Теорія ймовір. та матем. статист. Вип. 92, 2015, стор. 61–70

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst. No. 92, 2015, pp. 61–70

# ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ПРОСТОРІВ $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ КРАТНИХ ІНТЕГРАЛІВ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

УДК 519.21

Ю. В. КОЗАЧЕНКО І Ю. Ю. МЛАВЕЦЬ

Анотація. Знаходяться надійність і точність в просторі $C(T)$ обчислення кратних інтегралів методом Монте-Карло.

Abstract. Reliability and accuracy in space $C(T)$ for multiple integrals calculation by Monte Carlo method are established.

Аннотация. Находятся надежность и точность в пространстве $C(T)$ вычисления кратных интегралов методом Монте-Карло.

## 1. Вступ

Дана робота є продовженням робіт [1] і [2]. Результати роботи [2] застосовувались для знаходження надійності та точності в рівномірній метриці підрахунку інтегралів, що залежать від параметру методом Монте-Карло. На відміну від роботи [1], де використовувалась теорія просторів Орліча випадкових величин, тут використовується теорія просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. В цій роботі точність визначається в нормах простору $C(T)$.

Простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ був введений С. В. Єрмаковим та Є. І. Островським у роботі [3]. В роботі [2] вивчались властивості цих просторів та знайдено умови, за яких для цих просторів виконується умова **H**. Зауважимо, що умова **H** використовується для знаходження точності та надійності при підрахунку інтегралів методом Монте-Карло.

Робота складається із вступу та трьох розділів. В другому розділі наведені необхідні відомості з теорії просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. В третьому розділі розглядаються оцінки розподілу супремумів випадкових процесів із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. В четвертому розділі знаходяться надійність та точність у просторі $C(T)$ обчислення інтегралів, залежних від параметру, методом Монте-Карло і розглядаються приклади.

## 2. $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ – простори

**Означення 2.1.** [2] Нехай $\psi(u) > 0$, $u \geq 1$ – монотонно зростаюча неперервна функція, така що $\psi(u) \to \infty$ при $u \to \infty$. Випадкова величина $\xi$ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, якщо виконується умова:

$$\sup_{u\geq 1} \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} < \infty.$$

Подібне означення сформульоване в роботі С. В. Єрмакова та Є. І. Островського [3]. Але там вимагалось, щоб $E\xi = 0$, якщо $\xi \in \mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Крім того розглядались випадкові величини, такі що $E\,|\xi|^u = \infty$ при певному $u > 0$.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G07; Secondary 65C05.

*Ключові слова і фрази.* Простори випадкових величин $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, мажоруюча характеристика, випадкові процеси, метод Монте-Карло.

Доведення з роботи [3] того, що $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ є простором Банаха з нормою

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u\geq 1} \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)}$$

нічим не відрізняється від доведення в нашому випадку.

Наведемо приклади випадкових величин із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

**Приклад 2.1.** Випадкова величина $\xi$, для якої з імовірністю одиниця виконується умова $|\xi| < C$, де $C > 0$ – деяка константа, належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, що породжений будь-якою функцією $\psi$ з означення 2.1:

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u\geq 1} \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} \leq \sup_{u\geq 1} \frac{\left(C^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} = \sup_{u\geq 1} \frac{C}{\psi(u)} = \frac{C}{\psi(1)}.$$

**Приклад 2.2.** Випадкова величина, що має розподіл Лапласа (щільність розподілу $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$) належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u$, що встановлюється еквівалентністю $\sqrt[k]{\mathsf{E}\,|\xi|^k} = \sqrt[k]{k!} \sim k$ при $k \geq 1$.

**Приклад 2.3.** Нормальна випадкова величина $\xi = N(0,1)$ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u^{1/2}$, оскільки $\sqrt[2l]{\mathsf{E}\,|\xi|^{2l}} = \sqrt[2l]{\frac{(2l)!}{2^l l!}} \sim l^{1/2}$ при $l \geq 1$.

**Теорема 2.1.** [2] *Нехай випадкова величина $\xi$ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконується нерівність:*

$$\mathsf{P}\left\{|\xi| > \varepsilon\right\} \leq \inf_{u\geq 1} \frac{\|\xi\|_\psi^u \left(\psi(u)\right)^u}{\varepsilon^u}.$$

**Теорема 2.2.** *Нехай випадкова величина $\xi$ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ і $\psi(u) = u^\alpha$, де $\alpha > 0$, тоді для будь-якого $\varepsilon \geq e^\alpha \|\xi\|_\psi$ виконується нерівність:*

$$P\left\{|\xi| > \varepsilon\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\alpha}{e}\left(\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_\psi}\right)^{1/\alpha}\right\}.$$

