. *W-мірою* (див. [3], співвідношення (8.37)) будемо називати міру μ, що задовольняє умову

$$\sup_x \int_{\|y-x\|_2 \le 1} \omega(\|y-x\|_2)\,\mu(dy) < \infty,$$

де

$$\omega(r) = \begin{cases} \max\{-\ln r, 1\}, & m = 2 \\ r^{2-m}, & m > 2. \end{cases}$$

Означення 2.2. Будемо казати, що послідовність процесів $\{X_n\}$ задає *марковську апроксимацію* процесу X (див. [4]), якщо для довільних $\gamma > 0$, $T < +\infty$ існує $K(\gamma, T) \in \mathbf{N}$ і послідовність 2-компонентних процесів $\{\widehat{Y}_n = (\widehat{X}_n, \widehat{X}^n)\}$, визначених на іншому імовірнісному просторі, такі, що

(i) $\widehat{X}_n \stackrel{d}{=} X_n$, $\widehat{X}^n \stackrel{d}{=} X$;

(ii) процес $\widehat{Y}_n$, разом із процесами $\widehat{X}_n$, $\widehat{X}^n$, задовольняє марковську властивість у точках $iK(\gamma, T)/n$, $i \in \mathbf{N}$, відносно фільтрації $\{\widehat{\mathcal{F}}_t^n = \sigma(\widehat{Y}_n(s), s \le t)\}$;

(iii)

$$\limsup_{n\to+\infty} \mathsf{P}\left(\sup_{i \le \frac{Tn}{K(\gamma,T)}} \left\| \widehat{X}_n\left(\frac{iK(\gamma,T)}{n}\right) - \widehat{X}^n\left(\frac{iK(\gamma,T)}{n}\right) \right\|_2 > \gamma \right) < \gamma.$$

Означення 2.3 ([2], Означення 16.22)**.** *Метрикою Васерштейна степеня 2* називається функція

$$d_{W,2}(\widetilde{\mu}, \widehat{\mu}) = \inf_{(Y_1,Y_2)\in C(\widetilde{\mu},\widehat{\mu})} \left[\mathsf{E}\,\|Y_1 - Y_2\|_2^2\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad \widetilde{\mu}, \widehat{\mu} \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^m),$$

де $\mathcal{P}(\mathbf{R}^m)$ — клас імовірнісних мір на $(\mathbf{R}^m, \mathcal{B}(\mathbf{R}^m))$, а $C(\widetilde{\mu}, \widehat{\mu})$ — клас усіх випадкових елементів $Z = (Y_1, Y_2)$ зі значеннями у просторі $(\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m, \mathcal{B}(\mathbf{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbf{R}^m))$, у яких перша компонента Y_1 має розподіл $\widetilde{\mu}$, а друга компонента Y_2 має розподіл $\widehat{\mu}$.

Означення 2.4 ([2], Означення 16.21)**.** *Ліпшицевою метрикою* називається функція

$$\|\widetilde{\mu} - \widehat{\mu}\|_{\mathrm{Lip}} = \sup_{f:\ \mathrm{Lip}(f)\le 1} \left| \int_{\mathbf{R}^m} f\, d\widetilde{\mu} - \int_{\mathbf{R}^m} f\, d\widehat{\mu} \right|, \qquad \widetilde{\mu}, \widehat{\mu} \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^m),$$

де $\mathrm{Lip}(f)$ — стала Ліпшиця функції f.

Тепер сформулюємо основний результат даної статті.

Теорема 2.1. *Нехай задані процеси, визначені в* (1)–(3)*, та виконані наступні умови:*

A1) $a \in C_b^2(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^m)$, $b \in C_b^2(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^{m\times m})$ *та існують додатні константи* C_1, C_2 *такі, що* $C_1\|\vartheta\|_2^2 \le (b(x)b^*(x)\vartheta, \vartheta)_{\mathbf{R}^m} \le C_2\|\vartheta\|_2^2$, $x, \vartheta \in \mathbf{R}^m$*;*

A2) $\{\xi_k\}$ *— послідовність н.о.р. випадкових векторів у* $\mathbf{R}^m$ *з нульовим середнім та одиничною коваріаційною матрицею;*

A3) випадкові вектори $\{\xi_k\}$ *мають щільність розподілу* $p \in C^4(\mathbf{R}^m)$*. Існує функція* ψ *така, що*

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^m} \psi(x) < +\infty, \qquad \int_{\mathbf{R}^m} \|x\|_2^{m^2+2m+4} \psi(x)\, dx < +\infty$$

і

$$\left| \frac{\partial^i p}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_i}}(x) \right| \le \psi(x), \qquad x \in \mathbf{R}^m,\ i = 0, \dots, 4,\ j_1, \dots, j_i \in \{1, \dots, m\};$$

A4) $F_n(x) \ge 0$ *— обмежені,* $x \in \mathbf{R}^m$, $n \ge 1$, *і існує* $\alpha > 0$*:*

$$\delta_n \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{F_n(x) \mid x \in \mathbf{R}^m\} = O(n^{-\alpha}), \qquad n \to +\infty;$$

A5) Міри $\mu_n(dx) \equiv nF_n(x)\,\lambda^m(dx)$ *слабко збігаються, коли* $n \to \infty$*, до скінченої міри* μ *з компактним носієм;*

A6) Існують $C \in \mathbf{R}^+$, $\nu > m-2$ такі, що $\mu_n(\{y| \|y-x\|_2 \le \varepsilon\}) \le C\varepsilon^\nu$, $n \ge 1$, $\varepsilon > 0$;

A7) Існує $\beta > 0$ таке, що $\|\mu - \mu_n\|_{\mathrm{Lip}} = O(n^{-\beta})$, $n \to +\infty$;

A8) Для граничного функціонала ϕ виконана наступна умова:

$$\exists p > 2, r > 0, L > 0\colon \quad \mathsf{E}(\phi^{t',t''})^p \le L(t''-t')^{r+1}, \quad 0 < t' < t'' < T;$$

Тоді

$$d^2_{W,2}\left(\theta_n^{0,T}, \theta^{0,T}\right) \le \begin{cases} \operatorname{Var} n^{-\varkappa}, & m \ge 3, \\ \operatorname{Var} n^{-\varkappa} \cdot \ln n, & m = 2, \end{cases}$$

де $\theta_n^{s,t}$, $\theta^{s,t}$ — розподіли функціоналів $\phi_n^{s,t}$, $\phi^{s,t}$ відповідно,

$$\varkappa = \varkappa(\alpha, \beta, m, \nu, p, r) = \min\left\{ \frac{\chi(m,\nu)}{1 + \frac{p}{r}\chi(m,\nu)}, \frac{\alpha \cdot \chi(m,\nu)}{1 + \chi(m,\nu)}, \frac{2u(m,\nu)\cdot \min\left\{\beta, \frac{1}{2}\right\}}{2u(m,\nu) + m + 1} \right\},$$

$$\chi(m,\nu) = \min\left\{ \frac{1}{6}, \frac{\nu - (m-2)}{3(\nu+m)} \right\}, \qquad u(m,\nu) = \min\left\{ \frac{1}{2}, \frac{\nu - (m-2)}{4} \right\}.$$

Доведення основного результату наводиться в розділі 4 і базується на наступному твердженні (див. Лема 2.1 нижче). Це твердження є близьким до Теореми 3.1 [4], але відрізняється присутністю явних оцінок на швидкість збіжності. Зокрема, при доведенні Леми 2.1, використовуючи допоміжний результат Леми 3.1, нами запропонована процедура отримання явної оцінки (5). Така оцінка в Теоремі 3.1 [4] не наводиться.

Лема 2.1. *Нехай для фіксованого n задано процеси X_n, X і виконані наступні умови:*

(1) Існують $\gamma > 0$, $T < +\infty$, $K(\gamma, T) \in \mathbf{N}$ і послідовність 2-компонентних процесів $\left\{\widehat{Y}_n = \left(\widehat{X}_n, \widehat{X}^n\right)\right\}$ такі, що виконані умови (i), (ii) означення марковської апроксимації разом з наступною умовою:

(iii′)

$$\mathsf{P}\left(\sup_{i \le \frac{Tn}{K(\gamma,T)}} \left\| \widehat{X}_n\left(\frac{iK(\gamma,T)}{n}\right) - \widehat{X}^n\left(\frac{iK(\gamma,T)}{n}\right) \right\|_2 > \gamma \right) < \gamma.$$

(2) Функція $F_n(\cdot)$ обмежена.

(3) Існує функція f, що є характеристикою W-функціонала ϕ від процесу Маркова X.

