Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 91, 2014, стор. 143–153

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 91, 2014, pp. 143–153

ВИПАДКОВА ВЕЛИЧИНА, СИМВОЛИ $\widetilde{L}$-ЗОБРАЖЕННЯ ЯКОЇ МАЮТЬ МАРКІВСЬКУ ЗАЛЕЖНІСТЬ

УДК 519.21

М. В. ПРАЦЬОВИТИЙ І Ю. В. ХВОРОСТІНА

Анотація. У роботі досліджується розподіл випадкової величини

$$\theta = \frac{1}{\theta_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\theta_1(\theta_1+1)\dots\theta_{n-1}(\theta_{n-1}+1)\theta_n},$$

де (θ_n) — послідовність випадкових величин, які приймають натуральні значення і утворюють однорідний Ланцюг Маркова з початковими ймовірностями $(p_1, p_2, \dots, p_n, \dots)$ і матрицей перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$, вивчається лебегівська структура (вміст дискретної, абсолютно неперервної та сингулярної компонент), тополого-метричні і фрактальні властивості спектра (мінімально замкненого носія міри).

Abstract. In the paper we consider the distributions of random variables

$$\theta = \frac{1}{\theta_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\theta_1(\theta_1+1)\dots\theta_{n-1}(\theta_{n-1}+1)\theta_n},$$

where (θ_n) is a sequence of random variables taking the values of positive integers to form a homogeneous Markov chain. Consider the Markov chain with initial probability $(p_1, p_2, \dots, p_n, \dots)$ and with transition matrix $\|p_{ik}\|$. We study Lebesgue structure of this distribution, topological, metric and fractal properties of the spectra of distribution (a minimal closed support of distribution).

Аннотация. В работе исследуется распределение случайной величины

$$\theta = \frac{1}{\theta_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\theta_1(\theta_1+1)\dots\theta_{n-1}(\theta_{n-1}+1)\theta_n},$$

где (θ_n) — последовательность случайных величин, которые принимают натуральные значения и образуют однородную цепь Маркова с начальными вероятностями $(p_1, p_2, \dots, p_n, \dots)$ и матрицей переходных вероятностей $\|p_{ik}\|$, изучается его лебеговская структура (содержимое дискретной, абсолютно непрерывной та сингулярной компонент), тополого-метрические и фрактальные свойства спектра (минимально замкнутого носителя меры).

Вступ

Нагадаємо [7], що $\widetilde{L}$-зображенням дійсного числа $x \in (0;1]$ називається символічний (скорочений) запис $x = \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}$, де $a_n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, його розвинення в знакопочережний ряд Люрота [1, 2]:

$$x = \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1)\dots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n} \equiv \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60E05.

Ключові слова і фрази. Знакопочережний ряд Люрота; $\widetilde{L}$-зображення; випадкова величина; розподіл суми ряду Люрота, елементи якого є випадковими величинами з марковською залежністю; лебегівська структура розподілу; сингулярний розподіл з аномально фрактальним спектром.

або $x = \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1a_2\ldots a_k(0)}$, коли x має скінченний розклад

$$x = \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^{k} \frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1)\ldots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n} \equiv \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1a_2\ldots a_k(0)}.$$

Критерієм раціональності числа у його $\widetilde{L}$-зображенні є наступне твердження [1]: *дійсне число $x \in (0,1]$ є раціональним тоді і тільки тоді, коли його $\widetilde{L}$-зображення є скінченним або періодичним.* По аналогії з s-ково-раціональними та s-ково-ірраціональними числами [6], ті раціональні числа, які мають нескінченне $\widetilde{L}$-зображення називатимемо *$\widetilde{L}$-ірраціональними*, а ті, які мають скінченне $\widetilde{L}$-зображення, — *$\widetilde{L}$-раціональними.* Кожне $\widetilde{L}$-раціональне число має два формально різних зображення

$$\Delta^{\widetilde{L}}_{a_1a_2\ldots a_{k-1}(0)} = \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1a_2\ldots a_{k-2}[a_{k-1}+1](0)},$$

$\widetilde{L}$-ірраціональні числа мають єдине зображення. Тому для $\widetilde{L}$-ірраціональних чисел k-тий символ (цифра) $a_k = a_k(x)$ $\widetilde{L}$-зображення є функцією числа, що зображається.

У теорії чисел загальновживаними є терміни двійково-раціональне (більш загальне: s-ково-раціональне) число та двійково-ірраціональне (s-ково-ірраціональне) число. Перше має два зображення, одне з яких має період (0). Поняття $\tilde{L}$-раціонального та $\tilde{L}$-ірраціонального введені за аналогією.

Зауважимо, що $\tilde{L}$-зображення і зображення чисел елементарними ланцюговими дробами мають спільну топологію, але принципово різні метричні теорії.

L-зображення чисел [4], яке ґрунтується на представленні чисел знакододатними рядами Люрота (вперше описане в [2]), і $\tilde{L}$-зображення мають однакове основне метричне відношення, а тому – аналогічні метричні теорії, але різну топологію.