*Доведення.* Використовуючи теорему 2.1 маємо, що

$$P\left\{|\xi| > \varepsilon\right\} \leq \inf_{u\geq 1} \frac{\|\xi\|_\psi^u\, u^{\alpha u}}{\varepsilon^u}. \tag{1}$$

Позначимо, що $\frac{\|\xi\|_\psi}{\varepsilon} = b$, тоді з рівностей

$$\left(\ln\left(b^u u^{\alpha u}\right)\right)' = \left(u\ln b + \alpha u \ln u\right)' = \ln b + \alpha \ln u + \alpha = 0;$$

$$\ln u = -\frac{\ln b + \alpha}{\alpha}$$

випливає, що інфінум досягається в точці $u = \frac{1}{e}b^{-1/\alpha}$. Оскільки $u \geq 1$, тоді має виконуватись нерівність $\varepsilon \geq e^\alpha \|\xi\|_\psi$. Підставимо дане значення для величини $u$ в нерівність (1), отримаємо:

$$P\left\{|\xi| > \varepsilon\right\} \leq b^{\frac{1}{e}b^{-\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{1}{e}b^{-\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha\frac{1}{e}b^{-\frac{1}{\alpha}}} = \exp\left\{-\frac{\alpha}{e}\left(\frac{1}{b}\right)^{1/\alpha}\right\}.$$

Звідси випливає твердження теореми 2.2. $\square$

**Теорема 2.3.** *Нехай випадкова величина $\xi$ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ і $\psi(u) = e^{au^\beta}$, де $a > 0$, $\beta > 0$, тоді для будь-якого $\varepsilon \geq e^{a(\beta+1)} \|\xi\|_\psi$ виконується нерівність:*

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leq \exp\left\{-\frac{\beta}{a^{1/\beta}}\left(\frac{\ln\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_\psi}}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}\right\}.$$

*Доведення.* Із теореми 2.1 отримаємо, що

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leq \inf_{u\geq 1}\frac{\|\xi\|_\psi^u\, e^{au^{\beta+1}}}{\varepsilon^u}. \tag{2}$$

Позначимо $\frac{\|\xi\|_\psi}{\varepsilon} = b$. Із рівностей

$$\left(\ln\left(b^u e^{au^{\beta+1}}\right)\right)' = \left(u\ln b + au^{\beta+1}\right)' == \ln b + a(\beta+1)u^\beta = 0;$$

$$u^\beta = -\frac{\ln b}{a(\beta+1)}$$

випливає, що інфінум досягається в точці $u = \left(-\frac{\ln b}{a(\beta+1)}\right)^{1/\beta}$. Оскільки $u \geq 1$, тоді має виконуватись нерівність $\varepsilon \geq e^{a(\beta+1)} \|\xi\|_\psi$. Підставляючи це значення $u$ в нерівність (2), отримаємо

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leq b^{\left(-\frac{\ln b}{a(\beta+1)}\right)^{1/\beta}} e^{a\left(-\frac{\ln b}{a(\beta+1)}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}} = \exp\left\{-\frac{\beta}{a^{1/\beta}}\left(\frac{\ln\frac{1}{b}}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}\right\},$$

що й треба було довести. □

**Теорема 2.4.** *Нехай випадкова величина $\xi$ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ і $\psi(u) = (\ln(u+1))^\lambda$, де $\lambda > 0$, тоді для будь-якого $\varepsilon \geq (e\ln 2)^\lambda \|\xi\|_\psi$ виконується нерівність:*

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leq e^\lambda \exp\left\{-\lambda\exp\left\{\left(\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_\psi}\right)^{1/\lambda}\frac{1}{e}\right\}\right\}.$$

*Доведення.* Оскільки з теореми 2.1 випливає, що

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leq \inf_{u\geq 1}\frac{\|\xi\|_\psi^u\,(\ln(u+1))^{\lambda u}}{\varepsilon^u}, \tag{3}$$

тоді покладемо $u + 1 = \exp\left\{\left(\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_\psi}\right)^{1/\lambda}\frac{1}{z}\right\}$, де $z > 0$. Тоді, підставляючи цей вираз в нерівність (3), отримаємо:

$$\left(\frac{\|\xi\|_\psi(\ln(u+1))^\lambda}{\varepsilon}\right)^u = \frac{1}{z^{\lambda u}} = \exp\{-\lambda u\ln z\} =$$

$$= \exp\left\{-\lambda(\ln z)\left(\exp\left\{\left(\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_\psi}\right)^{1/\lambda}\frac{1}{z}\right\} - 1\right)\right\} =$$

$$= z^\lambda\exp\left\{-\lambda(\ln z)\exp\left\{\left(\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_\psi}\right)^{1/\lambda}\frac{1}{z}\right\}\right\}.$$