(4) Для функціонала ϕ виконана умова:

$$\exists p > 2, r > 0, L > 0\colon \quad \mathsf{E}\left(\phi^{t',t''}\right)^p \le L(t''-t')^{r+1}, \quad 0 < t' < t'' < T.$$

Тоді

$$\begin{aligned} d^2_{W,2}\left(\theta_n^{0,T}, \theta^{0,T}\right) &\le K(\gamma,T)\delta_n \left\|f_n^{0,T}\right\| + c\left(\frac{K(\gamma,T)}{n}\right)^{\frac{r}{p}} \left\|f^{0,T}\right\| \\ &\quad + 2\left(d(f_n, f) + G(f,\gamma,T)\right)\left(\left\|f^{0,T}\right\| + \left\|f_n^{0,T}\right\|\right) \\ &\quad + 4\sqrt{2\gamma}\cdot\left\|f^{0,T}\right\|^2 + 4\sqrt{\gamma}\left\|f^{0,T}\right\| \sqrt{K(\gamma,T)\delta_n \left\|f_n^{0,T}\right\| + 2\left\|f_n^{0,T}\right\|^2}, \end{aligned}$$

де $\theta_n^{s,t}$, $\theta^{s,t}$ — розподіли функціоналів $\phi_n^{s,t}$, $\phi^{s,t}$ відповідно,

$$G(f,\gamma,T) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{0 \le s \le t \le T,\ \|x'-x''\|_2 \le \gamma} |f^{s,t}(x') - f^{s,t}(x'')|,$$

$$\delta_n \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{F_n(x)|\ x \in \mathbf{R}^m\}, \qquad d(f_n, f) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{s = \frac{i}{n},\ t \in (s,T)} \|f_n^{s,t}(\cdot) - f^{s,t}(\cdot)\|,$$

$$\|g(\cdot)\| \equiv \sup_{x\in\mathbf{R}^m} |g(x)|, \qquad c^2 = c^2(r,p,T,L) = 2\cdot\left(1 + \frac{2^{3r+1}LT}{(2^{\frac{r}{2}}-1)\cdot\left(2^{\frac{r}{2p}}-1\right)^p(p-2)}\right).$$

3. Доведення Леми 2.1

Нехай γ, $K(\gamma,T)$ — фіксовані та $\widehat{X}_n$, $\widehat{X}^n$ — процеси, що задовольняють умови (i)–(iii$'$) з цими константами. Будемо розглядати функціонали $\phi_n(\widehat{X}_n)$, $\phi(\widehat{X}^n)$, розподіли та характеристики яких, очевидно, збігаються із розподілами та характеристиками відповідно $\phi_n(X_n)$, $\phi(X)$. Перепозначимо для зручності

$$\phi_n = \phi_n(\widehat{X}_n), \qquad \phi = \phi(\widehat{X}^n), \qquad K = K(\gamma,T),$$
$$\mathcal{F}_t = \widehat{\mathcal{F}}^n_t \equiv \sigma\left(\widehat{X}_n(s), \widehat{X}^n(s),\ s\le t\right).$$

Тоді (див. співвідношення (3.4) в [4]) для довільного $t\in\left(\frac{Ki}{n},T\right]$:

$$\mathsf{E}\left[\phi^{\frac{Ki}{n},t}\mid \mathcal{F}_{\frac{Ki}{n}}\right] = f^{\frac{Ki}{n},t}\left(\widehat{X}^n\left(\frac{Ki}{n}\right)\right),\ E\left[\phi_n^{\frac{Ki}{n},t}|\mathcal{F}_{\frac{Ki}{n}}\right] = f_n^{\frac{Ki}{n},t}\left(\widehat{X}_n\left(\frac{Ki}{n}\right)\right).$$

Розглянемо розбиття півосі $\mathbf{R}^+$ точками вигляду $\frac{Ki}{n}$, $i\in\mathbf{N}$, позначимо

$$M_n = \left[\frac{nT}{K}\right]+1, \qquad \Delta_i^n \stackrel{\text{def}}{=} \phi_n^{\frac{(i-1)K}{n},\left(\frac{iK}{n}\right)\wedge T}, \qquad \widetilde{\Delta}_i^n \stackrel{\text{def}}{=} \phi^{\frac{(i-1)K}{n},\left(\frac{iK}{n}\right)\wedge T},$$
$$i=1,\dots,M_n.$$

Тоді

$$\begin{aligned}\left(\phi_n^{0,T}-\phi^{0,T}\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{M_n}\Delta_i^n-\widetilde{\Delta}_i^n\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{M_n}\Delta_i^n\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{M_n}\widetilde{\Delta}_i^n\right)^2 - 2\sum_{i=1}^{M_n}\sum_{j=1}^{M_n}\Delta_i^n\widetilde{\Delta}_j^n\\ &= S_1^n + 2S_2^n,\end{aligned}$$

де

$$S_1^n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{M_n}(\Delta_i^n)^2 + \sum_{i=1}^{M_n}(\widetilde{\Delta}_i^n)^2 - 2\sum_{i=1}^{M_n}\Delta_i^n\widetilde{\Delta}_i^n,$$

$$S_2^n \stackrel{\text{def}}{=} \left[\sum_{1\le i<l\le M_n}\Delta_i^n\Delta_l^n - \sum_{1\le i<j\le M_n}\Delta_i^n\widetilde{\Delta}_j^n\right] + \left[\sum_{1\le j<k\le M_n}\widetilde{\Delta}_j^n\widetilde{\Delta}_k^n - \sum_{1\le j<i\le M_n}\Delta_i^n\widetilde{\Delta}_j^n\right].$$

Оцінимо окремо значення математичного сподівання від S_1^n, S_2^n.

Оскільки Δ_i^n, $\widetilde{\Delta}_i^n$ — невід'ємні, маємо:

$$S_1^n \le \sum_{i=1}^{M_n}(\Delta_i^n)^2 + \sum_{i=1}^{M_n}(\widetilde{\Delta}_i^n)^2. \tag{4}$$

Оцінимо значення математичного сподівання від кожного доданку окремо.

$$\mathsf{E}\sum_{i=1}^{M_n}(\Delta_i^n)^2 \le \mathsf{E}\left(\sup_{i=1,M_n}\Delta_i^n\right)\sum_{i=1}^{M_n}\Delta_i^n \le K\delta_n f_n^{0,T}\left(\widehat{X}_n(0)\right) \le K\delta_n\left\|f_n^{0,T}\right\|.$$

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\sum_{i=1}^{M_n}(\widetilde{\Delta}_i^n)^2 &\le \mathsf{E}\left(\sup_{i=1,M_n}\widetilde{\Delta}_i^n\right)\sum_{i=1}^{M_n}\widetilde{\Delta}_i^n \le \mathsf{E}\left(\sup_{|t'-t''|\le\frac{K}{n}}\phi^{t',t''}\right)\phi^{0,T}\\ &\le \sqrt{\mathsf{E}\left(\sup_{|t'-t''|\le\frac{K}{n}}\phi^{t',t''}\right)^2}\cdot\sqrt{\mathsf{E}\left(\phi^{0,T}\right)^2}.\end{aligned}$$

Згідно з Лемою 6.4 [3]:

$$\sqrt{\mathsf{E}\left(\phi^{0,T}\right)^2} \le \sqrt{2}\left\|f^{0,T}\right\|.$$

Позначимо $\eta := \sup_{|t'-t''|\le\frac{K}{n}} \phi^{t',t''}$. Тоді $\mathsf{E}\,\eta^2 = 2\int_0^\infty x(1-F_\eta(x))\,dx$.

Далі скористаємося наступним результатом:

Лема 3.1 (Лема 1 [1, ст. 240]). *Нехай $\zeta(t)$, $t\in[0,T]$, — сепарабельний процес зі значеннями у повному метричному просторі з відстанню $\rho(\cdot,\cdot)$, для якого існують невід'ємна монотонно неспадна функція $g(h)$ і функція $q(c,h)$, $h\ge 0$, такі, що*

$$\mathsf{P}\{\rho(\zeta(t+h),\zeta(t)) > Cg(h)\} \le q(C,h)$$

і

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} g\left(2^{-n}T\right), \qquad Q(C) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n q\left(C, 2^{-n}T\right) < \infty.$$

Тоді

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0\le t'<t''\le T} \rho(\zeta(t'),\zeta(t'')) > N\right\} \le Q\left(\frac{N}{2G}\right)$$

і

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{|t'-t''|\le\varepsilon} \rho(\zeta(t'),\zeta(t'')) > CG\left(\left[\lg_2\frac{T}{2\varepsilon}\right]\right)\right\} \le Q\left(\left[\lg_2\frac{T}{2\varepsilon}\right], C\right),$$

де

$$G(j) = \sum_{n=j}^{\infty} g\left(2^{-n}T\right), \qquad Q(j,C) = \sum_{n=j}^{\infty} 2^n q\left(C, 2^{-n}T\right).$$

Поклавши $g(h) := h^{r'/p}$, де $0 < r' < r$ — довільне, $q(C,h) := C^{-p}Lh^{r-r'+1}$, неважко переконатися, що для $\zeta(t)\equiv\phi^{0,t}$, враховуючи умову Ліпшиця (4) Леми 2.1, виконуються умови Леми 3.1, причому

$$G\left(\left[\lg_2\frac{T}{2\varepsilon}\right]\right) \le \frac{2^{3r'/p}}{2^{r'/p}-1}\cdot\varepsilon^{r'/p}, \qquad Q\left(\left[\lg_2\frac{T}{2\varepsilon}\right], C\right) \le C^{-p}LT\frac{2^{3(r-r')}}{2^{r-r'}-1}\cdot\varepsilon^{r-r'}.$$