У нашій попередній роботі [3] досліджувалися властивості розподілу випадкової величини

$$\xi = \frac{1}{\eta_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\eta_1(\eta_1+1)\ldots\eta_{k-1}(\eta_{k-1}+1)\eta_k} \equiv \Delta^{\widetilde{L}}_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_k\ldots}$$

з незалежними елементами ($\widetilde{L}$-символами) η_k розкладів в знакозмінні ряди Люрота. Для ξ вичерпно вивчено лебегівську структуру розподілу, а саме: доведено його лебегівську чистоту та критерії належності до трьох чистих типів (дискрентого, абсолютно неперервного, сингулярного); описано тополого-метричні і фрактальні властивості спектра. У даній роботі розглядається випадкова величина θ, $\widetilde{L}$-символи якої є випадковими величинами з марковською залежністю. Ми знову цікавимось лебегівською структурою її розподілу, спектральними властивостями, зокрема, фрактальними властивостями носіїв розподілу.

Нехай (θ_n) – послідовність дискретно розподілених випадкових величин, які набувають натуральних значень $1, 2, \ldots, m \ldots$ і утворюють однорідний ланцюг Маркова з початковими ймовірностями $p_1, p_2, \ldots, p_m, \ldots$ і матрицею перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$, тобто

$$\mathsf{P}\{\theta_1 = m\} = p_m > 0, \qquad \sum_{m=1}^{\infty} p_m = 1;$$

$$\mathsf{P}\{\theta_{k+1} = j \mid \theta_k = i\} = p_{ij} \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1, \qquad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Розглядається випадкова величина θ, яка має нескінченне $\widetilde{L}$-зображення, елементи якого є випадковими величинами θ_n, тобто

$$\theta = \frac{1}{\theta_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\theta_1(\theta_1+1)\ldots\theta_{n-1}(\theta_{n-1}+1)\theta_n} \equiv \Delta^{\widetilde{L}}_{\theta_1\theta_2\ldots\theta_n\ldots}.$$

Зауваження 1. Очевидно, що випадкова величина θ не набуває значень з множини $\mathbb{Q}'$ раціональних чисел, $\widetilde{L}$-зображення яких є скінченними. Ймовірнісний простір, на якому θ є коректно визначеною, є $((0;1)^*, \mathfrak{B}^*, \mathsf{P})$, де $(0;1)^* = (0;1) \setminus \mathbb{Q}'$, $\mathfrak{B}^*$ — σ-алгебра борелівських підмножин $(0;1)^*$.

Зауваження 2. Якщо всі рядки матриці перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ однакові і співпадають з вектором $(p_1, p_2, \dots, p_n, \dots)$, то ми матимемо випадок незалежності та однакової розподіленості випадкових величин θ_n, який вивчався у роботі [3]. Якщо при цьому ще й $p_k = \frac{1}{k(k+1)}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, то розподіл θ буде рівномірним на $[0,1]$.

1. Критерій наявності атомів

Оскільки ми розглядаємо лише дійсні числа $x \in (0;1]$, які мають нескінченне зображення, то для таких однозначно визначається число $a_k(x)$ – k-ий символ нескінченного $\widetilde{L}$-зображення числа. Тому очевидним є наступне твердження.

Лема 1.1. *Для будь-якої послідовності натуральних чисел (c_n) мають місце наступні рівності*

$$\mathsf{P}\left\{\theta = \Delta^{\widetilde{L}}_{c_1 c_2 \dots c_n \dots}\right\} = p_{c_1} \prod_{k=1}^{\infty} p_{c_k c_{k+1}},$$

$$\mathsf{P}\left\{\theta \in \Delta^{\widetilde{L}}_{c_1 c_2 \dots c_n}\right\} = p_{c_1} \prod_{k=1}^{n-1} p_{c_k c_{k+1}},$$

де $\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1 c_2 \dots c_n} \equiv \{x \colon a_i(x) = c_i, i = 1, \dots, n\}$ — циліндр рангу n з основою $c_1 c_2 \dots c_n$.

Теорема 1.1. *Розподіл випадкової величини θ має атоми тоді і тільки тоді, коли існує така послідовність натуральних чисел $(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots)$, що*

$$H(a_n) \equiv p_{a_1} \prod_{k=1}^{\infty} p_{a_k a_{k+1}} > 0.$$

Точковим спектром (множиною атомів) розподілу випадкової величини θ є множина

$$D_\theta = \{x \colon H(a_n(x)) > 0\}.$$

Доведення. З єдиності $\widetilde{L}$-зображення числа $x \in (0;1)^*$ випливає рівність:

$$\mathsf{P}\{\theta = x\} = p_{a_1(x)} \prod_{k=1}^{\infty} p_{a_k(x) a_{k+1}(x)}, \tag{1}$$

а отже, x є атомом розподілу θ тоді і тільки тоді, коли існує принаймні одна послідовність (a_n) така, що

$$p_{a_1(x)} \prod_{k=1}^{\infty} p_{a_k(x) a_{k+1}(x)} > 0.$$

Отже, має місце теорема 1.1. □

Наслідок 1.1. *Розподіл випадкової величини θ є неперервним, тобто ймовірнісна міра кожної одноточкової множини дорівнює нулю, тоді і тільки тоді, коли для довільної послідовності натуральних чисел (a_k) виконується рівність $H(a_n) = 0$.*

Наслідок 1.2. *Якщо існує набір натуральних чисел $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ такий, що*

$$p_{i_1 i_2} = p_{i_2 i_3} = \dots = p_{i_k i_1} = 1,$$

то точка x з періодичним $\widetilde{L}$-зображення $\Delta^{\widetilde{L}}_{(i_1 i_2 \dots i_k)}$ є атомом розподілу θ з масою p_{i_1}.