Покладемо в цій рівності $z = e$, тоді враховуючи, що $u \geq 1$ отримаємо твердження теореми:

$$P\left\{|\xi| > \varepsilon\right\} \leq e^{\lambda} \exp\left\{-\lambda \exp\left\{\left(\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_{\psi}}\right)^{1/\lambda} \frac{1}{e}\right\}\right\}. \qquad \square$$

**Означення 2.2.** [2] Неспадна числова послідовність $(\varkappa(n) > 0, n \geq 1)$ називається $M$-характеристикою (мажоруючою характеристикою) простору $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$, якщо для будь-яких випадкових величин $\xi_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ із цього простору, виконується нерівність:

$$\left\|\max_{1\leq i\leq n} |\xi_i|\right\|_{\psi} \leq \varkappa(n) \max_{1\leq i\leq n} \|\xi_i\|_{\psi}.$$

**Теорема 2.5.** [2] *Послідовність*

$$\varkappa(n) = \sup_{u\geq 1} \inf_{v>0} n^{\frac{1}{u+v}} \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)}$$

*є мажоруючою характеристикою простору* $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$.

В роботах [2] і [4] знайдено мажоруючі характеристикти для простору $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$, що породжується функціями $\psi(u) = u^{\alpha}$, $\psi(u) = e^{au^{\beta}}$, $\psi(u) = (\ln(u+1))^{\lambda}$. Зокрема, послідовність

$$\varkappa(n) = \left(\frac{e}{\alpha}\right)^{\alpha} (\ln n)^{\alpha}$$

є мажоруючою характеристикою простору $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$ при $n > 1$, де $\psi(u) = u^{\alpha}$, $\alpha > 0$.

**Означення 2.3.** [2] Скажемо, що для просторів $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$ випадкових величин виконується умова **H**, якщо існує абсолютна константа $C_{\psi}$ така, що для будь-яких центрованих незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ із $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$ виконується нерівність:

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right\|^2 \leq C_{\psi} \sum_{i=1}^{n} \|\xi_i\|^2.$$

Константу $C_{\psi}$ назвемо масштабною константою простору $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$.

## 3. Випадкові процеси з просторів $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$, задані на компакті

**Означення 3.1.** [5] Скажемо, що випадковий процес $X = \{X(t),\ t \in T\}$, де $T$ – деяка параметрична множина, належить простору $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$, якщо для будь-якого $t \in T$ випадкова величина $X(t)$ належить простору $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$.

Приклади випадкових процесів з простору $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$ можна знайти в роботі [6].

**Означення 3.2.** [5] Метричною масивністю $N(u)$ компактного метричного простору $(T, \rho)$ називається найменше число замкнених куль радіуса не більше $u$, що покривають множину $T$.

**Теорема 3.1.** *Нехай $(T, \rho)$ – компактний метричний простір, $Y = \{Y(t), t \in T\}$ – випадковий процес, який належить простору $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$ для якого виконується умова* **H** *з константою $C_{\psi}$, $Y$ – сепарабельний процес на $(T, \rho)$. Крім того, нехай існує неперервна монотонно зростаюча функція $\sigma(h)$, $\sigma(0) = 0$, така, що*

$$\sup_{\rho(t,s)\leq h} \left\|Y(t) - Y(s)\right\|_{\psi} \leq \sigma(h)$$

*і для будь-якого $z > 0$ виконується умова*

$$\int_0^z \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du < \infty,$$

*де* $\varkappa(n)$ *– мажоруюча характеристика простору* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

*Нехай* $X(t) = Y(t) - m(t)$, *де* $m(t) = \mathsf{E}\,X(t)$ *і* $X_k(t)$ *– незалежні копії процесу* $X(t)$, $S_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k(t)$, $\sigma_1(t) = 2\sqrt{C_\psi}\sigma(t)$.

*Тоді для будь-якого* $0 < p < 1$ *справджується нерівність:*

$$\left\| \sup_{t\in T} |S_n(t)| \right\|_\psi \le \frac{1}{\sqrt{n}} B(p),$$

*де*

$$B(p) = 2\sqrt{C_\psi} \inf_{t\in T} \|Y(t)\|_\psi + \frac{1}{p(1-p)} \int_0^{\gamma p} \varkappa\left(N\left(\sigma_1^{(-1)}(u)\right)\right) du,$$

$$\gamma = \sigma_1\left(\sup_{t,s\in T} \rho(t,s)\right).$$

*При цьому, для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *справджується нерівність*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in T} |S_n(t)| > \varepsilon\right\} \le \inf_{u\ge 1} \left(\frac{B(p)\psi(u)}{\varepsilon\sqrt{n}}\right)^u. \quad (4)$$

*Доведення.* Теорема випливає з теореми 4.1 та наслідку 4.1 з роботи [2]. □

**Приклад 3.1.** Розглянемо простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u^\alpha$, $\alpha > 0$, тоді з теорем 3.1 та 2.2 при $\varepsilon \ge \frac{e^\alpha B(p)}{\sqrt{n}}$ отримаємо:

