Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 96, 2017, с. 155–162

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 96, 2017, pp. 155–162

УДК 519.21

РЯДИ ФУР'Є ТА ФУР'Є – ХААРА ДЛЯ СТОХАСТИЧНИХ МІР

В. М. РАДЧЕНКО, Н. О. СТЕФАНСЬКА

Анотація. У роботі визначено ряди Фур'є та Фур'є – Хаара загальних стохастичних мір, доведено теореми про збіжність часткових сум цих рядів, про абсолютну неперервність стохастичної міри. Наведено приклад застосування до збіжності розв'язків стохастичного рівняння теплопровідності.

Ключові слова і фрази. Стохастична міра, ряди Фур'є випадкових процесів, ряди Фур'є – Хаара випадкових процесів, стохастичне рівняння теплопровідності.

1. Вступ

Важливим інструментом наближення випадкових функцій є представлення процесів у вигляді випадкових рядів. У цій статті розглядаються процеси і ряди, породжені значеннями загальної стохастичної міри μ, заданої на борелевих підмножинах $(0,1]$. На μ ми накладаємо тільки умову σ-адитивності за ймовірністю. По аналогії із класичними рядами вводяться поняття рядів Фур'є та Фур'є – Хаара для загальних стохастичних мір. Доводяться твердження про наближення значень μ та стохастичних інтегралів за μ за допомогою вказаних рядів.

Представлення випадкових процесів за допомогою рядів розглядалися, починаючи з відомого розкладу Пелі – Вінера для вінерівського процесу. Аналогічний розклад для дробового броунівського руху отримано в [1]. Останнім часом також досліджуються вейвлет-розклади процесів, наприклад у [2].

З іншого боку, вивчалися ряди Фур'є з випадковими коефіцієнтами, розглядалися властивості отриманих сум. Особливо докладно досліджено властивості рядів Фур'є з незалежними коефіцієнтами [3, 4].

Властивості звичайних рядів Фур'є та Фур'є – Хаара, використані в статті, можна знайти, наприклад у [5, 6].

Роботу побудовано таким чином. У п. 2 дано потрібні нам теоретичні відомості. У п. 3 розміщено доведення теорем про збіжність ряду Фур'є в точці та про абсолютну неперервність стохастичної міри. Далі наведено приклад застосування отриманих результатів для стохастичного рівняння теплопровідності. Властивості рядів Фур'є – Хаара для стохастичної міри представлено в останньому пункті.

2. Попередні відомості

Через $L_0 = L_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ позначимо множину всіх випадкових величин заданих на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, точніше кажучи, їхніх класів P-еквівалентності. Збіжність в L_0 означає збіжність за ймовірністю. Нехай S — довільна множина, $\mathcal{B}$ — σ-алгебра підмножин S.

Означення 2.1. *Стохастичною мірою* (СМ) називається σ-адитивне відображення $\mu\colon \mathcal{B} \to L_0$.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 60G57, 60H15, 60H05.

Ми не накладаємо на μ ніяких вимог невід'ємності або узгодженості, у цьому сенсі наше означення є загальним. У [7] таку функцію множин названо загальною стохастичною мірою.

Як приклад стохастичної міри ми можемо взяти $\mu(A) = \int_0^T \mathbf{1}_A(s)\,dX(s)$, де $X(s)$ — квадратично-інтегровний мартингал або процес дробового броунівського руху з показником Хюрста $H > 1/2$. Ще одним прикладом СМ є α-стійкі міри, визначені на σ-алгебрі [8, розділ 3]. Інші приклади, а також умови того, що різниці значень випадкового процесу з незалежними приростами породжують СМ, є в [7, розділи 7 і 8].

Теорія інтегрування дійсних функцій за стохастичними мірами побудована, наприклад, у [7, 9]. Зокрема, будь-яка обмежена вимірна функція є інтегровною за будь-якою μ. Крім того, виконується аналог теореми Лебега про мажоровану збіжність [7, наслідок 1.2] або [9, твердження 7.1.1].

Будемо говорити, що $f_n \to f$ μ-майже скрізь, якщо для будь-якої множини $A \subset \{f_n \not\to f\}$, $A \in \mathcal{B}$, виконується $\mu(A) = 0$ майже напевно.