Наслідок 1.3. *Якщо елементи матриці перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ відокремлені від одиниці, то розподіл випадкової величини θ є неперервним.*

Наслідок 1.4. *Якщо має місце рівність*

$$M \equiv \prod_{i=1}^{\infty} \max_k \{p_{ik}\} = 0,$$

то розподіл випадкової величини θ є неперервним.

Справді, оскільки $\sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} = 1$ для будь-якого $i \in \mathbb{N}$, то кожен рядок матриці $\|p_{ik}\|$ має найбільший елемент, а отже, для будь-якого $x \in (0,1)^*$

$$\mathsf{P}\{\theta = x\} = p_{a_1(x)} \prod_{k=1}^{\infty} p_{a_k(x)a_{k+1}(x)} \leq M = 0.$$

Отже, розподіл є неперервним за означенням.

Наслідок 1.5. *Необхідною умовою наявності атомів у розподілу θ є нерівність*

$$M > 0.$$

Зауваження 3. Умова $M > 0$ не є достатньою умовою наявності атомів, оскільки при виконанні системи рівностей

$$p_{jk_j} \equiv \max_k \{p_{jk}\} = p_{jj}, \qquad j = 1, 2, 3, \ldots,$$

розподіл випадкової величини θ атомів не має.

2. Вираз функції розподілу

Лема 2.1. *Функція розподілу $F_\theta(x)$ випадкової величини θ для довільного $x \in (0;1)^*$ має вигляд*

$$F_\theta(x) = \beta_1(x) + p_{a_1(x)} \sum_{k=2}^{\infty} \Big(\beta_k(x) \prod_{i=1}^{k-2} p_{a_i(x)a_{i+1}(x)}\Big), \tag{2}$$

де

$$\beta_1(x) = \sum_{j=a_1(x)+1}^{\infty} p_j, \qquad \beta_k(x) = \begin{cases} \sum_{j=a_k(x)+1}^{\infty} p_{a_{k-1}(x)j}, & \text{якщо } k = 2m-1, \\ \sum_{j=1}^{a_k(x)-1} p_{a_{k-1}(x)j}, & \text{якщо } k = 2m,\ m \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

і $a_k(x)$ є k-им $\widetilde{L}$-символом числа x, для решти точок $x \in \mathbb{R}$ функція розподілу довизначається за неперервністю зліва.

Доведення. Нагадаємо, що $F_\theta(x) = \mathsf{P}\{\theta < x\}$. Тоді оскільки подія $\{\theta < x\}$, де $x = \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1a_2\ldots a_k\ldots}$, є об'єднанням несумісних подій, а саме:

$$\begin{aligned} \{\theta < x\} = \{\theta_1 > a_1(x)\} &\cup \{\theta_1 = a_1(x) \wedge \theta_2 < a_2(x)\} \cup \ldots \\ &\cup \{\theta_1 = a_1(x) \wedge \theta_2 = a_2(x) \wedge \cdots \wedge \theta_{2k-2} = a_{2k-2}(x) \wedge \theta_{2k-1} > a_{2k-1}(x)\} \\ &\cup \{\theta_1 = a_1(x) \wedge \theta_2 = a_2(x) \wedge \cdots \wedge \theta_{2k-1} = a_{2k-1}(x) \wedge \theta_{2k} < a_{2k}(x)\} \cup \ldots \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}\{\theta_1 = a_1(x), \ldots, \theta_{k-1} = a_{k-1}(x), \theta_k > a_k(x)\} \\ &\quad = \mathsf{P}\{\theta_1 = a_1(x)\} \ldots \mathsf{P}\{\theta_{k-1} = a_{k-1}(x) \mid \theta_{k-2} = a_{k-2}(x)\} \\ &\quad\quad \times \mathsf{P}\{\theta_k > a_k(x) \mid \theta_{k-1} = a_{k-1}(x)\} \\ &\quad = p_{a_1(x)} \prod_{i=1}^{k-2} p_{a_i(x)a_{i+1}(x)} \cdot \sum_{j=a_k(x)+1}^{\infty} p_{a_{k-1}(x)j}, \end{aligned}$$

а
$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\{\theta_1 = a_1(x), \dots, \theta_{k-1} = a_{k-1}(x), \theta_k < a_k(x)\}\\ &\quad= \mathsf{P}\{\theta_1 = a_1(x)\} \dots \mathsf{P}\{\theta_{k-1} = a_{k-1}(x) \mid \theta_{k-2} = a_{k-2}(x)\}\\ &\qquad\times \mathsf{P}\{\theta_k < a_k(x) \mid \theta_{k-1} = a_{k-1}(x)\}\\ &\quad= p_{a_1(x)} \prod_{i=1}^{k-2} p_{a_i(x)a_{i+1}(x)} \cdot \sum_{j=1}^{a_k(x)-1} p_{a_{k-1}(x)j},\end{aligned}$$
то
$$\begin{aligned}F_\theta(x) = &\sum_{j=a_1(x)+1}^{\infty} p_j + p_{a_1(x)} \cdot \sum_{j=1}^{a_2(x)-1} p_{a_1(x)j} + \dots\\ &+ p_{a_1(x)} \prod_{i=1}^{2k-3} p_{a_i(x)a_{i+1}(x)} \sum_{j=a_{2k-1}(x)+1}^{\infty} p_{a_{2k-2}(x)j}\\ &+ p_{a_1(x)} \prod_{i=1}^{2k-2} p_{a_i(x)a_{i+1}(x)} \sum_{j=1}^{a_{2k}(x)-1} p_{a_{2k-1}(x)j} + \dots .\end{aligned}$$
Використовуючи введені скорочення $\beta_k(x)$, отримуємо вираз (2). □