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in T} |S_n(t)| > \varepsilon\right\} \le \exp\left\{-\frac{\alpha}{e}\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{B(p)}\right)^{1/\alpha}\right\}.$$

**Приклад 3.2.** Розглянемо простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = e^{au^\beta}$, $a > 0$, $\beta > 0$, тоді з теорем 3.1 та 2.3 при $\varepsilon \ge \frac{e^{a(\beta+1)}B(p)}{\sqrt{n}}$ дістанемо:

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in T} |S_n(t)| > \varepsilon\right\} \le \exp\left\{-\frac{\beta}{a^{1/\beta}}\left(\frac{\ln\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{B(p)}}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}\right\}.$$

**Приклад 3.3.** Розглянемо простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = (\ln(u+1))^\lambda$, $\lambda > 0$, тоді з теорем 3.1 та 2.4 при $\varepsilon \ge \frac{(e\ln 2)^\lambda B(p)}{\sqrt{n}}$ маємо:

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in T} |S_n(t)| > \varepsilon\right\} \le e^\lambda \exp\left\{-\lambda \exp\left\{\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{B(p)}\right)^{1/\lambda}\frac{1}{e}\right\}\right\}.$$

## 4. Надійність та точність у просторі $C(T)$ обчислення інтегралів, залежних від параметру методом Монте-Карло

Нехай $\{\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mu\}$ – вимірний простір, $\mu$ – $\sigma$-скінченна міра, $p(s) \ge 0$, $s \in \mathcal{S}$ – така функція, що $\int_\mathcal{S} p(s)d\mu(s) = 1$, $P(A)$, $A \in \mathcal{A}$ – міра, яка визначається так: $P(A) = \int_A p(s)d\mu(s)$. Оскільки $P(A)$ є ймовірнісною мірою, тоді простір $\{\mathcal{S}, \mathcal{A}, P\}$ є ймовірнісним простором.

Нехай функція $f(s,t)$ залежить від $t \in T$, де $(T,\rho)$ – компактний метричний простір і ця функція $f(s,t)$ неперервна відносно $t$. Вважаємо, що існує інтеграл $\int_\mathcal{S} f(s,t)p(s)d\mu(s) = I(t)$.

Розглянемо $f(s,t)$ як випадковий процес на $\{\mathcal{S}, \mathcal{A}, P\}$ і позначимо його $\xi(s,t) = \xi(t)$ та $I(t) = \int_\mathcal{S} f(s,t)p(s)d\mu(s) = \int_\mathcal{S} f(s,t)dP(s) = \mathsf{E}\,\xi(t)$.

Нехай $\xi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ – незалежні копії випадкового процесу $\xi(t)$, $Z_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i(t)$. Тоді за посиленим законом великих чисел $Z_n(t) \to \mathsf{E}\,\xi(t) = I(t)$ з імовірністю одиниця для будь-якого $t \in T$.

**Означення 4.1.** Скажемо, що $Z_n(t)$ наближається до $I(t)$ в просторі $C(T)$ з надійністю $1-\delta$, $\delta > 0$ і точністю $\varepsilon > 0$, якщо виконується така нерівність:

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in T}|Z_n(t)-I(t)| > \varepsilon\right\} \le \delta.$$

**Теорема 4.1.** *Нехай випадковий процес $\xi(t)$, $t\in T$ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ для якого виконується умова $\mathbf{H}$ з константою $C_\psi$, $Z_n(t)-I(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(\xi_i(t)-I(t))$, де $\xi_i(t)$ – незалежні копії випадкового процесу $\xi(t)$.*

*Припустимо, що існує неперервна монотонно зростаюча функція $\sigma(h)$, $\sigma(0)=0$, така, що справджується нерівність*

$$\sup_{\rho(t,s)\le h}\left\|\xi(t)-\xi(s)\right\|_\psi \le \sigma(h).$$

*Припустимо також, що для будь-якого $z > 0$ виконується умова*

$$\int_0^z \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du < \infty,$$

*де $\varkappa(n)$ – мажоруюча характеристика, $N(u)$ – метрична масивність простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, а $\sigma^{(-1)}(u)$ – обернена функція до $\sigma(u)$. Тоді $Z_n(t)$ наближає $I(t)$ з надійністю $1-\delta$, $\delta>0$ і точністю $\varepsilon$ в просторі $C(T)$, якщо число $n$ таке, що для будь-якого $0<p<1$ справджується умова*

$$\inf_{u\ge 1}\left(\frac{B(p)\psi(u)}{\varepsilon\sqrt{n}}\right)^u \le \delta, \tag{5}$$