Інтеграл від випадкових функцій за дійсною мірою dx будемо розглядати в сенсі Рімана. Докладно такий інтеграл досліджено в [10], нагадаємо означення і важливе для нас твердження.

Означення 2.2. Нехай $B \subset \mathbb{R}^d$ — вимірна за Жорданом множина, $\xi\colon B \times \Omega \to \mathbb{R}$ — вимірна випадкова функція. Будемо говорити, що ξ інтегровна на B, якщо для будь-якої послідовності розбиттів

$$B = \bigcup_{1 \le k \le k_n} B_{kn},\ n \ge 1, \quad \max_k \operatorname{diam} B_{kn} \to 0,\ n \to \infty,$$

та будь-яких $x_{kn} \in B_{kn}$ існує границя за ймовірністю інтегральних сум

$$\int_B \xi(x)\,dx := \mathsf{P}\lim_{n\to\infty} \sum_{1 \le k \le k_n} \xi(x_{kn})\mathsf{m}\left(B_{kn}\right).$$

Тут m позначає міру Жордана, у кожному розбитті множини B_{kn}, $1 \le k \le k_n$, вимірні за Жорданом і перетинаються лише по своїх межах.

Очевидно, що коли для траєкторій ξ існує звичайний інтеграл Рімана при кожному фіксованому ω, то ξ інтегровна і в сенсі означення 2.2, і значення отриманих інтегралів будуть рівні.

Теорема 2.1 (теорема 4.1 [10]). *Нехай μ — СМ на $(S, \mathcal{B})$, $B \subset \mathbb{R}^d$ — вимірна за Жорданом множина. Припустимо, що $h(x, s)\colon B \times S \to \mathbb{R}$ — вимірна невипадкова функція, інтегровна за Ріманом за dx на B для кожного фіксованого s, та $|h(x, s)| \le q(s)$, $\int_B |h(x, s)|\,dx \le q_1(s)$, де $q, q_1\colon S \to \mathbb{R}$ інтегровні на S за $d\mu(s)$. Тоді випадкова функція $\xi(x) = \int_S h(x, s)\,d\mu(s)$ інтегровна на B, та*

$$\int_B dx \int_S h(x, s)\,d\mu(s) = \int_S d\mu(s) \int_B h(x, s)\,dx.$$

3. Ряди Фур'є загальних стохастичних мір

Нехай $\mathcal{B}$ — борелева σ-алгебра підмножин $(0, 1]$. Для СМ μ розглянемо ряд Фур'є в наступному сенсі. Покладемо

$$\xi_k = \int_{(0,1]} \exp\{-2\pi i k t\}\,d\mu(t) :=$$
$$:= \int_{(0,1]} \cos(2\pi k t)\,d\mu(t) - i \int_{(0,1]} \sin(2\pi k t)\,d\mu(t), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Означення 3.1. Ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_k \exp\{2\pi ikt\} \tag{2}$$

називається *рядом Фур'є СМ* μ, а випадкові величини ξ_k — *коефіцієнтами Фур'є ряду* (2). *Частковими сумами ряду* (2) називаються суми

$$s_n(t) = \sum_{|k|\le n} \xi_k \exp\{2\pi ikt\}.$$

Стохастичні інтеграли, записані в (1), визначені для будь-якої μ, оскільки підінтегральні функції обмежені. Тому ряд Фур'є існує для будь-якої СМ на $\mathcal{B}$.

Теорема 3.1 показує єдиність μ для даних $\xi_k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Теорема 3.1. *Якщо всі $\xi_k = 0$ майже напевно, $k\in\mathbb{Z}$, то $\mu(A) = 0$ майже напевно, $A\in\mathcal{B}$.*