Наслідок 2.1. *Якщо всі елементи матриці перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ додатні, то функція розподілу F_θ випадкової величини θ є строго зростаючою на $[0, 1]$ і її спектр фрактальними властивостями не володіє. Якщо ж $p_{\tau\varsigma=0}$, то $F_\theta(x)$ є постійною на кожному з інтервалів*
$$\nabla_{a_1a_2\dots a_k\tau\varsigma} \equiv \left(\Delta_{a_1a_2\dots a_k\tau\varsigma(1)}; \Delta_{a_1a_2\dots a_k\tau(\varsigma+1)(1)}\right).$$

Лема 2.2. *Якщо в точці x_0 існує похідна $F'_\theta(x_0)$ функції розподілу $F_\theta(x_0)$, то вона обчислюється за формулою:*
$$F'_\theta(x_0) = p_{a_j(x_0)} \prod_{k=1}^{\infty} \left[a_k(x_0)\left(a_k(x_0) \cdot p_{a_k(x_0)a_{k+1}(x_0)} + 1\right)\right]. \tag{3}$$

Доведення. Справді, якщо похідна $F'_\theta(x_0)$ існує, то
$$F'_\theta(x_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{\mathsf{P}\left\{\theta \in \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1(x_0)\dots a_k(x_0)}\right\}}{\left|\Delta^{\widetilde{L}}_{a_1(x_0)\dots a_k(x_0)}\right|},$$
але
$$\mathsf{P}\left\{\theta \in \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1(x_0)\dots a_k(x_0)}\right\} = p_{a_1(x_0)} \prod_{j=1}^{k} p_{a_j(x_0)a_{j+1}(x_0)},$$
а
$$\left|\Delta^{\widetilde{L}}_{a_1(x_0)\dots a_k(x_0)}\right| = \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{a_j(x_0)(a_j(x_0)+1)}.$$
Звідки і випливає формула (3). □

3. Лебегівська структура розподілу

Нагадаємо [5], що згідно з класичною теоремою Лебега про розклад функції обмеженої варіації довільна функція розподілу F може бути представлена у вигляді
$$\begin{aligned}F(x) &= \alpha_1 F_d(x) + (1-\alpha_1)F_c(x) &(4)\\ &= \alpha_1 F_d(x) + \alpha_2 F_{ac}(x) + \alpha_3 F_s(x), &(5)\end{aligned}$$

$\alpha_i \geq 0, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 1, 0 \leq \alpha_1 \leq 1, F_d(x)$ — дискретна (функція стрибків), $F_c(x)$ — неперервна, $F_{ac}(x)$ — абсолютно неперервна, $F_s(x)$ — сингулярна функції розподілу — компоненти функції розподілу.

Кожна з рівностей (4) і (5) називається *лебегівською структурою функції розподілу F*; рівність (4) висвітлює вміст дискретної та неперервної компонент, а рівність (5) — вміст дискретної, абсолютно неперервної та сингулярної компонент.

При цьому, коли один з коефіцієнтів α_i дорівнює 1 (а отже, інші дорівнюють 0), то розподіл називається чистим в залежності від того, де 1 — відповідно чисто дискретний, чисто неперервний, чисто абсолютно неперервний, чисто сингулярний. У випадку, коли жоден з коефіцієнтів не дорівнює 1, розподіл називається сумішшю тих розподілів, при яких коефіцієнти відмінні від 0. Зокрема, якщо $0 < \alpha_1 < 1$, то розподіл називається сумішшю дискретного і неперервного.

Теорема 3.1. *Якщо всі елементи матриці $\|p_{ik}\|$ є одиницями або нулями, то розподіл випадкової величини θ є чисто дискретним з єдиним атомом у кожному циліндрі першого рангу, маса якого дорівнює відповідній початковій ймовірності, зокрема:*

1) *якщо $p_{jj} = 1$ для всіх $j \in \mathbb{N}$, то точковий спектр є множиною точок виду $\Delta^{\widetilde{L}}_{(j)}$;*
2) *якщо $p_{jk} = 1$ для всіх $j \in \mathbb{N}$ та деякого фіксованого $k \in \mathbb{N}$, то точковий спектр є множиною точок виду $\Delta^{\widetilde{L}}_{j(k)}$;*
3) *якщо $p_{j(j+k)} = 1$ для всіх $j \in \mathbb{N}$ та деякого фіксованого $k \in \mathbb{N}$, то точковий спектр є множиною точок виду $\Delta^{\widetilde{L}}_{j[j+k][j+k][j+2k][j+2k][j+3k]\ldots}$.*

Доведення. Для доведення твердження досить показати, що для будь-якого натурального числа j виконується рівність

$$\mathsf{P}\{\theta \in \Delta_j\} = \sum_{x \in D_\theta \cap \Delta_j} \mathsf{P}\{\theta = x\}. \tag{6}$$

Нехай j — довільне натуральне число. За лемою 1.1

$$\mathsf{P}\{\theta \in \Delta^{\widetilde{L}}_j\} = p_j.$$

Можливі два випадки: $p_{jj} = 1$ або $p_{jj} \neq 1$.