Тоді для $\varepsilon = \frac{K}{n}$ та $C = \frac{x}{G\left(\left[\lg_2\frac{T}{2\varepsilon}\right]\right)}$:

$$\begin{aligned}
1-F_\eta(x) = \mathsf{P}(\eta > x) &\le Q\left(\left[\lg_2\frac{T}{2\varepsilon}\right], \frac{x}{G\left(\left[\lg_2\frac{T}{2\varepsilon}\right]\right)}\right)\\
&\le \left(\frac{x}{G\left(\left[\lg_2\frac{T}{2\varepsilon}\right]\right)}\right)^{-p} LT\frac{2^{3(r-r')}}{2^{r-r'}-1}\cdot\varepsilon^{r-r'}\\
&= x^{-p}G^p\left(\left[\lg_2\frac{T}{2\varepsilon}\right]\right) LT\frac{2^{3(r-r')}}{2^{r-r'}-1}\cdot\varepsilon^{r-r'}\\
&\le x^{-p}LT\frac{2^{3(r-r')}}{2^{r-r'}-1}\cdot\varepsilon^{r-r'}\cdot\left(\frac{2^{3r'/p}}{2^{r'/p}-1}\cdot\varepsilon^{r'/p}\right)^p\\
&= \frac{2^{3r}x^{-p}LT}{\left(2^{r-r'}-1\right)\cdot\left(2^{r'/p}-1\right)^p}\cdot\varepsilon^r.
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\,\eta^2 &= 2\int_0^\infty x\,(1-F_\eta(x))\;dx = 2\left(\int_0^{\varepsilon^{r/p}} x\,(1-F_\eta(x))\,dx + \int_{\varepsilon^{r/p}}^\infty x\,(1-F_\eta(x))\;dx\right)\\
&\le 2\left(\int_0^{\varepsilon^{r/p}} x\,dx + \int_{\varepsilon^{r/p}}^\infty x\,(1-F_\eta(x))\;dx\right) = \varepsilon^{2r/p} + 2\int_{\varepsilon^{r/p}}^\infty x\,(1-F_\eta(x))\;dx\\
&\le \varepsilon^{2r/p} + 2\int_{\varepsilon^{r/p}}^\infty x\cdot\frac{2^{3r}x^{-p}LT}{(2^{r-r'}-1)\cdot\left(2^{r'/p}-1\right)^p}\cdot\varepsilon^r\,dx\\
&= \left(1+\frac{2^{3r+1}LT}{(2^{r-r'}-1)\cdot\left(2^{r'/p}-1\right)^p(p-2)}\right)\cdot\varepsilon^{2r/p}\\
&= \left(1+\frac{2^{3r+1}LT}{(2^{r-r'}-1)\cdot\left(2^{r'/p}-1\right)^p(p-2)}\right)\cdot K^{2r/p}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{2r/p}, \qquad p>2.
\end{aligned}$$

В силу довільності $0<r'<r$, покладемо $r'=\frac{r}{2}$ і позначимо

$$c^2(r,p,T,L) := 2\cdot\left(1+\frac{2^{3r+1}LT}{\left(2^{\frac{r}{2}}-1\right)\cdot\left(2^{\frac{r}{2p}}-1\right)^p(p-2)}\right).$$

Отже, $\mathsf{E}\,\eta^2 \le \frac{1}{2}c^2(r,p,T,L)\cdot K^{2r/p}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{2r/p}$, $p>2$.

Тоді

$$\mathsf{E}\sum_{i=1}^{M_n}(\widetilde{\Delta}_i^n)^2 \le \sqrt{\mathsf{E}\left(\sup_{|t'-t''|\le\frac{T}{n}}\phi^{t',t''}\right)^2}\cdot\sqrt{\mathsf{E}\left(\phi^{0,T}\right)^2} \le c(r,p,T,L)\cdot K^{r/p}\left(\frac{1}{n}\right)^{r/p}\left\|f^{0,T}\right\|.$$

Таким чином, підставляючи отримані результати в (4), маємо оцінку для $\mathsf{E}\,S_1^n$:

$$\mathsf{E}\,S_1^n \le K\delta_n\left\|f_n^{0,T}\right\| + c(r,p,T,L)\cdot K^{r/p}\left(\frac{1}{n}\right)^{r/p}\left\|f^{0,T}\right\|. \tag{5}$$

Для оцінки значення математичного сподівання від S_2^n скористаємося алгоритмом, представленим у співвідношеннях (3.5)–(3.11) в [4]:

$$S_2^n = \left[\sum_{1\le i<l\le M_n}\Delta_i^n\Delta_l^n - \sum_{1\le i<j\le M_n}\Delta_i^n\widetilde{\Delta}_j^n\right] + \left[\sum_{1\le j<k\le M_n}\widetilde{\Delta}_j^n\widetilde{\Delta}_k^n - \sum_{1\le j<i\le M_n}\Delta_i^n\widetilde{\Delta}_j^n\right].$$

Тоді

$$\mathsf{E}\,S_2^n = \mathsf{E}\sum_{i=1}^{M_n-1}\Delta_i^n\left[\phi_n^{\frac{Ki}{n},T} - \phi^{\frac{Ki}{n},T}\right] - \mathsf{E}\sum_{i=1}^{M_n-1}\widetilde{\Delta}_i^n\left[\phi_n^{\frac{Ki}{n},T} - \phi^{\frac{Ki}{n},T}\right]. \tag{6}$$

Оцінимо спочатку другий доданок в (6), враховуючи вимірність $\widetilde{\Delta}_i^n$ відносно $\mathcal{F}_{\frac{Ki}{n}}$:

$$\begin{aligned}
-\,\mathsf{E}\sum_{i=1}^{M_n-1}\widetilde{\Delta}_i^n\left[\phi_n^{\frac{Ki}{n},T} - \phi^{\frac{Ki}{n},T}\right] &= -\,\mathsf{E}\sum_{i=1}^{M_n-1}\widetilde{\Delta}_i^n\,\mathsf{E}\left[\left(\phi_n^{\frac{Ki}{n},T} - \phi^{\frac{Ki}{n},T}\right)\;\Big|\;\mathcal{F}_{\frac{Ki}{n}}\right]\\
&= -\,\mathsf{E}\sum_{i=1}^{M_n-1}\widetilde{\Delta}_i^n\left(f_n^{\frac{Ki}{n},T}\left(\widehat{X}_n\left(\frac{Ki}{n}\right)\right) - f^{\frac{Ki}{n},T}\left(\widehat{X}^n\left(\frac{Ki}{n}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \mathsf{E}\sum_{i=1}^{M_n-1}\widetilde{\Delta}_i^n\left|f_n^{\frac{Ki}{n},T}\left(\widehat{X}_n\left(\frac{Ki}{n}\right)\right)-f^{\frac{Ki}{n},T}\left(\widehat{X}_n\left(\frac{Ki}{n}\right)\right)\right|\\
&\quad+\mathsf{E}\sum_{i=1}^{M_n-1}\widetilde{\Delta}_i^n\left|f^{\frac{Ki}{n},T}\left(\widehat{X}_n\left(\frac{Ki}{n}\right)\right)-f^{\frac{Ki}{n},T}\left(\widehat{X}^n\left(\frac{Ki}{n}\right)\right)\right|\\
&\leq d(f_n,f)\left\|f^{0,T}\right\|+\mathsf{E}\sum_{i=1}^{M_n-1}\widetilde{\Delta}_i^n\left|f^{\frac{Ki}{n},T}\left(\widehat{X}_n\left(\frac{Ki}{n}\right)\right)-f^{\frac{Ki}{n},T}\left(\widehat{X}^n\left(\frac{Ki}{n}\right)\right)\right|.
\end{aligned}
$$

Для оцінки останнього доданку позначимо

$$
\Omega_{\gamma,T}=\left\{\sup_{i\leq\frac{Tn}{K}}\rho\left(\widehat{X}_n\left(\frac{Ki}{n}\right),\widehat{X}^n\left(\frac{Ki}{n}\right)\right)>\gamma\right\}.
$$

Нагадаємо, що $\mathsf{P}\left(\Omega_{\gamma,T}\right)<\gamma$. Тоді

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}\sum_{i=1}^{M_n-1}\widetilde{\Delta}_i^n\left|f^{\frac{Ki}{n},T}\left(\widehat{X}_n\left(\frac{Ki}{n}\right)\right)-f^{\frac{Ki}{n},T}\left(\widehat{X}^n\left(\frac{Ki}{n}\right)\right)\right|\\
&\quad\leq \mathsf{E}\,\phi^{0,T}G(f,\gamma,T)\mathbb{1}_{\Omega\setminus\Omega_{\gamma,T}}\\
&\qquad+\mathsf{E}\sum_{i=1}^{M_n-1}\widetilde{\Delta}_i^n\left|f^{\frac{Ki}{n},T}\left(\widehat{X}_n\left(\frac{Ki}{n}\right)\right)-f^{\frac{Ki}{n},T}\left(\widehat{X}^n\left(\frac{Ki}{n}\right)\right)\right|\mathbb{1}_{\Omega_{\gamma,T}}\\
&\quad\leq\|f^{0,T}\|\cdot G(f,\gamma,T)\\
&\qquad+\mathsf{E}\sum_{i=1}^{M_n-1}\widetilde{\Delta}_i^n\left|f^{\frac{Ki}{n},T}\left(\widehat{X}_n\left(\frac{Ki}{n}\right)\right)-f^{\frac{Ki}{n},T}\left(\widehat{X}^n\left(\frac{Ki}{n}\right)\right)\right|\mathbb{1}_{\Omega_{\gamma,T}}.
\end{aligned}
$$