*де $B(p) = 2\sqrt{C_\psi}\inf_{t\in T}\|\xi(t)\|_\psi + \frac{1}{p(1-p)}\int_0^{\gamma p}\varkappa\left(N\left(\sigma_1^{(-1)}(u)\right)\right)du$, $\sigma_1(u) = 2\sqrt{C_\psi}\sigma(u)$, $\gamma = \sigma_1\left(\sup_{t,s\in T}\rho(t,s)\right)$.*

*Доведення.* Згідно з теоремою 3.1 маємо, що

$$\|Z_n(t)-I(t)\|_\psi \le \frac{1}{\sqrt{n}}B(p).$$

Тоді з нерівності (4) випливає, що

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in T}|Z_n(t)-I(t)| > \varepsilon\right\} \le \inf_{u\ge 1}\left(\frac{B(p)\psi(u)}{\varepsilon\sqrt{n}}\right)^u.$$

З останньої нерівності випливає твердження теореми. □

**Теорема 4.2.** *Нехай $\xi(\vec{t})$ – сепарабельний випадковий процес, заданий на просторі $(T,\rho)$, де $T = \{a_j \le t_j \le b_j, j=\overline{1,d}\}$, $\rho(\vec{t},\vec{s}) = \max_{1\le j\le d}|t_j-s_j|$, $\vec{t} = (t_1,\ldots,t_d)$, $\vec{s} = (s_1,\ldots,s_d)$. Крім того, $\xi(\vec{t})$ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u^\alpha$, $\alpha \ge \frac{1}{2}$ і справджується нерівність*

$$\sup_{\rho(\vec{t},\vec{s})\le h}\left\|\xi(\vec{t})-\xi(\vec{s})\right\|_\psi \le C\,|h|^\beta,$$

*де $C>0$, $0<\beta\le 1$. Нехай $Z_n(\vec{t}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i(\vec{t})$, де $\xi_i(\vec{t})$ – незалежні копії випадкового процесу $\xi(\vec{t})$, $I(\vec{t}) = \int_{\mathcal{S}} f(\vec{s},\vec{t})p(\vec{s})d\mu(\vec{s}) = \mathsf{E}\,\xi(\vec{t})$.*

*Тоді $Z_n(\vec{t})$ наближає $I(\vec{t})$ з надійністю $1-\delta$, $\delta>0$ і точністю $\varepsilon$ в просторі $C(T)$, якщо справджується нерівність:*

$$n \ge \left(\frac{e^\alpha B(\beta)}{\varepsilon}\right)^2\max\left(1,\left(-\frac{\ln\delta}{\alpha}\right)^{2\alpha}\right), \tag{6}$$

*де $B(\beta) = 4\cdot 3^\alpha\inf_{t\in T}\left\|\xi(\vec{t})\right\|_\psi + \left(\frac{e}{\alpha}\right)^\alpha\cdot\frac{4Cd3^{\alpha+\frac{3}{2}}R^\beta}{2^{\frac{\beta}{2}-1}\beta}$.*

*Доведення.* Теорема випливає з теореми 4.1. В нашому випадку $\sigma(h) = C\,|h|^\beta$. В роботі [5] показано, що $C_\psi = 4\cdot 9^\alpha$, коли $\psi(u) = u^\alpha$, $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Отже, $\sigma_1(u) = 4\cdot 3^\alpha C\,|u|^\beta$, то $\sigma_1^{(-1)}(u) = \left(\frac{u}{4\cdot 3^\alpha C}\right)^{1/\beta}$. В роботі [2] знайдено мажоруючу характеристику для простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, $\psi(u) = u^\alpha$, яка має вигляд

$$\varkappa(n) = \left(\frac{e}{\alpha}\right)^\alpha (\ln n)^\alpha .$$

Легко бачити, що

$$N\left(\sigma_1^{(-1)}(u)\right) \leq \prod_{j=1}^d \left(\frac{b_j - a_j}{2\sigma_1^{(-1)}(u)} + 1\right) \leq \left(\frac{R}{2\sigma_1^{(-1)}(u)} + 1\right)^d ,$$

де $R = \max_{1\leq j\leq d}(b_j - a_j)$. В нашому випадку

$$N\left(\sigma_1^{(-1)}(u)\right) \leq \left(\frac{R(4\cdot 3^\alpha C)^{1/\beta}}{2u^{1/\beta}} + 1\right)^d .$$

Отже,

$$B(p) \leq 4\cdot 3^\alpha \inf_{t\in T}\left\|\xi(\vec{t})\right\|_\psi + \frac{1}{p(1-p)}\int_0^{\tilde{\gamma}p}\left(\frac{e}{\alpha}\right)^\alpha \ln\left(\frac{R(4\cdot 3^\alpha C)^{1/\beta}}{2u^{1/\beta}} + 1\right)^d du, \qquad (7)$$