Якщо $p_{jj} = 1$, то за теоремою 1.1 точка $\Delta^{\widetilde{L}}_{(j)}$ є єдиним атомом розподілу випадкової величини θ у циліндрі $\Delta^{\widetilde{L}}_j$ і він має масу p_j, а отже, рівність (6) виконується.

Якщо $p_{jj} \neq 1$, то існує таке натуральне $j_1 \neq j$, що $p_{jj_1} = 1$. Можливі два випадки: $p_{j_1j_1} = 1$ або $p_{j_1j_1} \neq 1$.

Якщо $p_{j_1j_1} = 1$, то точка з періодичним зображенням виду $\Delta^{\widetilde{L}}_{j(j_1)}$ є атомом з масою p_j. Тоді циліндр $\Delta^{\widetilde{L}}_j$ містить єдиний атом, маса якого p_j. Отже, рівність (6) виконується.

Якщо $p_{j_1j_1} \neq 1$, то існує таке натуральне $j_2 \neq j_1$, що $p_{j_1j_2} = 1$. І знову можливі два випадки: $p_{j_2j_2} = 1$ або $p_{j_2j_2} \neq 1$.

Аналогічно, якщо знайдеться таке j_k, що дорівнює j_m, $m < k$, таке, що $p_{j_kj_m} = 1$, то точка з періодичним зображенням є атомом, маса якого дорівнює p_j.

Якщо ж такого k і j_k не знайдеться, то існує послідовність (j_n) така, що $p_{j_nj_{n+1}} = 1$ для всіх n (причому $j_n \neq j_m$ при $m < n$). Тоді точка $\Delta^{\widetilde{L}}_{jj_1j_2\ldots j_n\ldots}$ є атомом розподілу θ, який належить $\Delta^{\widetilde{L}}_j$. І його маса

$$\mathsf{P}\left\{\theta = \Delta^{\widetilde{L}}_{jj_1j_2\ldots j_n\ldots}\right\} = p_j \prod_{n=1}^{\infty} p_{j_nj_{n+1}} = p_j.$$

А отже, рівність (6) виконується.

Розглянемо частинні випадки.

1) З доведеного вище при $p_{jj} = 1$ для деякого j атомом розподілу є точка $\Delta^{\widetilde{L}}_{(j)}$ з масою p_j. Оскільки $\sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1$, то сумарна маса таких атомів дорівнює одиниці. Тобто, точковий спектр складається лише з точок виду $\Delta^{\widetilde{L}}_{(j)}$.

2) Якщо $p_{jk} = 1$ для всіх $j \in \mathbb{N}$ та деякого фіксованого $k \in \mathbb{N}$, то $p_{kk} = 1$ і атомами розподілу є точки виду $\Delta^{\widetilde{L}}_{j(k)}$ відповідно з масами p_j. Оскільки сума всіх p_j при $j \in \mathbb{N}$ дорівнює одиниці, то точковий спектр складається лише з точок такого виду.

3) Якщо $p_{j(j+k)} = 1$ для всіх $j \in \mathbb{N}$ та деякого фіксованого $k \in \mathbb{N}$, то для будь-якого $m \in \mathbb{N}$ з леми 1.1 випливає наступна рівність

$$\mathsf{P}\left\{\theta = \Delta^{\widetilde{L}}_{m[m+k][m+k][m+2k][m+2k][m+3k]\ldots}\right\} = p_m \prod_{i=m}^{\infty} p_{i(i+k)} = p_m.$$

Тому з рівності суми всіх початкових ймовірностей одиниці випливає, що точковий спектр є множиною точок виду $\Delta^{\widetilde{L}}_{j[j+k][j+k][j+2k][j+2k][j+3k]\ldots}$. □

Зауваження 4. Розподіл θ може мати атоми, навіть коли в матриці перехідних ймовірностей нулів взагалі немає. Наприклад, якщо $p_{ik} > 0$, для всіх $i \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, але

$$p_{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{(i+1)^2},$$

то в цьому випадку точковий спектр розподілу буде співпадати з хвостовою множиною $\widetilde{L}$-зображення, представником якої є точка $x_0 = \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$, де $a_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$. Справді,

$$\mathsf{P}\{\theta = x_0\} = \prod_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(i+1)^2}\right) = \prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) > 0,$$

оскільки ряд $\sum_{n=2}^{\infty} n^{-2}$ збігається.