Для оцінки останнього доданку скористаємося нерівністю Коші:

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}\sum_{i=1}^{M_n-1}\widetilde{\Delta}_i^n\left|f^{\frac{Ki}{n},T}\left(\widehat{X}_n\left(\frac{Ki}{n}\right)\right)-f^{\frac{Ki}{n},T}\left(\widehat{X}^n\left(\frac{Ki}{n}\right)\right)\right|\mathbb{1}_{\Omega_{\gamma,T}}\\
&\quad\leq 2\left\|f^{0,T}\right\|\mathsf{E}\,\phi^{0,T}\mathbb{1}_{\Omega_{\gamma,T}}\leq 2\left\|f^{0,T}\right\|\left[\mathsf{E}\left(\phi^{0,T}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}[\mathsf{P}(\mathbb{1}_{\Omega_{\gamma,T}})]^{\frac{1}{2}}\leq 2\sqrt{2\gamma}\cdot\left\|f^{0,T}\right\|^2.
\end{aligned}
$$

Отже, маємо оцінку для другого доданку в (6):

$$
-\mathsf{E}\sum_{i=1}^{M_n-1}\widetilde{\Delta}_i^n\left[\phi_n^{\frac{Ki}{n},T}-\phi^{\frac{Ki}{n},T}\right]\leq d(f_n,f)\left\|f^{0,T}\right\|+\left\|f^{0,T}\right\|\cdot G(f,\gamma,T)+2\sqrt{2\gamma}\cdot\left\|f^{0,T}\right\|^2.
$$

Міркуваннями, аналогічними до попередніх, дістаємо наступну оцінку:

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}\sum_{i=1}^{M_n-1}\Delta_i^n\left[\phi_n^{\frac{Ki}{n},T}-\phi^{\frac{Ki}{n},T}\right]\\
&\quad\leq d(f_n,f)\left\|f_n^{0,T}\right\|+\left\|f_n^{0,T}\right\|\cdot G(f,\gamma,T)+2\left\|f^{0,T}\right\|\left[\mathsf{E}\left(\phi_n^{0,T}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}[\mathsf{P}(\mathbb{1}_{\Omega_{\gamma,T}})]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Оцінимо тепер $\mathsf{E}(\phi_n^{0,T})^2$:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\left(\phi_n^{0,T}\right)^2&=\mathsf{E}\sum_{i=1}^{M_n}(\Delta_i^n)^2+2\,\mathsf{E}\sum_{1\leq i<j\leq M_n}\Delta_i^n\Delta_j^n=\mathsf{E}\sum_{i=1}^{M_n}(\Delta_i^n)^2+2\,\mathsf{E}\sum_{i=1}^{M_n}\Delta_i^n\phi_n^{\frac{iK}{n},T}\\
&\leq\mathsf{E}\sum_{i=1}^{M_n}(\Delta_i^n)^2+2\,\mathsf{E}\sum_{i=1}^{M_n}\Delta_i^n\left\|f_n^{0,T}\right\|\leq K\delta_n\left\|f_n^{0,T}\right\|+2\left\|f_n^{0,T}\right\|^2.
\end{aligned}
$$

Отже,

$$\mathsf{E}\sum_{i=1}^{M_n-1}\Delta_i^n\left[\phi_n^{\frac{Ki}{n},T}-\phi^{\frac{Ki}{n},T}\right]$$

$$\le d(f_n,f)\left\|f_n^{0,T}\right\|+\left\|f_n^{0,T}\right\|\cdot G(f,\gamma,T)+2\left\|f^{0,T}\right\|\left[\mathsf{E}\left(\phi_n^{0,T}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\mathsf{P}(\mathbb{1}_{\Omega_{\gamma,T}})\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\le d(f_n,f)\left\|f_n^{0,T}\right\|+\left\|f_n^{0,T}\right\|\cdot G(f,\gamma,T)+2\sqrt{\gamma}\left\|f^{0,T}\right\|\sqrt{K\delta_n\left\|f_n^{0,T}\right\|+2\left\|f_n^{0,T}\right\|^2}.$$

Підставляючи отримані результати в (6), маємо:

$$\mathsf{E}\,S_2^n\le d(f_n,f)\left\|f^{0,T}\right\|+\left\|f^{0,T}\right\|\cdot G(f,\gamma,T)+2\sqrt{2\gamma}\cdot\left\|f^{0,T}\right\|^2+d(f_n,f)\left\|f_n^{0,T}\right\|$$
$$+\left\|f_n^{0,T}\right\|\cdot G(f,\gamma,T)+2\sqrt{\gamma}\left\|f^{0,T}\right\|\sqrt{K\delta_n\left\|f_n^{0,T}\right\|+2\left\|f_n^{0,T}\right\|^2}.$$

Тоді з отриманих оцінок для $\mathsf{E}\,S_1^n$, $\mathsf{E}\,S_2^n$ і співвідношень

$$d_{W,2}^2\left(\theta_n^{0,T},\theta^{0,T}\right)\le\mathsf{E}\left(\phi_n^{0,T}-\phi^{0,T}\right)^2=\mathsf{E}\,S_1^n+2\,\mathsf{E}\,S_2^n$$

отримуємо справедливість твердження леми.

4. Доведення Теореми 2.1.

При виконанні умов теореми, міри μ, μ_n є W-мірами, характеристики $f^{0,t}$ функціоналів $\phi^{s,t}=\int_s^t\frac{d\mu}{d\lambda^m}(X(r))\,dr$ представляються у вигляді (див. [8])

$$f^{0,t}(x)=\int_0^t\int_{\mathbf{R}^m}p_r(x,y)\,\mu(dy)\,dr,\qquad x\in\mathbf{R}^m,\ t\ge 0. \tag{7}$$

При цьому щільності перехідних імовірностей $p_t(x,y)$ задовольняють наступні умови (див. [3], Додатки §6):

B1) функція $p\colon(t,x,y)\mapsto p_t(x,y)$ — рівномірно неперервна на $[\delta,T]\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^m$ для довільного $0<\delta<T$;

B2) існують константи $M,\alpha_1>0$ такі, що

$$p_t(x,y)\le Mt^{-\frac{m}{2}}\exp\left(-\frac{\alpha_1\|x-y\|_2^2}{t}\right);\qquad\frac{\partial p_t(x,y)}{\partial t}\le Mt^{-\frac{m}{2}-1}\exp\left(-\frac{\alpha_1\|x-y\|_2^2}{t}\right);$$
$$\frac{\partial p_t(x,y)}{\partial x^i}\le Mt^{-\frac{m+1}{2}}\exp\left(-\frac{\alpha_1\|x-y\|_2^2}{t}\right);$$

B3) існують константи $M_1,M_2,\alpha_2,\beta_2,\lambda_2>0$ такі, що

$$p_t(x,y)\ge M_1t^{-\frac{m}{2}}\exp\left(-\frac{\alpha_2\|x-y\|_2^2}{t}\right)-M_2t^{-\frac{m}{2}+\lambda_2}\exp\left(-\frac{\beta_2\|x-y\|_2^2}{t}\right).$$

При виконанні умов A2)–A3) процеси X_n в моменти часу $t\in\frac{1}{n}\mathbf{N}$ мають щільності перехідних імовірностей $p_t^n(x,y)$ (див. [8]), тобто:

$$\mathsf{P}(X_n(t)\in\Gamma\mid X_n(s)=x)=\int_\Gamma p_{t-s}^n(x,y)\,dy,$$
$$s,t\in\frac{1}{n}\mathbf{N},\qquad s<t,\qquad x\in\mathbf{R}^m,\qquad\Gamma\in\mathcal{B}(\mathbf{R}^m),$$

причому для довільного $t\in\frac{1}{n}\mathbf{N}$ функція p_t^n є неперервною.

