Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 97, 2017, с. 83–96

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 97, 2017, pp. 83–96

ОЦІНКИ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД СТОХАСТИЧНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ІЗ ПЕРІОДИЧНО СТАЦІОНАРНИМИ ПРИРОСТАМИ

П. С. КОЗАК, М. П. МОКЛЯЧУК

Світлій пам'яті Михайла Йосиповича Ядренка присвячуємо цю статтю

Анотація. Досліджується задача оптимального оцінювання лінійного функціонала $A_N\xi = \sum_{k=0}^{N} a(k)\xi(k)$ від невідомих значень стохастичної послідовності $\xi(k)$ із періодично стаціонарними приростами за спостереженнями цієї послідовності у моменти часу $\mathbb{Z}\setminus\{0,1\dots,N\}$. Знайдено формули для обчислення середньоквадратичної похибки та спектральної характеристики оптимальної оцінки функціонала у тому випадку, коли спектральна щільність послідовності точно відома. Для заданих множин допустимих спектральних щільностей визначено множини найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксні спектральні характеристики оптимальної оцінки функціонала.

Ключові слова і фрази. Послідовність із періодично стаціонарними приростами, робастна оцінка, середньоквадратична похибка, найменш сприятлива спектральна щільність, мінімаксна спектральна характеристика.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 60G10, 60G25, 60G35; Secondary: 62M20, 93E10, 93E11.

1. Вступ

Серед сучасних напрямків розвитку теорії випадкових процесів важливу роль відіграють задачі оцінювання невідомих значень випадкових процесів. Класичні методи дослідження задач оцінювання невідомих значень стаціонарних процесів (задачі екстраполяції, інтерполяції та фільтрації) із відомими спектральними щільностями розроблено у працях А. М. Колмогорова [5], Н. Вінера [26], А. М. Яглома [27, 28]. Дослідження випадкових процесів зі стаціонарними n-ми приростами розпочаті А. М. Ягломом [29]. У цій статті отримано спектральне зображення стохастичних приростів, розв'язана задача прогнозування значень стохастичного приросту за відомими спостереженнями. Випадкові процеси зі стаціонарними приростами вивчались також у роботах М. С. Пінскера [23], М. С. Пінскера та А. М. Яглома [22]. У тому випадку, коли точне значення спектральної щільності невідоме, проте задана множина допустимих спектральних щільностей, застосовується мінімаксний метод розв'язування задач оцінювання, який полягає у пошуку оцінки, яка мінімізує величину похибки одночасно для всіх щільностей із заданого класу. Уперше мінімаксний підхід до задачі екстраполяції стаціонарних процесів застосував У. Гренандер [2]. У роботі Ю. Франке [3] досліджується задача мінімаксної екстраполяції стаціонарних послідовностей за допомогою методів опуклої оптимізації. Огляд результатів із робастних методів оцінювання, отриманих до 1985 року, зроблено у статті С. А. Кассама та Г. В. Пура [4]. У роботах М. П. Моклячука [13–16] досліджуються задачі екстраполяції, інтерполяції та фільтрації для стаціонарних процесів і послідовностей. Результати досліджень задач інтерполяції, екстраполяції та фільтрації векторнозначних процесів висвітлено у книзі М. П. Моклячука та О. Ю. Масютки [21]. Відповідні результати для періодично корельованих процесів опубліковано у книзі М. П. Моклячука та І. І. Голіченко [20]. Дослідженню оцінок функціоналів від процесів зі стаціонарними приростами та коінтегрованих послідовностей присвячено роботи М. М. Луза та М. П. Моклячука [6–12]. У працях М. П. Моклячука та М. І. Сідей [17–19] досліджуються задачі екстраполяції, інтерполяції та фільтрації стаціонарних послідовностей із пропусками спостережень.

У цій статті досліджується задача оптимального оцінювання лінійного функціонала $A_N\xi = \sum_{k=0}^{N} a(k)\xi(k)$ від невідомих значень стохастичної послідовності $\xi(k)$ із періодично стаціонарними приростами за спостереженнями цієї послідовності в точках $\mathbb{Z} \setminus \{0, 1 \ldots, N\}$. Знайдено формули для обчислення середньоквадратичної похибки та спектральної характеристики оптимальної оцінки функціонала у тому випадку, коли спектральна щільність послідовності відома. Якщо ж спектральна щільність послідовності невідома, а вказана лише множина допустимих спектральних щільностей, застосовано мінімаксний метод оцінювання. Для заданої множини допустимих спектральних щільностей визначено множину найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксні спектральні характеристики оптимальної оцінки функціонала.

2. Процеси з періодично стаціонарними приростами

Означення 2.1. Стохастичним n-м приростом із кроком $\mu \in \mathbb{Z}$ стохастичної послідовності $\{\eta(m), m \in \mathbb{Z}\}$ називається функція

$$\eta^{(n)}(m, \mu) = (1 - B_\mu)^n \, \eta(m) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} \eta(m - l\mu), \tag{1}$$

де B_μ — оператор зсуву на μ кроків такий, що $B_\mu \eta(m) = \eta(m - \mu)$, $m, \mu \in \mathbb{Z}$.