Доведення. Як відомо, для будь-якої СМ μ існує дійсна контрольна міра λ така, що $\mu(A) = 0$ для всіх таких A, що $\lambda(A) = 0$ [7, теорема B.2.2]. Розглянемо простір функцій

$$\widetilde{\mathbb{C}} = \{f\in\mathbb{C}([0,1]) : f(0) = f(1)\}.$$

Із теореми Стоуна–Вейєрштрасса (застосованої для функцій, визначених на колі довжини 1) випливає, що тригонометричні поліноми щільні в $\widetilde{\mathbb{C}}$ з рівномірною метрикою. З умови теореми маємо, що для будь-якого тригонометричного полінома P буде $\int_{(0,1]} P\,d\mu = 0$. З аналога теореми Лебега [7, твердження 7.1.1] отримуємо, що $\int_{(0,1]} f\,d\mu = 0$ для всіх $f\in\widetilde{\mathbb{C}}$. Клас $\widetilde{\mathbb{C}}$ щільний в $L_1(\lambda)$, і тому в ньому для будь-якої $A\in\mathcal{B}$ знайдуться f_n такі, що збігаються до $\mathbf{1}_A$ майже скрізь відносно міри λ. Оскільки міра λ контрольна, f_n будуть збігатися до $\mathbf{1}_A$ майже скрізь відносно μ. Очевидно, що функції виду

$$g_n = f_n\mathbf{1}_{\{|f_n|<2\}} + 2\mathbf{1}_{\{f_n\ge 2\}} - 2\mathbf{1}_{\{f_n\le -2\}}$$

є рівномірно обмеженими, належать $\widetilde{\mathbb{C}}$ і збігаються до $\mathbf{1}_A$ μ-майже скрізь. З аналога теореми Лебега отримуємо, що

$$\int_{(0,1]} g_n\,d\mu \xrightarrow{\mathsf{P}} \int_{(0,1]} \mathbf{1}_A\,d\mu = \mu(A).$$

Оскільки $\int_{(0,1]} g_n\,d\mu = 0$, то $\mu(A) = 0$ майже напевно. □

У наступному твердженні ми отримуємо слабку збіжність часткових сум s_n.

Теорема 3.2. *Нехай функція $g\in\widetilde{\mathbb{C}}$ є такою, що її ряд Фур'є збігається до g рівномірно на* $[0,1]$. *Тоді*

$$\int_{(0,1]} g(x)s_n(x)\,dx \xrightarrow{\mathsf{P}} \int_{(0,1]} g(x)\,d\mu(x), \quad n\to\infty \tag{3}$$

(інтеграл від випадкової функції розуміємо в сенсі означення 2.2).

Доведення. Маємо

$$\int_{(0,1]} g(x)s_n(x)\,dx = \int_{(0,1]} g(x)\left(\sum_{|k|\le n}\xi_k \exp\{2\pi ikx\}\right)dx =$$
$$= \int_{(0,1]} g(x)\,dx \sum_{|k|\le n}\exp\{2\pi ikx\}\int_{(0,1]}\exp\{-2\pi ikt\}\,d\mu(t) =$$
$$= \sum_{|k|\le n}\int_{(0,1]} g(x)\,dx\exp\{2\pi ikx\}\int_{(0,1]}\exp\{-2\pi ikt\}\,d\mu(t) \overset{(*)}{=}$$
$$\overset{(*)}{=} \sum_{|k|\le n}\int_{(0,1]}\exp\{-2\pi ikt\}\,d\mu(t)\int_{(0,1]}\exp\{2\pi ikx\}g(x)\,dx =$$
$$= \int_{(0,1]} d\mu(t)\left(\sum_{|k|\le n}\exp\{-2\pi ikt\}\int_{(0,1]}\exp\{2\pi ikx\}g(x)\,dx\right).$$

У рівності $(*)$ ми використали теорему 2.1. При зміні порядку інтегрування за dx та $d\mu(t)$ взяли $q(t) = q_1(t) = \sup_x |g(x)|$. За умовою теореми,

$$\sum_{|k|\le n}\exp\{-2\pi ikt\}\int_{(0,1]}\exp\{2\pi ikx\}\,g(x)\,dx \to g(t)$$

рівномірно на $[0,1]$ при $n\to\infty$. З аналога теореми Лебега отримаємо (3). □

Зауваження 3.1. Різні достатні умови рівномірної збіжності ряду Фур'є до g можна знайти, наприклад у [6, п. II.8 і II.10]. Зокрема, достатньо, щоб g задовольняла умову Гельдера або була неперервною функцією з обмеженою варіацією.

Наступне твердження дає умову певної абсолютної неперервності μ відносно міри Лебега в термінах коефіцієнтів Фур'є.