де $\tilde{\gamma} = \sigma_1(R) = 4\cdot 3^\alpha C R^\beta$. Оскільки, при будь-якому $0 < \theta \leq 1$

$$\ln(1+x) \leq \frac{x^\theta}{\theta},$$

то з нерівності (7) випливає, що при $\theta < \beta$ маємо, що

$$B(p) \leq 4\cdot 3^\alpha \inf_{t\in T}\left\|\xi(\vec{t})\right\|_\psi + \frac{1}{p(1-p)}\int_0^{\tilde{\gamma}p}\left(\frac{e}{\alpha}\right)^\alpha \frac{d}{\theta}\left(\frac{R(4\cdot 3^\alpha C)^{1/\beta}}{2u^{1/\beta}}\right)^\theta du =$$
$$= 4\cdot 3^\alpha \inf_{t\in T}\left\|\xi(\vec{t})\right\|_\psi + \frac{1}{p(1-p)}\left(\frac{e}{\alpha}\right)^\alpha \frac{d}{\theta 2^\theta}\left(R^\beta 4\cdot 3^\alpha C\right)^{\frac{\theta}{\beta}} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{\theta}{\beta}\right)}(\tilde{\gamma}p)^{1-\frac{\theta}{\beta}} =$$
$$= 4\cdot 3^\alpha \inf_{t\in T}\left\|\xi(\vec{t})\right\|_\psi + \left(\frac{e}{\alpha}\right)^\alpha \frac{d}{\theta 2^\theta}\cdot\frac{4\cdot 3^\alpha R^\beta C}{\left(1-\frac{\theta}{\beta}\right)}\cdot\frac{1}{p^{\frac{\theta}{\beta}}(1-p)}.$$

З прикладу 3.1 випливає, що при $\varepsilon \geq \frac{e^\alpha B(p)}{\sqrt{n}}$ має місце

$$\inf_{u\geq 1}\left(\frac{B(p)\psi(u)}{\varepsilon\sqrt{n}}\right)^u = \exp\left\{-\frac{\alpha\varepsilon^{1/\alpha}n^{1/2\alpha}}{e(B(p))^{1/\alpha}}\right\}.$$

Тепер зрозуміло, що нерівність (5) справджується, коли виконується нерівність

$$n \geq \left(\frac{e^\alpha B(p)}{\varepsilon}\right)^2 \max\left(1, \left(-\frac{\ln\delta}{\alpha}\right)^{2\alpha}\right). \qquad (8)$$

Оскільки, нерівність (8) має місце при всіх $0 < p < 1$, то можна мінімізувати праву частину останньої нерівності по $\theta$ та $p$. Тоді при $\theta = \frac{\beta}{2}$, $p = \frac{1}{3}$ отримаємо:

$$B(p) \leq 4\cdot 3^\alpha \inf_{t\in T}\left\|\xi(\vec{t})\right\|_\psi + \left(\frac{e}{\alpha}\right)^\alpha \frac{d}{\theta 2^\theta}\cdot\frac{4\cdot 3^\alpha R^\beta C}{\left(1-\frac{\theta}{\beta}\right)}\cdot\frac{1}{p^{\frac{\theta}{\beta}}(1-p)} =$$
$$= 4\cdot 3^\alpha \inf_{t\in T}\left\|\xi(\vec{t})\right\|_\psi + \left(\frac{e}{\alpha}\right)^\alpha \cdot \frac{4Cd3^{\alpha+\frac{3}{2}}R^\beta}{2^{\frac{\beta}{2}-1}\beta} = B(\beta).$$

Тоді з останньої нерівності та нерівності (8) випливає, що має місце нерівність (6). □

Використовуючи теореми 2.3 та 2.4 і приклади 3.2, 3.3 можна отримати теореми подібні до теореми 4.2 для простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ породжений функціями $\psi(u) = e^{au^\beta}$, $\psi(u) = (\ln(u+1))^\lambda$.

**Приклад 4.1.** Розглянемо інтеграл

$$I(t) = rq\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-rx-qy}\sin\left(2\sqrt{txy}\right)dxdy,$$

де $0 \le t \le T$, $r > 0$, $q > 0$.