Тоді, легко бачити, характеристики f_n функціоналів φ_n визначаються як

$$f_n^{0,t}(x)=F_n(x)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[nt]}\int_{\mathbf{R}^m}p_{\frac{k}{n}}^n(x,y)\,\mu_n(dy).$$

Теорема 2.1 [5] і Теорема 1 [6] стверджують, що при виконанні умов A1)–A3) справедливою є наступна оцінка на відстань між щільностями p_t^n та граничною щільністю p_t:

B4) для довільного $T \in \mathbf{R}^+$

$$\sup_{n\in\mathbf{N},\ t\in\frac{1}{n}\mathbf{N},\ t\le T}\ \sup_{x,y\in\mathbf{R}^m} \sqrt{n}\cdot t^{\frac{m}{2}}\cdot\left(1+\left(\frac{\|y-x\|_2}{\sqrt{t}}\right)^m\right)\cdot|p_t(x,y)-p_t^n(x,y)|<+\infty.$$

Позначимо $H(\delta)=\int_{\|y-x\|_2\le\delta}\omega(\|y-x\|_2)\mu(dy)$, $H_n(\delta)=\int_{\|y-x\|_2\le\delta}\omega(\|y-x\|_2)\mu_n(dy)$, $B_k(x)=\{y\colon \|y-x\|_2\le 2^{-k}\}$, $x\in\mathbf{R}^m$, $k\ge 0$, причому, легко бачити,

$$\omega(\|y-x\|_2)|_{y\in B_{k-1}(x)\setminus B_k(x)}\le\begin{cases}\max_{\|y\|_2\ge 2^{-k}}\omega(\|y\|_2)=2^{k(m-2)}, & m\ge 3,\\ k, & m=2.\end{cases}$$

Оцінимо тепер $H(\delta)$, $H_n(\delta)$. Тут і надалі, якщо не вказано інше, оцінки проводяться для $m>2$, $\delta<1$. Випадок $m=2$ буде коментуватися окремо.

$$\begin{aligned}H(\delta)&=\int_{\|y-x\|_2\le\delta}\omega(\|y-x\|_2)\,\mu(dy)\le 2^{m-2}\cdot\sum_{k=[\log_2 1/\delta]}^{+\infty}\mu(B_k(x))2^{k(m-2)}\\&\le D\cdot\sum_{k=[\log_2 1/\delta]}^{+\infty}2^{-k\nu}\cdot 2^{k(m-2)}\le D\cdot 2^{-(\nu-(m-2))\log_2 1/\delta}=D\cdot\delta^{(\nu-(m-2))}.\end{aligned}$$

Аналогічно, $H_n(\delta)\le D\cdot\delta^{(\nu-(m-2))}$.

Зауваження 4.1. Застосовуючи аналогічну процедуру, неважко переконатися, що для $m=2$:

$$H(\delta),H_n(\delta)\le D\cdot\delta^{\nu}\ln\delta^{-1},\qquad \delta<1.$$

Користуючись результатами Леми 2.1, проаналізуємо складові отриманої оцінки для $d^2_{W,2}\left(\theta_n^{0,T},\theta^{0,T}\right)$, розділивши їх на групи за природою їх виникнення.

Першими розглянемо об'єкти, пов'язані з адитивними функціоналами та їх наближеннями ($\delta_n,\ d(f_n,f),\ G(f,\gamma,T)$). За умовою A4):

$$\delta_n=O(n^{-\alpha})\quad\text{для деякого }\alpha>0. \tag{8}$$

Оцінимо тепер $d(f_n,f)=\sup_{s=\frac{i}{n},\,t\in(s,T)}\|f_n^{s,t}(\cdot)-f^{s,t}(\cdot)\|$ за допомогою представлення

$$\begin{aligned}&f^{0,t}(x)-f_n^{0,t}(x)\\&\quad=f^{0,\delta}(x)-f_n^{0,\delta}(x)+\int_\delta^t\int_{\mathbf{R}^m}p_r(x,y)\,\mu(dy)\,dr-\frac{1}{n}\sum_{k=[\delta n]}^{[nt]}\int_{\mathbf{R}^m}p^n_{\frac{k}{n}}(x,y)\,\mu_n(dy)\\&\quad=\sum_{i=0}^{3}\Delta_i,\end{aligned}$$

де $\Delta_0=f^{0,\delta}(x)-f_n^{0,\delta}(x)$, $\Delta_1=\int_\delta^t\int_{\mathbf{R}^m}p_r(x,y)\,\mu(dy)\,dr-\frac{1}{n}\sum_{k=[\delta n]}^{[nt]}\int_{\mathbf{R}^m}p_{\frac{k}{n}}(x,y)\,\mu(dy)$, $\Delta_2=\frac{1}{n}\sum_{k=[\delta n]}^{[nt]}\int_{\mathbf{R}^m}p_{\frac{k}{n}}(x,y)[\mu(dy)-\mu_n(dy)]$,

$$\Delta_3=\frac{1}{n}\sum_{k=[\delta n]}^{[nt]}\int_{\mathbf{R}^m}\left[p_{\frac{k}{n}}(x,y)-p^n_{\frac{k}{n}}(x,y)\right]\,\mu_n(dy).$$

Для оцінки Δ_0 у припущенні, що $\delta<1$, спочатку розглянемо $\sup_{x\in\mathbf{R}^m}f_n^{0,\delta}(x)$ згідно з алгоритмом, описаним в [8].

З умов B2), B4) випливає, що для довільного $T \in \mathbf{R}^+$ існує константа $C_T \in \mathbf{R}^+$ така, що для довільних $t \in \frac{1}{n}\mathbf{N}$, $t \le T$, $n \in \mathbf{N}$:

$$p_t^n(x,y) \le C_T \cdot t^{-\frac{m}{2}} \left[\exp\left(-\frac{\alpha_1 \|x-y\|_2^2}{t} \right) + \left(1 + \left(\frac{\|y-x\|_2}{\sqrt{t}} \right)^m \right)^{-1} \right].$$

Тоді

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^m} f_n^{0,\delta}(x) \le \sup_{x \in \mathbf{R}^m} F_n(x) + \sup_{x \in \mathbf{R}^m} \int_{\mathbf{R}^m} K_{n,\delta}(\|y-x\|_2)\, \mu_n(dy),$$

де

$$K_{n,\delta}(z) = \frac{C_1}{n} \sum_{k=1}^{[n\delta]} \left(\frac{n}{k} \right)^{\frac{m}{2}} \cdot \left[\exp\left(-\alpha_1 z^2 \cdot \frac{n}{k} \right) + \left(1 + \left(z \cdot \sqrt{\frac{n}{k}} \right)^m \right)^{-1} \right], \qquad z \in \mathbf{R}^+.$$

Далі відмітимо, що для довільного $k \in \mathbf{N}$ і $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ виконуються наступні нерівності:

$$\left(\frac{n}{k} \right)^{\frac{m}{2}} \le \left(\frac{k+1}{k} \right)^{\frac{m}{2}} \cdot t^{-\frac{m}{2}} \le 2^{\frac{m}{2}} \cdot t^{-\frac{m}{2}},$$

$$\exp\left(-\alpha_1 z^2 \cdot \frac{n}{k} \right) + \left(1 + \left(z \cdot \sqrt{\frac{n}{k}} \right)^m \right)^{-1} \le \exp\left(\frac{-\alpha_1 z^2}{t} \right) + \left(1 + \left(\frac{z}{\sqrt{t}} \right)^m \right)^{-1}.$$

Таким чином, для довільного $k \in \mathbf{N}$:

$$\frac{1}{n} \left(\frac{n}{k} \right)^{\frac{m}{2}} \cdot \left[\exp\left(-\alpha_1 z^2 \cdot \frac{n}{k} \right) + \left(1 + \left(z \cdot \sqrt{\frac{n}{k}} \right)^m \right)^{-1} \right]$$
$$\le 2^{\frac{m}{2}} \cdot \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} t^{-\frac{m}{2}} \cdot \left[\exp\left(\frac{-\alpha_1 z^2}{t} \right) + \left(1 + \left(\frac{z}{\sqrt{t}} \right)^m \right)^{-1} \right] dt.$$

Тепер

$$K_{n,\delta}(z) \le 2^{\frac{m}{2}} C_1 \cdot \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} t^{-\frac{m}{2}} \cdot \left[\exp\left(\frac{-\alpha_1 z^2}{t} \right) + \left(1 + \left(\frac{z}{\sqrt{t}} \right)^m \right)^{-1} \right] dt$$
$$\le K_\delta(z) \equiv 2^{\frac{m}{2}} C_1 \cdot \int_0^{\delta} t^{-\frac{m}{2}} \cdot \left[\exp\left(\frac{-\alpha_1 z^2}{t} \right) + \left(1 + \left(\frac{z}{\sqrt{t}} \right)^m \right)^{-1} \right] dt.$$

За допомогою заміни $u = \frac{z^2}{t}$ отримуємо:

$$K_\delta(z) = 2^{\frac{m}{2}} C_1 \cdot z^{2-m} \cdot G\left(\frac{z^2}{\delta} \right),$$

де

$$G(y) = \int_y^{+\infty} u^{\frac{m}{2}-2} \left[\exp\left(-\alpha_1 u \right) + \left(1 + u^{\frac{m}{2}} \right)^{-1} \right] du.$$

Для довільного $m \ge 2$, $\delta < 1$ справедливі наступні дві оцінки (див. [8]):

$$K_\delta(z) \le D \cdot \omega(z) \cdot G(\delta^{-\frac{1}{2}}), \qquad z > \delta^{\frac{1}{4}}.$$
$$K_\delta(z) \le D \cdot \omega(z), \qquad z \in \mathbf{R}^+.$$

Тоді

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^m} f_n^{0,\delta}(x) \le \sup_{x \in \mathbf{R}^m} F_n(x) + D \cdot G(\delta^{-\frac{1}{2}}) \sup_{x \in \mathbf{R}^m} \int_{\mathbf{R}^m} \omega(\|y-x\|_2)\, \mu_n(dy)$$
$$+ D \cdot \sup_{x \in \mathbf{R}^m} \int_{\|y-x\|_2 \le \delta^{\frac{1}{4}}} \omega(\|y-x\|_2)\, \mu_n(dy).$$