Лема 3.1. *Якщо існує таке $m \in \mathbb{N}$, що $p_{jj} = 1$, $p_{[m+i]j} = 0$ для всіх $j \le m$ і $\prod_{i=1}^{\infty} \max_k\{p_{[m+i][m+k]}\} = 0$ для всі $k \in \mathbb{N}$, то функція розподілу випадкової величини θ має наступну лебегівську структуру*

$$F_\theta(x) = pF_d(x) + qF_c(x), \tag{7}$$

де

$$p = \sum_{j=1}^{m} p_j, \qquad q = 1 - p, \qquad F_d(x) = \frac{1}{p}\sum_{x_j < x} p_j, \qquad F_c(x) = \frac{1}{q}\left(F_\theta(x) - pF_d(x)\right).$$

Доведення. За теоремою Лебега функцію розподілу випадкової величини θ можна подати у вигляді рівності (7), де $F_d(x)$ — дискретна функція розподілу, $F_c(x)$ — неперервна функція розподілу, p — сумарна маса атомів, $q = 1 - p$.

При виконанні умов леми очевидно, що $p_{j(k+1)} = 0$ при всіх $k \in \mathbb{N}$ і розподіл θ матиме m атомів, а саме: точки виду $x_j = \Delta^{\widetilde{L}}_{(j)}$ з масами p_j відповідно. Тому

$$p = \sum_{j=1}^{m} p_j, \qquad q = \left(1 - \sum_{j=1}^{m} p_j\right).$$

Тоді

$$F_d(x) = \frac{1}{p}\sum_{x_j < x} p_j.$$

Разом з цим лема 2.1 дає вираз функції розподілу $F_\theta(x)$, а тому з рівності (7) маємо $F_c(x) = \frac{1}{q}\left(F_\theta(x) - pF_d(x)\right)$. □

Наслідок 3.1. *Розподіл випадкової величини θ в залежності від структури матриці перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ може бути чисто дискретним, чисто неперервним і може бути сумішшю дискретного і неперервного, тобто одночасно містити ненульову дискретну і неперервну компоненти. Приклади чисто дискретних розподілів дає теорема 3.1, чисто неперервного — наслідок 1.1, суміші дискретного та неперервного — лема 3.1.*

4. Спектральні властивості розподілу

Нехай $D[\widetilde{L},\overline{ij}]$ — множина дійсних чисел, в $\widetilde{L}$-зображенні яких забороняється комбінація наперед заданих символів i та j, тобто

$$D[\widetilde{L},\overline{ij}] = \left\{x\colon x = \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1\ldots a_n\ldots}, a_k a_{k+1} \neq ij, \forall k \in N\right\}.$$

Лема 4.1. *Множина*

$$D[\widetilde{L},\overline{ij}] = \left\{x\colon x = \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1 a_2\ldots a_n\ldots}, a_k a_{k+1} \neq ij, \forall k \in \mathbb{N}\right\}$$

є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.

Доведення. Доведемо спочатку ніде не щільність множини $D[\widetilde{L},\overline{ij}]$. Нехай (a,b) довільний інтервал відрізка $[0,1]$. Легко вказати циліндр $\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_m} \subset (a,b)$. Тоді внутрішність циліндра $\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_m ij}$ не містить жодної точки множини $D[\widetilde{L},\overline{ij}]$. Отже, за означенням множина $D[\widetilde{L},\overline{ij}]$ є ніде не щільною.

Доведемо, що $\lambda\big(D[\widetilde{L},\overline{ij}]\big) = 0$, де λ — міра Лебега. Нехай F_{2k} – об'єднання всіх циліндрів рангу $2k$, внутрішність яких містить точки множини $D[\widetilde{L},\overline{ij}]$, $F_0 = (0,1]$, а множину $\overline{F}_{2(k+1)}$ означимо рівністю

$$\overline{F}_{2(k+1)} = F_{2k} \setminus F_{2(k+1)}.$$

Тоді $\lambda(\overline{F}_{2(k+1)}) = \lambda(F_{2k}) - \lambda(F_{2(k+1)})$.

$$\frac{\lambda(\overline{F}_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})} = 1 - \frac{\lambda(F_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})}. \tag{8}$$

Очевидно, що $F_{2k} \supset F_{2(k+1)} \supset D[\widetilde{L},\overline{ij}]$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

$$D[\widetilde{L},\overline{ij}] = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{2k} = \lim_{k\to\infty} F_{2k}.$$

З неперервності міри Лебега зверху маємо

$$\lambda\big(D[\widetilde{L},\overline{ij}]\big) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_{2k}).$$

Тоді

$$\lambda\big(D[\widetilde{L},\overline{ij}]\big) = \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda(F_{2k})}{\lambda(F_{2(k-1)})} \cdot \frac{\lambda(F_{2(k-1)})}{\lambda(F\lambda_{2(k-2)})} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda(F_2)}{\lambda(F_0)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_{2k})}{\lambda(F_{2(k-1)})}.$$

З рівності (8) маємо

$$\lambda\big(D[\widetilde{L},\overline{ij}]\big) = \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - \frac{\lambda(\overline{F}_{2k})}{\lambda(F_{2(k-1)})}\right].$$

Останній нескінченний добуток розбігається до нуля тоді і тільки тоді, коли розбігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\overline{F}_{2k})}{\lambda(F_{2(k-1)})}. \tag{9}$$

Знайдемо оцінки відношення $\frac{\lambda(\overline{F}_{2k})}{\lambda(F_{2(k-1)})}$. Нехай $\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_{2k}}$ – циліндр із F_{2k}. Можливі випадки

1) $c_{2k} = i$,
2) $c_{2k} \neq i$.