Нехай $\xi$ і $\eta$ – незалежні випадкові величини, які розподілені за показниковим розподілом з параметрами $r$ та $q$

$$\mathsf{P}\{\xi < x\} = \begin{cases} 1 - e^{-rx}, & \text{x>0;} \\ 0, & \text{x<0,} \end{cases}$$

$$\mathsf{P}\{\eta < y\} = \begin{cases} 1 - e^{-qx}, & \text{y>0;} \\ 0, & \text{y<0.} \end{cases}$$

Таким чином,

$$I(t) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} re^{-rx}qe^{-qy}\sin\left(2\sqrt{txy}\right)dxdy = \mathsf{E}\sin\left(2\sqrt{t\xi\eta}\right).$$

Розглянемо простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u^2$ і випадковий процес $\xi(t) = \sin\left(2\sqrt{t\xi\eta}\right)$, $\xi_i(t)$, $i = 1, n$ – незалежні копії процесу $\xi(t)$. Тоді оцінкою $I(t)$ є $Z_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i(t)$. Оцінимо норму та норму приросту цього процесу. Тобто $\|\xi(t)\|_\psi = \left\|\sin\left(2\sqrt{t\xi\eta}\right)\right\|_\psi$, а $\inf_{0\le t\le T}\|\xi(t)\|_\psi = 0$. Оцінка норми приросту має вигляд

$$\begin{aligned}\|\xi(t)-\xi(s)\|_\psi &= \left\|\sin\left(2\sqrt{t\xi\eta}\right) - \sin\left(2\sqrt{s\xi\eta}\right)\right\|_\psi \le \\ &\le 2\left\|\sin\left(\sqrt{\xi\eta}\left(\sqrt{t}-\sqrt{s}\right)\right)\right\|_\psi \le 2\left\|\sqrt{\xi\eta}\right\|_\psi\left|\sqrt{t}-\sqrt{s}\right| \le 2\sqrt{|t-s|}\left\|\sqrt{\xi\eta}\right\|_\psi. \end{aligned} \tag{9}$$

З означення норми простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ випливає, що

$$\left\|(\xi\eta)^{\frac{1}{2}}\right\|_\psi = \sup_{u\ge 1}\frac{\left(\mathsf{E}(\xi\eta)^{\frac{u}{2}}\right)^{1/u}}{u^2} = \sup_{u\ge 1}\frac{\left(\mathsf{E}\,\xi^{\frac{u}{2}}\,\mathsf{E}\,\eta^{\frac{u}{2}}\right)^{1/u}}{u^2}.$$

Звідси маємо, що

$$\mathsf{E}\,\xi^{\frac{u}{2}} = \int_0^{+\infty} x^{\frac{u}{2}} re^{-rx}dx = \frac{1}{r^{\frac{u}{2}}}\Gamma\left(\frac{u}{2}+1\right).$$

Оскільки $\Gamma(z) \le e^{-z}z^{z-\frac{1}{2}}C_z$, де $C_z = \sqrt{2\pi}e^{\frac{1}{12z}}$, то

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{u}{2}+1\right) &\le e^{-\left(\frac{u}{2}+1\right)}\left(\frac{u}{2}+1\right)^{\frac{u}{2}+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}e^{\frac{1}{12\left(\frac{u}{2}+1\right)}} \le \\ &\le e^{-\left(\frac{u}{2}+1\right)}\left(\frac{u}{2}+1\right)^{\frac{u}{2}+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}e^{\frac{1}{18}}.\end{aligned}$$

Отже, при $u \ge 1$ справедливо

$$\left(\mathsf{E}\,\xi^{\frac{u}{2}}\right)^{\frac{1}{u}} \le \frac{1}{\sqrt{r}}e^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{u}}\left(\frac{u}{2}+1\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2u}}\sqrt{2\pi}e^{\frac{1}{18}} \le \frac{1}{\sqrt{r}}\left(\frac{u}{2}+1\right)\sqrt{2\pi}e^{-\frac{8}{18}}.$$

Аналогічно можна знайти, що $\left(\mathsf{E}\,\eta^{\frac{u}{2}}\right)^{\frac{1}{u}} \le \frac{1}{\sqrt{q}}\left(\frac{u}{2}+1\right)\sqrt{2\pi}e^{-\frac{8}{18}}$. Отже,

$$\sup_{u\ge 1}\frac{\left(\mathsf{E}\,\xi^{\frac{u}{2}}\,\mathsf{E}\,\eta^{\frac{u}{2}}\right)^{1/u}}{u^2} = \sup_{u\ge 1}\frac{1}{\sqrt{rq}}\left(\frac{u}{2}+1\right)^2 2\pi e^{-\frac{8}{9}}\frac{1}{u^2} = \frac{1}{\sqrt{rq}}\cdot\frac{9\pi}{2e^{\frac{8}{9}}}$$

Тоді нерівність (9) має вигляд

$$\|\xi(t)-\xi(s)\|_\psi \le \sqrt{|t-s|}\frac{1}{\sqrt{rq}}\cdot\frac{9\pi}{e^{\frac{8}{9}}}$$

Тобто в термінах теореми 4.2 маємо, що

$$\sigma(h)=Ch^{\frac{1}{2}},$$

де $C=\frac{1}{\sqrt{rq}}\cdot\frac{9\pi}{e^{\frac{8}{9}}}$.