При достатньо великих y:

$$G(y) = \int_y^{+\infty} u^{\frac{m}{2}-2} e^{-\alpha_1 u}\, du + \int_y^{+\infty} \frac{u^{\frac{m}{2}-2}}{1+u^{\frac{m}{2}}}\, du$$
$$\le \int_y^{+\infty} D\cdot e^{-\frac{1}{4}u}\, du + \int_y^{+\infty} u^{-2}\, du \le D\cdot \frac{1}{y}.$$

Таким чином, при достатньо малих $\delta = \delta(n) \to 0$, $n \to \infty$:

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^m} f_n^{0,\delta}(x) \le \sup_{x\in\mathbf{R}^m} F_n(x) + D\left(\delta^{\frac{1}{2}} + \delta^{\frac{\nu-(m-2)}{4}}\right) \le \sup_{x\in\mathbf{R}^m} F_n(x) + D\delta^{\min\{\frac{1}{2},\frac{\nu-(m-2)}{4}\}}.$$

І, як наслідок,

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^m} f_n^{0,\delta}(x) = O\left(n^{-\alpha} + \delta^{\min\{\frac{1}{2},\frac{\nu-(m-2)}{4}\}}\right), \qquad n\to+\infty.$$

Застосувавши аналогічну процедуру для $f^{0,\delta}(x)$, маємо:

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^m} f^{0,\delta}(x) = O\left(\delta^{\frac{\nu-(m-2)}{4}}\right), \qquad \delta\to 0. \tag{9}$$

Таким чином, маємо оцінку на $\sup_{x\in\mathbf{R}^m}|\Delta_0|$:

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^m} |\Delta_0| = O\left(n^{-\alpha} + \delta^{\min\{\frac{1}{2},\frac{\nu-(m-2)}{4}\}}\right), \qquad n\to+\infty.$$

Перейдемо до оцінки $\sup_{x\in\mathbf{R}^m}|\Delta_1|$.

$$|\Delta_1| = \left|\int_\delta^t\int_{\mathbf{R}^m} p_r(x,y)\,\mu(dy)\,dr - \frac{1}{n}\sum_{k=[\delta n]}^{[nt]}\int_{\mathbf{R}^m} p_{\frac{k}{n}}(x,y)\,\mu(dy)\right|$$
$$\le \sum_{k=[\delta n]}^{[nt]}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\int_{\mathbf{R}^m}\left|p_r(x,y) - p_{\frac{k}{n}}(x,y)\right|\,\mu(dy)\,dr$$
$$\le \sum_{k=[\delta n]}^{[nt]}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\int_{\mathbf{R}^m} Mr^{-\frac{m}{2}-1}\exp\left(-\frac{\alpha_1\|x-y\|_2^2}{r}\right)\cdot\left(r-\frac{k}{n}\right)\,\mu(dy)\,dr$$
$$\le \sum_{k=[\delta n]}^{[nt]}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\int_{\mathbf{R}^m} Mr^{-\frac{m}{2}-1}\cdot\left(r-\frac{k}{n}\right)\,\mu(dy)\,dr$$
$$\le \sum_{k=[\delta n]}^{[nt]}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\int_{\mathbf{R}^m} M\left(\frac{k}{n}\right)^{-\frac{m}{2}-1}\cdot\frac{1}{n}\,\mu(dy)\,dr$$
$$\le D\cdot\frac{1}{n^2}\sum_{k=[\delta n]}^{[nt]}\left(\frac{k}{n}\right)^{-\frac{m}{2}-1} = D\cdot\frac{1}{n^2}\sum_{k:\ \delta\le\frac{k}{n}<t}\left(\frac{k}{n}\right)^{-\frac{m}{2}-1}$$
$$\le D\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\delta^{-\frac{m}{2}-1}\cdot([nt]-[n\delta]+1) \le D\cdot\frac{1}{n}\cdot\delta^{-\frac{m}{2}-1}.$$

Отже, $\sup_{x\in\mathbf{R}^m}|\Delta_1| = O\left(\frac{1}{n}\cdot\delta^{-\frac{m}{2}-1}\right)$, $n\to+\infty$.

Тепер, враховуючи B2), знайдемо оцінку $\sup_{x\in\mathbf{R}^m}|\Delta_2|$.

$$\begin{aligned}|\Delta_2| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=[\delta n]}^{[nt]}\int_{\mathbf{R}^m} p_{\frac{k}{n}}(x,y)[\mu(dy)-\mu_n(dy)]\right| \\ &\le M\frac{1}{n}\sum_{k=[\delta n]}^{[nt]}\left(\frac{k}{n}\right)^{-\frac{m+1}{2}}\exp\left(-\frac{\alpha_1 n\|x-y\|_2^2}{k}\right)\cdot\|\mu-\mu_n\|_{\mathrm{Lip}} \\ &\le D\delta^{-\frac{m+1}{2}}\cdot\|\mu-\mu_n\|_{\mathrm{Lip}}.\end{aligned}$$

Враховуючи, що $\|\mu-\mu_n\|_{\mathrm{Lip}} = O(n^{-\beta})$, $\beta>0$, маємо:

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^m}|\Delta_2| = O\left(\delta^{-\frac{m+1}{2}}\cdot n^{-\beta}\right), \qquad n\to+\infty.$$

Тепер, аналогічно попереднім оцінкам, враховуючи B4), оцінимо $\sup_{x\in\mathbf{R}^m}|\Delta_3|$.

$$\begin{aligned}|\Delta_3| &\le \frac{1}{n}\sum_{k=[\delta n]}^{[nt]}\int_{\mathbf{R}^m}\left|p_{\frac{k}{n}}(x,y)-p^n_{\frac{k}{n}}(x,y)\right|\mu_n(dy) \\ &\le \frac{D}{n\sqrt{n}}\sum_{k=[\delta n]}^{[nt]}\int_{\mathbf{R}^m}\left(\frac{k}{n}\right)^{-\frac{m}{2}}\left(1+\left(\frac{\|y-x\|_2}{\sqrt{t}}\right)^m\right)^{-1}\mu_n(dy) \\ &\le \frac{D}{n\sqrt{n}}\sum_{k=[\delta n]}^{[nt]}\int_{\mathbf{R}^m}\left(\frac{k}{n}\right)^{-\frac{m}{2}}\mu_n(dy) \le \frac{D}{n\sqrt{n}}\sum_{k=[\delta n]}^{[nt]}\left(\frac{k}{n}\right)^{-\frac{m}{2}} \le \frac{D}{\sqrt{n}}\cdot\delta^{-\frac{m}{2}}.\end{aligned}$$

Таким чином, $\sup_{x\in\mathbf{R}^m}|\Delta_3| = O\big(\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\delta^{-\frac{m}{2}}\big)$, $n\to+\infty$.
Поклавши $\delta=\delta(n)=n^{-\varrho}$, $0<\varrho<\min\{\frac{2\beta}{m+1},\frac{1}{m}\}$, маємо:

$$\begin{aligned}d(f_n,f) &= \sup_{s=\frac{i}{n},\,t\in(s,T)}\|f_n^{s,t}(\cdot)-f^{s,t}(\cdot)\| \\ &= O\left(n^{-\alpha}+n^{-\varrho\min\{\frac{1}{2},\frac{\nu-(m-2)}{4}\}}+n^{\frac{\varrho(m+1)}{2}-\min\{\beta,\frac{1}{2}\}}\right), \qquad n\to+\infty.\end{aligned}$$

Остаточно, поклавши $\varrho=\frac{2v}{2u+m+1}$, де $u\equiv\min\{\frac{1}{2},\frac{\nu-(m-2)}{4}\}$, $v\equiv\min\{\beta,\frac{1}{2}\}$, маємо:

$$d(f_n,f) = \sup_{s=\frac{i}{n},\,t\in(s,T)}\|f_n^{s,t}(\cdot)-f^{s,t}(\cdot)\| = O\left(n^{-\alpha}+n^{-\frac{2uv}{2u+m+1}}\right), \qquad n\to+\infty. \quad (10)$$

Перейдемо до оцінки $G(f,\gamma,T)=\sup_{0\le s\le t\le T,\,\|x'-x''\|\le\gamma}|f^{s,t}(x')-f^{s,t}(x'')|$.

$$\begin{aligned}f^{s,t}(x')-f^{s,t}(x'') &= \int_0^{t-s}\int_{\mathbf{R}^m}(p_r(x',y)-p_r(x'',y))\,\mu(dy)\,dr \\ &= \int_0^{\delta_1}\int_{\mathbf{R}^m}(p_r(x',y)-p_r(x'',y))\,\mu(dy)\,dr \\ &\quad+\int_{\delta_1}^{t-s}\int_{\mathbf{R}^m}(p_r(x',y)-p_r(x'',y))\,\mu(dy)\,dr.\end{aligned}$$

Тоді $\sup_{x\in\mathbf{R}^m} f^{0,\delta_1}(x) = O\big(\delta_1^{\frac{\nu-(m-2)}{4}}\big)$, $\delta_1\to0$, і

$$\begin{aligned}\int_{\delta_1}^{t-s}\int_{\mathbf{R}^m}\|p_r(x',y)-p_r(x'',y)\|\,\mu(dy)\,dr &\le D\|x'-x''\|_2\int_{\delta_1}^{T} r^{-\frac{m+1}{2}}\,dr\cdot\int_{\mathbf{R}^m}\mu(dy) \\ &\le D\cdot\delta_1^{-\frac{m-1}{2}}\|x'-x''\|_2.\end{aligned}$$

Тепер для довільного $0 < \rho < \frac{2}{m-1}$, поклавши $\delta_1 = \|x' - x''\|_2^{\rho}$, маємо:

$$G(f,\gamma,T) = \sup_{0\le s\le t\le T,\ \|x'-x''\|_2\le\gamma} |f^{s,t}(x') - f^{s,t}(x'')| = O\left(\gamma^{1-\rho\cdot\frac{m-1}{2}} + \gamma^{\rho\frac{\nu-(m-2)}{4}}\right),$$

$\gamma \to 0$.