Якщо $c_{2k} = i$, то $\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_{2k}j} \cap D[\widetilde{L}, \overline{ij}] = \varnothing$ і

$$\frac{\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_{2k}j}}{\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_{2k}}} = \frac{1}{j(j+1)}.$$

Якщо $c_{2k} \neq i$, то $\operatorname{int} \Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_{2k}ij} \cap D[\widetilde{L}, \overline{ij}] = \varnothing$ і

$$\frac{\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_{2k}ij}}{\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_{2k}}} = \frac{1}{i(i+1)j(j+1)}.$$

Тому

$$0 < \frac{1}{i(i+1)j(j+1)} \leq \frac{\lambda(\overline{F}_{2k})}{\lambda(F_{2(k-1)})} \leq \frac{1}{j(j+1)} < 1.$$

Отже, ряд (9) розбігається і $\lambda\big(D[\widetilde{L}, \overline{ij}]\big) = 0$. □

Нагадаємо, що *спектром* S_θ розподілу випадкової величини θ називається множина всіх точок росту її функції розподілу F_θ, тобто мінімальна замкнена множина, на якій зосереджений розподіл випадкової величини θ.

Лема 4.2. *Спектром розподілу випадкової величини θ є замикання множини*

$$E = \left\{x\colon x = \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1a_2\ldots a_k\ldots}, p_i > 0\,\forall i \in \mathbb{N}, p_{a_ka_{k+1}} > 0\,\forall k \in \mathbb{N}\right\}.$$

Доведення. 1. Покажемо, що $E \subset S_\theta$. Нехай $\Delta^{\widetilde{L}}_{a_1a_2\ldots a_k\ldots} = x \in E$. Тоді

$$\mathsf{P}\left\{\theta \in \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1a_2\ldots a_k}\right\} = p_{a_1}\prod_{i=1}^{k-1} p_{a_ia_{i+1}} > 0$$

для довільного $k \in \mathbb{N}$. З властивостей циліндрів випливає, що для довільного додатного ε існує таке k, що

$$\Delta^{\widetilde{L}}_{a_1a_2\ldots a_k} \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon).$$

Тому

$$\mathsf{P}\{\theta \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\} \geq \mathsf{P}\left\{\theta \in \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1a_2\ldots a_k}\right\} > 0,$$

тобто $x \in S_\theta$ і, отже, $E \subset S_\theta$.

2. Покажемо, що $S_\theta \subset \overline{E}$. Нехай $x \in S_\theta$, тобто

$$\mathsf{P}\{\theta \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\} > 0 \quad \text{для будь-якого } \varepsilon > 0. \tag{10}$$

Припустимо, що існує k таке, що $p_{a_{k-1}a_k} = 0$, де $\Delta^{\widetilde{L}}_{a_1a_2\ldots a_k\ldots} = x$. Тоді

$$\mathsf{P}\left\{\theta \in \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1a_2\ldots a_k}\right\} = p_{a_1}\prod_{i=1}^{k-1} p_{a_ia_{i+1}} = 0.$$

Можливі два випадки:

(1) існує $\varepsilon > 0$ таке, що $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1a_2\ldots a_k}$;
(2) $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \not\subset \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1a_2\ldots a_k}$ для довільного $\varepsilon > 0$.

У першому випадку

$$\mathsf{P}\{\theta \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\} \le \mathsf{P}\left\{\theta \in \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1 a_2 \ldots a_k}\right\} = 0,$$

що суперечить (10).

У другому випадку x є односторонньою граничною точкою множини S_θ. Для конкретності нехай лівосторонньою. Тоді існує таке $\varepsilon > 0$, що $(x-\varepsilon, x) \subset \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1 a_2 \ldots a_k}$ і $\mathsf{P}\{\theta \in (x, x+\varepsilon)\} = 0$. І в цьому випадку

$$\mathsf{P}\{\theta \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\} = \mathsf{P}\{\theta \in (x-\varepsilon, x)\} \le \mathsf{P}\left\{\theta \in \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1 a_2 \ldots a_k}\right\} = 0,$$

що суперечить умові (10).

Отримана суперечність доводить, що $p_{a_{k-1} a_k} > 0$ для довільного $k \in \mathbb{N}$, тобто $x \in E$. Отже, $S_\theta = E$, що й вимагалося довести. □

Теорема 4.1. *Якщо матриця перехідних ймовірностей має принаймні один нуль, то спектр розподілу випадкової величини θ має нульову міру Лебега.*

Доведення. Якщо $p_{ij} = 0$, то згідно з лемою 4.2 $S_\theta \subset D[L, \overline{ij}]$. А тому згідно з лемою 4.1 $\lambda(S_\theta) = \lambda(D[L, \overline{ij}]) = 0$. □

Наслідок 4.1. *Якщо елементи матриці перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ відокремлені від одиниці і вона містить принаймні один нуль, то розподіл випадкової величини θ є сингулярним розподілом канторівського типу.*