Крім того, $Z_n(t)$ наближає $I(t)$ в просторі $C([0,1])$ з надійністю $1-\delta$ і точністю $\varepsilon$, якщо в нерівності (6) покласти $\varepsilon=0.03B(\beta)$, $\delta=0.01$ маємо, що

$$n\ge 60665.$$

**Приклад 4.2.** Розглянемо інтеграл

$$I(t)=rq\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{xy}}e^{-rx-qy}\sin\left(\sqrt{txy}\right)dxdy,$$

де $0\le t\le T$, $r>0$, $q>0$.

Нехай $\xi$ і $\eta$ – незалежні випадкові величини, які розподілені за показниковим розподілом з параметрами $r$ та $q$. Таким чином,

$$I(t)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{xy}}re^{-rx}qe^{-qy}\sin\left(\sqrt{txy}\right)dxdy=\mathsf{E}\left(\frac{\sin\left(\sqrt{t\xi\eta}\right)}{\sqrt{\xi\eta}}\right).$$

Розглянемо простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u)=u^{\frac{1}{2}}$ і випадковий процес $\xi(t)=\frac{\sin\left(\sqrt{t\xi\eta}\right)}{\sqrt{\xi\eta}}$, $\xi_i(t)$, $i=\overline{1,n}$ – незалежні копії процесу $\xi(t)$. Тоді оцінкою $I(t)$ є $Z_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\xi_i(t)$. Оцінимо норму та норму приросту цього процесу. Тобто $\|\xi(t)\|_\psi=\left\|\frac{\sin\left(\sqrt{t\xi\eta}\right)}{\sqrt{\xi\eta}}\right\|_\psi\le\sqrt{t}$, а $\inf_{0\le t\le T}\|\xi(t)\|_\psi=0$. Оцінка норми приросту має вигляд

$$\|\xi(t)-\xi(s)\|_\psi=\left\|\frac{\sin\left(\sqrt{t\xi\eta}\right)}{\sqrt{\xi\eta}}-\frac{\sin\left(\sqrt{s\xi\eta}\right)}{\sqrt{\xi\eta}}\right\|_\psi\le$$

$$\le 2\left\|\frac{\sin\left(\sqrt{\xi\eta}\left(\sqrt{t}-\sqrt{s}\right)\right)}{2\sqrt{\xi\eta}}\right\|_\psi\le\left\|\sqrt{t}-\sqrt{s}\right\|_\psi\le|t-s|^{\frac{1}{2}}.$$

Тобто в термінах теореми 4.2 маємо, що

$$\sigma(h)=Ch^{\frac{1}{2}},$$

де $C=1$.

Крім того, $Z_n(t)$ наближає $I(t)$ в просторі $C([0,1])$ з надійністю $1-\delta$ і точністю $\varepsilon$, якщо в нерівності (6) покласти $\varepsilon=0.03B(\beta)$, $\delta=0.01$ маємо, що

$$n\ge 3021.$$

Автори виражають подяку професору Ю. С. Мішурі за цінні поради.

## 5. Висновки

В роботі наведено необхідні відомості з теорії просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Розглянуто оцінки розподілу супремумів випадкових процесів на компакті із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Знайдено умови, за яких кратні інтеграли обчислюються із заданою надійністю та точністю у просторі $C(T)$ методом Монте-Карло. При отриманні цих результатів використовувались методи теорії випадкових процесів з просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

## Література


1. Yu. V. Kozachenko and Yu. Yu. Mlavets, *Probability of large deviations of sums of random processes from Orlicz space*, Monte Carlo Methods Appl. **17** (2011), 155–168.
2. Ю. В. Козаченко, Ю. Ю. Млавець, *Простори Банаха випадкових величин* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, Теорія ймовір. та матем. статист. **86** (2012), 92–107.
3. С. В. Ермаков, Е. И. Островский *Условия непрерывности, экспоненциальные оценки и центральная предельная теорема для случайных полей*, Деп. в ВИНИТИ, no. 752-В.86.0, 1986.
4. Yu. Yu. Mlavets, $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$*-spaces of random variables with exponential function* $\psi$, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kiev. Series: Physics & Mathematics **2** (2012), 19–22.
5. Yu. Kozachenko and Yu. Mlavets, *Stochastic processes from* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ *spaces*, Contemporary Mathematics and Statistics **2** (2014), no. 1, 55–75.
6. Ю. Ю. Млавець, *Умови рівномірної збіжності випадкових функціональних рядів із просторів* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика **1** (2014), 97–103.



Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

*Адреса електронної пошти*: ykoz@ukr.net

Кафедра кібернетики і прикладної математики, математичний факультет, Державний вищий навчальний заклад "Ужгородський національний університет", вул. Університетська, 14, Ужгород 88000, Україна

*Адреса електронної пошти*: yura-mlavec@ukr.net


Надійшла 15/02/2015