Остаточно, при $\rho = \frac{4}{\nu+m}$:

$$G(f,\gamma,T) = O\left(\gamma^{\frac{\nu-(m-2)}{\nu+m}}\right), \qquad \gamma \to 0. \tag{11}$$

Залишилось розглянути об'єкти γ, $K(\gamma,T)$, що пов'язані з ЦГТ.

Згідно з Лемою 3.1. [8], при виконанні умов теореми послідовність процесів X_n, що визначена в (2), (3), задає марковську апроксимацію процесу X, визначеного в (1). У ході доведення Леми 3.1. [8] зазначено, що, згідно з ЦГТ, враховуючи умови на $\{\xi_k\}$, отримуємо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ і випадковий вектор $(\eta_\varepsilon, \zeta_\varepsilon)$ такі, що

$$\mathsf{E}\,\|\eta_\varepsilon - \zeta_\varepsilon\|^2_{\mathbf{R}^m} < \varepsilon, \qquad \eta_\varepsilon \overset{\mathrm{d}}{=} \frac{S_{N_\varepsilon}}{\sqrt{N_\varepsilon}}, \qquad \zeta_\varepsilon \overset{\mathrm{d}}{=} W(1), \qquad S_N = \sum_{k=1}^{N} \xi_k.$$

При цьому при $K(\gamma,T) = N_\varepsilon$ і $\gamma^3 > D\cdot\varepsilon$ виконані всі умови означення марковської апроксимації.

Тепер, вибираючи $N_\varepsilon < D\cdot\varepsilon$ і $\varepsilon = n^{-\lambda}$, $0 < \lambda < \min(1,\alpha)$, маємо, що

$$K(\gamma,T) = O\left(n^{-\lambda}\right), \qquad \gamma = O\left(n^{-\frac{\lambda}{3}}\right), \qquad G(f,\gamma,T) = O\left(n^{-\frac{\lambda(\nu-(m-2))}{3(\nu+m)}}\right),$$
$$n \to +\infty.$$

Тоді, беручи до уваги оцінки (8)–(11) та результат Леми 2.1, маємо:

$$d^2_{W,2}\left(\theta_n^{0,T}, \theta^{0,T}\right) = O\left(n^{\lambda-\alpha} + n^{\frac{(\lambda-1)r}{p}} + n^{-\frac{2uv}{m+2u+1}} + n^{-\frac{\lambda(\nu-(m-2))}{3(\nu+m)}} + n^{-\frac{\lambda}{6}}\right),$$
$$n \to +\infty.$$

Позначимо $\chi \equiv \min\{\frac{1}{6}, \frac{\nu-(m-2)}{3(\nu+m)}\}$. Тоді

$$d^2_{W,2}\left(\theta_n^{0,T}, \theta^{0,T}\right) = O\left(n^{\lambda-\alpha} + n^{\frac{(\lambda-1)r}{p}} + n^{-\frac{2uv}{m+2u+1}} + n^{-\chi\lambda}\right), \qquad n \to +\infty.$$

Далі "згорнемо" доданки, що містять λ. Для цього розглянемо випадки:

1) $\alpha \ge \frac{1+\chi}{1+\frac{p}{r}\chi}$

Тоді, поклавши $\lambda = \frac{1}{1+\frac{p}{r}\chi}$, отримуємо, що $\lambda - \alpha \le \frac{(\lambda-1)r}{p} = -\chi\lambda$ і

$$n^{\lambda-\alpha} + n^{\frac{(\lambda-1)r}{p}} + n^{-\chi\lambda} \le D\cdot n^{-\frac{\chi}{1+\frac{p}{r}\chi}};$$

2) $0 < \alpha < \frac{1+\chi}{1+\frac{p}{r}\chi}$.

Тоді, поклавши $\lambda = \frac{\alpha}{1+\chi}$, отримуємо, що $\frac{(\lambda-1)r}{p} \le \lambda - \alpha = -\chi\lambda$ і

$$n^{\lambda-\alpha} + n^{\frac{(\lambda-1)r}{p}} + n^{-\chi\lambda} \le D\cdot n^{-\frac{\chi\alpha}{1+\chi}}.$$

Таким чином, при $m > 2$ маємо остаточну оцінку:

$$d^2_{W,2}\left(\theta_n^{0,T}, \theta^{0,T}\right) \le \begin{cases} D\cdot n^{-\min\left\{\frac{\chi}{1+\frac{p}{r}\chi}, \frac{2uv}{2u+m+1}\right\}}, & \text{якщо } \alpha \ge \frac{1+\chi}{1+\frac{p}{r}\chi} \\ D\cdot n^{-\min\left\{\frac{\chi\alpha}{1+\chi}, \frac{2uv}{2u+m+1}\right\}}, & \text{якщо } 0 < \alpha < \frac{1+\chi}{1+\frac{p}{r}\chi}, \end{cases}$$

Згідно із Зауваженням 4.1, неважко переконатися, що при $m = 2$ отримана вище оцінка швидкості збіжності уповільнюється додатковим множником $\ln n$, що і доводить основний результат.

5. Приклад

Нехай $m = 2$. Розглянемо послідовність мір π_n, що виникають як відповідні розподіли випадкових величин

$$\widetilde{\xi}_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k 3^{-k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \widetilde{\varepsilon}_k 3^{-k}, \sum_{k=n+1}^{\infty} \widehat{\varepsilon}_k 3^{-k} \right),$$

де ε_i, $\widetilde{\varepsilon}_j$, $\widehat{\varepsilon}_k$ — незалежні, $i, j, k \geq 1$ і

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 0 & \text{з ім. } \frac{1}{2}, \\ 2 & \text{з ім. } \frac{1}{2}, \end{cases} \qquad \widetilde{\varepsilon}_k = \begin{cases} 0 & \text{з ім. } \frac{1}{3}, \\ 1 & \text{з ім. } \frac{1}{3}, \\ 2 & \text{з ім. } \frac{1}{3}, \end{cases} \qquad \widehat{\varepsilon}_k = \begin{cases} 0 & \text{з ім. } \frac{1}{3}, \\ 1 & \text{з ім. } \frac{1}{3}, \\ 2 & \text{з ім. } \frac{1}{3}, \end{cases} \qquad k \geq 1.$$

Міра π_k рівномірно розподілена на 2^k квадратах, кожен із яких має сторону 3^{-k} і вагу $\frac{1}{2^k}$. Позначимо через C_k дану множину квадратів, на яких зосереджена міра π_k, і $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \colon x_1 \in [0,1],\ x_2 = 0\}$.

Послідовність мір π_n збігається до міри Кантора μ на відрізку S, тобто розподілу випадкової величини $\widetilde{\xi} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k 3^{-k}, 0\right)$. У якості апроксимуючих мір виберемо $\mu_n = \pi_{k_n}$, $k_n = [c \ln n]$, $n \geq 2$, константу c вкажемо пізніше.

Перевіримо виконання умов A4)–A8) Теореми 2.1.

Легко бачити, що $\pi_k(dx) = \left(\frac{9}{2}\right)^k \mathbb{I}_{C_k} dx$. Тоді для $n \geq 2$

$$nF_n(x) = \left(\frac{9}{2}\right)^{k_n} \mathbb{I}_{C_{k_n}}(x) \leq \left(\frac{9}{2}\right)^{c \ln n} = n^{c \ln \frac{9}{2}}.$$

Виберемо $c = \frac{1}{2 \ln \frac{9}{2}}$. Тоді умови A4)–A5) Теореми 2.1 виконані з $\alpha = \frac{1}{2}$.

Позначимо

$$B(x, r) = \{y \colon \|y - x\|_2 \leq r\}, \qquad I_{j,k} = \left[\frac{j-1}{3^k}, \frac{j}{3^k}\right] \times \left[0, \frac{1}{3^k}\right]$$

і доведемо спочатку, що μ_n задовольняє умову A6) для $B\left(x, 3^{-k}\right)$, $k \geq 1$.

В силу того, що $B\left(x, 3^{-k}\right)$ перетинає щонайбільше 3 квадрата $I_{j,k}$, маємо:

$$\mu_n\left(B\left(x, 3^{-k}\right)\right) \leq 3 \max_{1 \leq j \leq 3^k} \mu_n(I_{j,k}).$$

Тепер, якщо $n \geq k$, то, за побудовою,

$\mu_n(I_{j,k}) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 2^{-k} \end{array} \right.$ і $\mu_n\left(B\left(x, 3^{-k}\right)\right) \leq 3 \cdot 2^{-k} = 3 \cdot (3^{-k})^{\log_3 2}$.