Наслідок 4.2. *Якщо матриця перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ містить принаймні один нуль і для будь-якої послідовності (a_n), $a_n \in \mathbb{N}$, вираз* (1) *рівний нулю, то розподіл θ є сингулярним розподілом канторівського типу.*

5. Фрактальні властивості спектра

Теорема 5.1. *Якщо $p_{ii} > 0$, $p_{i(i+1)} > 0$, причому $p_{ii} + p_{i(i+1)} = 1$ $\forall i \in \mathbb{N}$, то спектр розподілу випадкової величини θ є аномально фрактальною множиною, тобто його розмірність Хаусдорфа–Безиковича* [6] *дорівнює нулю.*

Доведення. Очевидно, що

$$S_\theta \subset E = \left\{x \colon x = \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots},\ \text{де } a_{n+1} - a_n \in \{0; 1\}\ \forall n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Покажемо, що $\alpha_0(E) = 0$. Для цього досить довести, що для будь-якого $\alpha > 0$ має місце нерівність

$$\alpha_0(E) < \alpha.$$

Оскільки спектр розподілу

$$S_\theta = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta'_i,$$

де $\Delta'_i = \Delta^{\widetilde{L}}_i \cap S_\theta$, $i = 1, 2, \ldots$, та $S_\theta \overset{\frac{1}{2}}{\sim} \Delta'_i$, то досить довести, що

$$\alpha_0(\Delta'_1) = 0.$$

Легко бачити, що розмірність множини Δ'_1 не перевищує розмірності самоподібної множини

$$C = C[\widetilde{L}, V], \quad \text{де } V = \{1, 2\},$$

яка є розв'язком рівняння

$$\frac{1}{2^x} + \frac{1}{6^x} = 1,$$

а отже, числа 0.61.

Враховуючи, що

$$\Delta_1' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta'_{\underbrace{11\ldots1}_{n}2} \cup \{\Delta_{(1)}\}, \quad \text{де } \Delta'_{12} \overset{k}{\sim} \Delta'_{\underbrace{1\ldots1}_{n}2}, \ k = \frac{1}{2^{n-1}},$$

і $\alpha_0(\Delta'_{12}) \le \alpha_0(C[\widetilde{L}, V])$, де $V = \{2, 3\}$, отримуємо, що $\alpha_0(\Delta'_{12})$ не перевищує розв'язку рівняння

$$\frac{1}{6^x} + \frac{1}{12^x} = 1,$$

а отже, числа 0.34.

Аналогічно,

$$\Delta_1' = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty} \Delta'_{\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{22\ldots2}_{m}3} \cup \{\Delta_{1(2)}\} \cup \{\Delta_{11(2)}\},$$

де

$$\Delta'_{123} \overset{k}{\sim} \Delta'_{\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{22\ldots2}_{m}3}, \qquad k = \frac{1}{2^{n+m-2}},$$

і $\alpha_0(\Delta'_{123}) \le \alpha_0(C[\widetilde{L}, V])$, де $V = \{3, 4\}$, отримуємо, що $\alpha_0(\Delta'_{123})$ не перевищує розв'язку рівняння

$$\frac{1}{12^x} + \frac{1}{20^x} = 1,$$

тобто числа 0.26.

Міркуючи аналогічно, отримаємо, що розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини Δ_1' не перевищує розв'язку рівняння

$$\left(\frac{1}{m(m+1)}\right)^x + \left(\frac{1}{(m+1)(m+2)}\right)^x = 1$$

при будь-якому $m \in \mathbb{N}$, тобто $\alpha_0(E) = \alpha_0(S_\theta) = 0$. □

Література

1. S. Kalpazidou, A. Knopfmacher, and J. Knopfmacher, *Lüroth-type alternating series representations for real numbers*, Acta Arith. **55** (1990), 311–322.
2. J. Lüroth, *Uber eine eindeutige Entwickelung von Zahlen in eine unendliche Reihe*, Math. Ann. **21** (1883), 411–423.
3. M. Pratsiovytyi and Yu. Khvorostina, *Topological and metric properties of distributions of random variables represented by the alternating Lüroth series with independent elements*, Random Oper. Stoch. Equ. **21** (2013), no. 4, 385–401.
4. Ю. І. Жихарєва, М. В. Працьовитий, *Властивості розподілу випадкової величини, елементи зображення якої знакододатним рядом Люрота утворюють однорідний ланцюг Маркова*, Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. (2009), №10, 100–107.
5. Е. Лукач, *Характеристические функции*, "Наука" Москва, 1979.
6. М. В. Працьовитий *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів*, "НПУ імені М. П. Драгоманова" Київ, 1998.
7. М. В. Працьовитий, Ю. В. Хворостіна, *Основи метричної теорії зображення дійсних чисел знакозмінними рядами Люрота та найпростіші застосування*, Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. (2010), №11, 102–118.

Фізико-математичний інститут, Національний педагогічний університет ім. М.П. Драгоманова, вул. Пирогова, 9, Київ, 01601, Україна

Адреса електронної пошти: prats4@yandex.ru

Фізико-математичний факультет #1, Сумський державний педагогічний університет ім. А.С. Макаренка, вул. Роменська, 87, Суми, 40002, Україна

Адреса електронної пошти: khvorostina13@mail.ru

Надійшла 21.09.2014