Теорема 3.3. *Нехай* $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\xi_k| < +\infty$ *майже напевно,* $\xi(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\xi_k\exp\{2\pi ikt\}$, *функція* $g\in\widetilde{\mathbb{C}}$ *є такою, що її ряд Фур'є збігається до* g *рівномірно на* $[0,1]$. *Тоді*

$$\int_{(0,1]} g(t)\,d\mu = \int_{(0,1]}\xi(t)g(t)\,dt.$$

Доведення. Відмітимо, що $\xi(t)$ має неперервні траєкторії як границя рівномірно збіжного ряду Фур'є. Тому $\int_{(0,1]}\xi(t)g(t)\,dt$ визначений як звичайний інтеграл Рімана при кожному фіксованому $\omega\in\Omega$, його значення збігається з величиною, визначеною за означенням 2.2.

За теоремою 3.2

$$\int_{(0,1]} g(t)s_n(t)\,dt \xrightarrow{\mathsf{P}} \int_{(0,1]} g(t)\,d\mu(t).$$

Тому досить, щоб виконувалось

$$\int_{(0,1]} g(t)s_n(t)\,dt \xrightarrow{\mathsf{P}} \int_{(0,1]}\xi(t)g(t)\,dt.$$

Це випливає з рівномірної збіжності підінтегральних функцій при кожному ω. □

4. Збіжність розв'язків рівняння теплопровідності

Як приклад застосування отриманих вище результатів, розглянемо збіжність розв'язків стохастичного рівняння теплопровідності, керованого μ:

$$du(t,x) = a^2\Delta u(t,x)\,dt + \sigma(t,x)\,d\mu(t), \quad u(0,x) = u_0(x), \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$$

(оператор Δ діє за змінною x). Ми беремо розв'язок цього рівняння у м'якому сенсі:

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} p(t,x-y)u_0(y)\,dy + \int_{(0,t]} d\mu(r) \int_{\mathbb{R}^d} p(t-r,x-y)\sigma(r,y)\,dy\,. \tag{4}$$

Тут $p(t,x) = (4a^2\pi t)^{-d/2}e^{-|x|^2/4a^2t}$ — фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності. Ряди Фур'є будемо розглядати для функцій на $[0,T]$ замість $[0,1]$, зробивши очевидні зміни в означеннях. Через C позначатимемо константу, точне значення якої неважливе.

Відмітимо, що в роботі [11] наведено приклад застосування перетворення Фур'є до збіжності розв'язків рівняння (4).

Накладемо такі умови.

A1. $u_0(y) = u_0(y,\omega)\colon \mathbb{R}^d \times \Omega \to \mathbb{R}$ вимірна і при кожному фіксованому ω обмежена.
A2. $\sigma(r,y)\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ вимірна й обмежена.
A3. $|\sigma(r_1,y_1) - \sigma(r_2,y_2)| \le C\,(|r_1 - r_2| + |y_1 - y_2|)$.

Теорема 4.1. *Нехай виконуються умови A1–A3, s_n — часткові суми ряду* (2),

$$u_n(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} p(t,x-y)u_0(y)\,dy + \int_{(0,t]} s_n(r)\,dr \int_{\mathbb{R}^d} p(t-r,x-y)\sigma(r,y)\,dy\,. \tag{5}$$

Тоді для будь-яких $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^d$

$$u_n(t,x) \xrightarrow{\mathsf{P}} u(t,x), \quad n \to \infty,$$

де $u(t,x)$ *визначено в* (4).

Доведення. Припущення A1 і A2 дають, що інтеграли, які записано в (4) і (5), визначені. (Інтеграл по dr в (5) взято в сенсі означення 2.2, його існування також спирається на твердження теореми 2.1.) Позначимо

$$g(z,r) = \int_{\mathbb{R}^d} p(t-r,x-y)\sigma(r,y)\,dy, \quad z = (t,x), \quad 0 \le r < t,$$