Якщо $n < k$, то у квадраті площею 3^{-2n} лежить $3^{2(k-n)}$ квадратів площею 3^{-2k}. За побудовою, максимальна вага квадрата зі стороною 3^{-n} складає 2^{-n}, тоді максимальна вага квадрату зі стороною 3^{-k} складає

$$\frac{2^{-n}}{3^{2(k-n)}} = 3^{-2k} \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^n < 3^{-2k} \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^k = 2^{-k}.$$

І, знову ж таки, $\mu_n\left(B\left(x, 3^{-k}\right)\right) \leq 3 \cdot 2^{-k} = 3 \cdot (3^{-k})^{\log_3 2}$.

Отже, для довільних $n, k \geq 1$:

$$\mu_n\left(B\left(x, 3^{-k}\right)\right) \leq 3 \cdot (3^{-k})^{\log_3 2} \leq 3 \cdot (3^{-k})^{\frac{\log_3 2}{2}}.$$

Тоді для довільних $n, k \geq 1$, $r \in (3^{-k-1}, 3^{-k}]$:

$$\mu_n\left(B\left(x, r\right)\right) \leq \mu_n\left(B\left(x, 3^{-k}\right)\right) \leq 2 \cdot 2^{-k} < 2 \cdot r^{\frac{\log_3 2}{2}}.$$

Звідси маємо, що умова A6) справедлива для довільних $n, k \geq 1$, $r \in (0, 1/3]$ з константами $C = 3$, $\nu = \frac{\log_3 2}{2}$. При $r > 1/3$ маємо:

$$3 \cdot r^{\frac{\log_3 2}{2}} > 3 \cdot (1/3)^{\frac{\log_3 2}{2}} > 1 \geq \mu_n \left(B\left(x, r\right)\right).$$

Отже, умова A6) виконана з константами $C = 3$, $\nu = \frac{\log_3 2}{2}$.

В силу того, що для ліпшицевої функції f справедливо

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbf{R}^2} f\, d\mu - \int_{\mathbf{R}^2} f\, d\mu_n\right| \\
&\quad \leq \mathsf{E}\left| f\left(\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k 3^{-k}, 0\right) - f\left(\sum_{k=1}^{k_n} \varepsilon_k 3^{-k} + \sum_{k=k_n+1}^{\infty} \widetilde{\varepsilon}_k 3^{-k}, \sum_{k=k_n+1}^{\infty} \widehat{\varepsilon}_k 3^{-k}\right)\right| \\
&\quad \leq \operatorname{Lip}(f) \cdot \mathsf{E}\left(\left(\sum_{k=k_n+1}^{\infty} \varepsilon_k 3^{-k} - \sum_{k=k_n+1}^{\infty} \widetilde{\varepsilon}_k 3^{-k}\right)^2 + \left(\sum_{k=k_n+1}^{\infty} \widehat{\varepsilon}_k 3^{-k}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad < 3 \cdot 3^{-k_n} \leq 3 \cdot 3^{-c \ln n + 1} = 9 \cdot n^{-c \ln 3},
\end{aligned}$$

маємо виконання умови A7) з

$$\beta = c \ln 3 = \frac{\ln 3}{2 \ln \frac{9}{2}} = \frac{1}{2(2 - \log_3 2)}.$$

Далі скористаємося наступним твердженням.

Лема 5.1. *Нехай ϕ такий, що*

$$E_x \phi^{0,t} \leq D \cdot t^{\sigma}, \qquad \sigma > 0, \tag{$*$}$$

Тоді для довільного $p \in \mathbf{N}$ існує $C_p > 0$:

$$E_x (\phi^{0,t})^p \leq C_p \cdot t^{\sigma p}.$$

Доведення проведемо в 2 етапи:

(1) Нехай $\phi^{0,t}$ має інтегральне представлення:

$$\phi^{0,t} = \int_0^t g(X(r))\, dr.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
&E_x \left(\int_0^t g(X(r))\, dr\right)^p \\
&\quad = p!\, E_x \int_{0<r_1<r_2<\cdots<r_p<t} g(X(r_1)) g(X(r_2)) \ldots g(X(r_p))\, dr_1\, dr_2 \ldots\, dr_p \\
&\quad = p! \int_{0<r_1<r_2<\cdots<r_{p-1}<t} dr_1\, dr_2 \ldots\, dr_{p-1} \\
&\qquad\qquad \times \int_{r_{p-1}}^t dr_p E_x [g(X(r_1)) g(X(r_2)) \ldots g(X(r_{p-1})) E_x (g(X(r_p)) \mid \mathcal{F}_{r_{p-1}})] \\
&\quad = p! \int_{0<r_1<r_2<\cdots<r_{p-1}<t} dr_1\, dr_2 \ldots\, dr_{p-1} E_x \left[g(X(r_1)) g(X(r_2)) \ldots g(X(r_{p-1}))\right] \\
&\qquad\qquad \times \int_{r_{p-1}}^t E_{X(r_{p-1})} g(X(r_p - r_{p-1}))\, dr_p.
\end{aligned}$$

Позначивши $I_0^t(x) = \int_0^t E_x g(X(r))\,dr$ і повторивши вищезазначену процедуру p разів, маємо:

$$E_x\left(\int_0^t g(X(r))\,dr\right)^p$$
$$= p!\, I_0^{t-r_{p-1}}(X(r_{p-1})) \cdot I_0^{t-r_{p-2}}(X(r_{p-2})) \cdot \ldots \cdot I_0^{t-r_1}(X(r_1)) \cdot I_0^t(X(0)).$$

І, враховуючи, що $I_0^t(x) \le D \cdot t^\sigma$, маємо шукане.

(2) За теоремою 6.6 [3], при виконанні умов Леми 5.1, існує послідовність інтегральних $\{\phi_n\}$, що задовольняють $(*)$, така, що $\phi_n \to \phi$ в середньому квадратичному. Тоді, згідно з попереднім пунктом,

$$E_x(\phi_n^{0,t})^p \le C_p \cdot t^{\sigma p}$$

і за лемою Фату:

$$E_x(\phi^{0,t})^p \le C_p \cdot t^{\sigma p},$$

що і треба було довести.

Тепер, скориставшись результатом Леми 5.1 та оцінкою (9), що залишається справедливою при $\delta < T$, маємо виконання умови A8) з показниками p, $r(p) = \frac{\nu p}{4} - 1$. Вибираючи $p = 800$, маємо $r = 100\log_3 2 - 1 > 0$.

Тоді, неважко переконатися,

$$d_{W,2}^2\left(\theta_n^{0,T}, \theta^{0,T}\right) \le Dn^{-\varkappa} \cdot \ln n,$$

де

$$\varkappa = \frac{2u\beta}{2u+3}, \qquad u = \frac{\nu}{4} = \frac{\log_3 2}{8}, \qquad \beta = \frac{1}{2(2-\log_3 2)}.$$

Остаточно, маємо оцінку:

$$d_{W,2}^2\left(\theta_n^{0,T}, \theta^{0,T}\right) \le Dn^{-\frac{\log_3 2}{2(\log_3 2+12)(2-\log_3 2)}} \cdot \ln n.$$

Література

1. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов*, “Наука”, Москва, 1977.
2. Д. В. Гусак, О. Г. Кукуш, О. М. Кулик, Ю. С. Мішура, А. Ю. Пилипенко, *Збірник задач з теорії випадкоаих процесів та її застосувань*, “Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, Київ, 2008.
3. Е. Б. Дынкин, *Марковские процессы*, “Физ.-мат. ГИЗ”, Москва, 1963.
4. Yu. N. Kartashov and A. M. Kulik, *Weak convergence of additive functionals of a sequence of Markov chains*, Theory of Stochastic Processes **15(31)** (2009), no. 1, 15–32.
5. V. Konakov and E. Mammen, textitLocal limit theorems for transition densities of Markov chains converging to diffusions, Prob. Theory Rel. Fields **117** (2000), 551–587.
6. V. Konakov, *Small time asymptotics in local limit theorems for Markov chains converging to diffusions*, arxiv:math. PR/0602429, 2006.
7. А. М. Кулик, *Аддитивные функционалы марковских процессов и локальные времена случайных процессов*, Математика сегодня (2009), 39–66.
8. A. M. Kulik, *Difference approximation for local times of multidimensional diffusions*, Theory Probab. Math. Statist. **78** (2008), 67–83.
9. A. M. Kulik, *Markov approximation of stable processes by random walks*, Theory of Stochastic Processes **12(28)** (2006), no. 1–2, 87–93.
10. А. В. Скороход, *Асимптотические методы в теории стохастических дифференциальных уравнений*, “Наукова думка”, Киев, 1987.
11. А. В. Скороход, *Лекції з теорії випадкових процесів*, “Либідь”, Київ, 1990.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ 01601, Україна

Адреса електронної пошти: iurii_ganychenko@ukr.net

Надійшла 25/04/2013