а для $t \le r \le T$ продовжимо g лінійним чином так, щоб $g(z,0) = g(z,T)$. Для $r_1, r_2 \in [0,t)$ маємо

$$\begin{aligned}
&|g(z,r_1) - g(z,r_2)| = \\
&= C\left|\int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{-\frac{|y|^2}{4a^2(t-r_1)}}}{(t-r_1)^{d/2}}\,\sigma(r_1,x-y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{-\frac{|y|^2}{4a^2(t-r_2)}}}{(t-r_2)^{d/2}}\,\sigma(r_2,x-y)\,dy\right| \overset{(*)}{=} \\
&\overset{(*)}{=} C\left|\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|v|^2}\sigma\left(r_1, x - v\sqrt{4a^2(t-r_1)}\right)dv - \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|v|^2}\sigma\left(r_2, x - v\sqrt{4a^2(t-r_2)}\right)dv\right| = \\
&= C\left|\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|v|^2}\left(\sigma\left(r_1, x - v\sqrt{4a^2(t-r_1)}\right) - \sigma\left(r_2, x - v\sqrt{4a^2(t-r_2)}\right)\right)dv\right| \overset{(**)}{\le} \\
&\overset{(**)}{\le} C\left(|r_1 - r_2| + \left|\sqrt{4a^2(t-r_1)} - \sqrt{4a^2(t-r_2)}\right|\right)\int_{\mathbb{R}^d} (1+|v|)e^{-|v|^2}dv.
\end{aligned}$$

(У $(*)$ ми використали заміну $v = y/\sqrt{4a^2(t-r)}$, а в $(**)$ — припущення A3.)

Тому функція $g(z,r)$ має обмежену варіацію на $[0,T]$, є неперервною, і за [6, теорема II.8.1] вона рівномірно наближається своїм рядом Фур'є. Використання теореми 3.2 завершує доведення. □

5. Ряди Фур'є – Хаара загальних стохастичних мір

Знову будемо розглядати СМ μ на борелевій σ-алгебрі в $(0,1]$. Розглянемо функцію $\tilde{\mu}(t) = \mu((0,t])$, $0 \le t \le 1$. За допомогою рядів Фур'є–Хаара ми отримаємо наближення $\tilde{\mu}(t)$ ступеневими функціями з випадковими коефіцієнтами.

Будемо використовувати позначення

$$d_k^i = i2^{-k}, \quad k \ge 0, \quad 0 \le i \le 2^k, \quad \Delta_1 = \Delta_0^0 = (0,1), \quad \overline{\Delta}_1 = [0,1],$$
$$\Delta_n = \Delta_k^i = \left(d_k^{i-1}, d_k^i\right), \quad \overline{\Delta}_n = \left[d_k^{i-1}, d_k^i\right], \quad 2^k + 1 \le n \le 2^{k+1},$$
$$\Delta_n^+ = \left(\Delta_k^i\right)^+ = \left(d_k^{i-1}, d_{k+1}^{2i-1}\right) = \Delta_{k+1}^{2i-1}, \quad \Delta_n^- = \left(\Delta_k^i\right)^- = \left(d_{k+1}^{2i-1}, d_k^i\right) = \Delta_{k+1}^{2i}.$$

Класична ортонормована система Хаара — це система функцій

$$\chi = \{\chi_n(x),\ n \ge 1\}, \quad x \in [0,1],$$

в якій $\chi_1(x) \equiv 1$, а при $2^k + 1 \le n \le 2^{k+1}$

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \overline{\Delta}_n, \\ 2^{k/2}, & x \in \Delta_n^+, \\ -2^{k/2}, & x \in \Delta_n^-. \end{cases}$$

У точках розриву беремо

$$\chi_n(x) = \big(\chi_n(x-) + \chi_n(x+)\big)/2, \quad \chi_n(0) = \chi_n(0+), \quad \chi_n(1) = \chi_n(1-).$$

Нехай траєкторії функції $\tilde{\mu}(t)$ інтегровні за Ріманом при кожному ω. Тоді її коефіцієнти Фур'є–Хаара стандартно визначаються рівністю

$$\eta_n = \int_{[0,1]} \tilde{\mu}(t)\chi_n(t)\,dt = 2^{k/2}\left(\int_{\Delta_n^+} \tilde{\mu}(t)\,dt - \int_{\Delta_n^-} \tilde{\mu}(t)\,dt\right). \tag{6}$$

Ми будемо використовувати формулу інтегрування частинами, наведену в теоремі 5.1.

Теорема 5.1. *Нехай $\tilde{\mu}(t)$ інтегровна на $[a,b]$ у сенсі означення 2.2. Тоді*

$$\int_{[a,b]} \tilde{\mu}(t)\,dt = b\tilde{\mu}(b) - a\tilde{\mu}(a) - \int_{(a,b]} t\,d\mu. \tag{7}$$

Доведення. Візьмемо розбиття $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_j = b$ з діаметрами, які прямують до нуля. Використовуючи в $(*)$ аналог теореми Лебега, матимемо

$$\int_{(a,b]} t\,d\mu \overset{(*)}{=} \mathsf{P}\lim_{j\to\infty} \int_{(a,b]} \sum_{i=1}^{j} t_i \mathbf{1}_{(t_{i-1},t_i]}(t)\,d\mu = \mathsf{P}\lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{j} t_i\big(\tilde{\mu}(t_i) - \tilde{\mu}(t_{i-1})\big) =$$
$$= b\tilde{\mu}(b) - a\tilde{\mu}(a) - \mathsf{P}\lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{j} \tilde{\mu}(t_{i-1})\,(t_i - t_{i-1})\,.$$

Остання сума прямує до $\int_{[a,b]} \tilde{\mu}(t)\,dt$ згідно з означенням 2.2. □

Із (6), використовуючи (7), при $2^k+1 \le n \le 2^{k+1}$ маємо

$$\eta_n = 2^{k/2}\Bigg(-d_k^i\tilde\mu\big(d_k^i\big) + 2d_{k+1}^{2i-1}\tilde\mu\big(d_{k+1}^{2i-1}\big) - d_k^{i-1}\tilde\mu\big(d_k^{i-1}\big) - \\ - \int_{\left(d_k^{i-1}, d_{k+1}^{2i-1}\right]} t\,d\mu + \int_{\left(d_{k+1}^{2i-1}, d_k^i\right]} t\,d\mu\Bigg). \tag{8}$$

Бачимо, що ця величина визначена для довільної СМ μ, навіть якщо її траєкторії не інтегровні за Ріманом. Надалі будемо визначати η_n саме за цією рівністю.

Означення 5.1. Нехай μ — довільна СМ на борелевій σ-алгебрі в $(0,1]$, випадкові величини η_n визначено за (8). Ряд

$$\sum_{n\ge1}\eta_n\chi_n(x) \tag{9}$$

називається *рядом Фур'є–Хаара* СМ μ. *Частковими сумами* ряду (9) називаються

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N}\eta_n\chi_n(x).$$

Як і в [5, формула (3.8)], для $x \ne d_k^i$, $0\le i\le 2^k$, отримуємо, що

$$S_{2^k}(x) = \sum_{i=1}^{2^k} 2^k\left(d_k^i\tilde\mu\left(d_k^i\right) - d_k^{i-1}\tilde\mu\left(d_k^{i-1}\right) - \int_{\Delta_k^i} t\,d\mu\right)\mathbf{1}_{\Delta_k^i}(x). \tag{10}$$

Аналогічно до [5, формула (3.11)], маємо, що для $2^k+1\le N<2^{k+1}$, $\Delta_N=\Delta_k^i$,

$$S_N(x) = \begin{cases} S_{2^{k+1}}(x), & x\in[0,d_k^i),\\ S_{2^k}(x), & x\in(d_k^i,1],\\ S_{2^k}(x)+\eta_N\chi_N(x), & x=d_k^i. \end{cases} \tag{11}$$

Теорема 5.2. *Для всіх $x\in(0,1]$ таких, що $\mu(\{x\})=0$ майже напевно, виконується*

$$S_N(x)\xrightarrow{\mathsf{P}}\tilde\mu(x),\quad N\to\infty.$$

Доведення. Використовуючи (10), маємо

$$S_{2^k}(x) = \sum_{i=1}^{2^k}\left(\tilde\mu\left(d_k^i\right) + (i-1)\mu\left(\Delta_k^i\right) - 2^k\int_{\Delta_k^i} t\,d\mu(t)\right)\mathbf{1}_{\Delta_k^i}(x) = \\ = \int_{(0,1]}\sum_{i=1}^{2^k}\Big(\mathbf{1}_{(0,d_k^i]}(t) + \big(i-1-2^k t\big)\mathbf{1}_{\Delta_k^i}(t)\Big)\mathbf{1}_{\Delta_k^i}(x)\,d\mu(t) =: \int_{(0,1]} g_k(x,t)\,d\mu(t).$$

Тут $g_k(x,t)\to\mathbf{1}_{(0,x]}(t)$, $k\to\infty$, для всіх $t<x$ і для всіх $t>x$, прямування в точці x ролі не грає за умови, що $\mu(\{x\})=0$ майже напевно. З аналога теореми Лебега дістанемо, що $S_{2^k}(x)\xrightarrow{\mathsf{P}}\tilde\mu(x)$. Також

$$\eta_N\chi_N(d_k^i) = -\frac12\Bigg(-d_k^i\tilde\mu\big(d_k^i\big) + 2d_{k+1}^{2i-1}\tilde\mu\big(d_{k+1}^{2i-1}\big) - d_k^{i-1}\tilde\mu\big(d_k^{i-1}\big) - \\ - \int_{\left(d_k^{i-1}, d_{k+1}^{2i-1}\right]} t\,d\mu + \int_{\left(d_{k+1}^{2i-1}, d_k^i\right]} t\,d\mu\Bigg),$$

і тому для кожної фіксованої точки $x_0 = d_k^i$ (при різних значеннях k тут одержуються різні i) буде $\eta_N \chi_N(x_0) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$, $N \to \infty$ за умови, що $\mu(\{x_0\}) = 0$ майже напевно. Залишається застосувати (11). □

Помітимо, що на відміну від використання часткових сум Фур'є в теоремі 3.2, тут ми отримуємо наближення траєкторій μ, а не інтегралів за $d\mu$.

Список літератури

1. K. Dzhaparidze and H. van Zanten, *Krein's spectral theory and the Paley–Wiener expansion for fractional Brownian motion*, Ann. Probab. **33** (2005), no. 2, 620–644.
2. G. Didier and V. Pipiras, *Gaussian stationary processes: adaptive wavelet decompositions, discrete approximations, and their convergence*, J. Fourier Anal. Appl. **14** (2008), no. 2, 203–234.
3. J.-P. Kahane, *Some Random Series of Functions*, D. C. Heath & Co., Lexington, Mass., 1968.
4. M. Talagrand, *Upper and Lower Bounds for Stochastic Processes. Modern Methods and Classical Problems*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2014.
5. B. S. Kashin and A. A. Saakyan, *Orthogonal Series*, "Nauka", Moscow, 1984; English transl., AMS, Providence, Rhode Island, 1989.
6. A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Second edition, vol. 1, 2, Cambridge University Press, London–New York, 1959.
7. S. Kwapień and W. A. Woycziński, *Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple*, Birkhäuser, Boston, 1992.
8. G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Chapman & Hall, Boca Raton, 1994.
9. V. N. Radchenko, *Integrals with respect to general random measures*, Proceedings of the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, vol. 27, Institute of Mathematics, Kiev, 1999. (Russian)
10. V. Radchenko, *Riemann integral of a random function and the parabolic equation with a general stochastic measure*, Teor. Imovir. Mat. Stat. **87** (2012), 163–175.
11. V. M. Radchenko and N. O. Stefans'ka, *Fourier transform of general stochastic measures*, Teor. Imovir. Mat. Stat. **94** (2016), 144–150. (Ukrainian)

Кафедра математичного аналізу, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: vradchenko@univ.kiev.ua

Кафедра математичного аналізу, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: valentinasavych@mail.ru

Стаття надійшла до редколегії 07.12.2016

THE FOURIER SERIES AND FOURIER–HAAR SERIES OF STOCHASTIC MEASURES

V. M. RADCHENKO, N. O. STEFANSKA

Abstract. The Fourier series and Fourier–Haar series of general stochastic measures are defined. The convergence of partial sums of the series is proved, the absolute continuity of stochastic measures is studied. Application for convergence of solutions of stochastic heat equation is considered.

РЯДЫ ФУРЬЕ И ФУРЬЕ – ХААРА ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ МЕР

В. Н. РАДЧЕНКО, Н. О. СТЕФАНСКАЯ

Аннотация. В работе определены ряды Фурье и Фурье – Хаара общих стохастических мер, доказаны теоремы о сходимости частичных сумм этих рядов, об абсолютной непрерывности стохастической меры. Приведен пример применения к сходимости решений стохастического уравнения теплопроводности.