Означення 2.2. Стохастичний n-й приріст $\eta^{(n)}(m, \mu)$ стохастичної послідовності $\{\eta(m), m \in \mathbb{Z}\}$ називається стаціонарним (у широкому сенсі), якщо математичні сподівання

$$\mathsf{E}\,\eta^{(n)}(m_0, \mu) = c^{(n)}(\mu),$$

$$\mathsf{E}\,\eta^{(n)}(m_0 + m, \mu_1)\,\overline{\eta^{(n)}(m_0, \mu_2)} = D^{(n)}(m, \mu_1, \mu_2)$$

існують при всіх цілих m_0, μ, m, μ_1, μ_2 і не залежать від m_0. Функція $c^{(n)}(\mu)$ називається середнім значенням стаціонарного n-го приросту, а функція $D^{(n)}(m, \mu_1, \mu_2)$ називається структурною функцією стаціонарного n-го приросту стохастичної послідовності $\{\eta(m), m \in \mathbb{Z}\}$.

Означення 2.3. Стохастична послідовність $\{\eta(m), m \in \mathbb{Z}\}$ називається послідовністю зі стаціонарними n-ми приростами, якщо n-й приріст $\eta^{(n)}(m, \mu)$, що визначається формулою (1), стаціонарний.

Означення 2.4. Векторна стохастична послідовність $\eta(m) = \{\eta_p(m)\}_{p=1,2,\ldots,T}$ називається послідовністю зі стаціонарними n-ми приростами, якщо n-ті прирости компонент $\eta_p^{(n)}(m, \mu)$, $p = 1, 2, \ldots, T$, послідовності, що визначаються формулою (1), стаціонарні і стаціонарно зв'язані.

Розглянемо стохастичну послідовнсть $\zeta(m)$ та породжену нею послідовність стохастичних приростів $\zeta^{(n)}(m, \mu)$.

Означення 2.5. Стохастичний n-й приріст $\zeta^{(n)}(m, \mu T)$ стохастичної послідовності $\{\zeta(m), m \in \mathbb{Z}\}$ називається періодично стаціонарним (періодично корельованим із періодом T), якщо математичні сподівання

$$\mathsf{E}\,\zeta^{(n)}(m + T, \mu T) = \mathsf{E}\,\zeta^{(n)}(m, \mu T) = c^{(n)}(m, \mu T),$$

$$\mathsf{E}\,\zeta^{(n)}(m+T,\mu_1 T)\,\overline{\zeta^{(n)}(k+T,\mu_2 T)} = D^{(n)}(m+T,k+T;\mu_1 T,\mu_2 T) = \\ = D^{(n)}(m,k;\mu_1 T,\mu_2 T)$$

існують при довільних цілих m, k, μ, μ_1, μ_2 і не існує числа, меншого, ніж $T > 0$, для якого виконуються ці рівності.

Розглянемо векторну послідовність $\zeta^{(n)}(m,\mu)$, утворену розбиттям на блоки послідовності $\zeta^{(n)}(m,\mu T)$. Координата $\zeta_p^{(n)}(m,\mu)$, $p = 1,2,\dots,T$, вектора $\zeta^{(n)}(m,\mu)$ визначається за правилом $\zeta_p^{(n)}(m,\mu) = \zeta^{(n)}(mT+p-1,\mu T)$, $p = 1,2,\dots,T$.

Справджується така теорема.

Теорема 2.1. *Стохастичний приріст n-го порядку $\zeta^{(n)}(m,\mu T)$ є періодично стаціонарним приростом тоді і тільки тоді, коли T, $T > 0$, — це найменше ціле число, для якого T-вимірна послідовність $\zeta^{(n)}(m,\mu)$ є стаціонарною за параметром m для довільного цілого μ.*

Доведення. Доведення теореми випливає із наступних рівностей.

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\,\zeta_{p_1}^{(n)}(m_0+m,\mu_1)\,\overline{\zeta_{p_2}^{(n)}(m_0,\mu_2)} = \\
&\quad = \mathsf{E}\,\zeta^{(n)}\big((m_0+m)T+p_1-1,\mu_1 T\big)\,\overline{\zeta^{(n)}(m_0T+p_2-1,\mu_2 T)} = \\
&\quad = \mathsf{E}\,\zeta^{(n)}(m_0T+mT+p_1-1,\mu_1 T)\,\overline{\zeta^{(n)}(m_0T+p_2-1,\mu_2 T)} = \\
&\quad = \mathsf{E}\,\zeta^{(n)}(mT+p_1-1,\mu_1 T)\,\overline{\zeta^{(n)}(p_2-1,\mu_2 T)} = \mathsf{E}\,\zeta_{p_1}^{(n)}(m,\mu_1 T)\,\overline{\zeta_{p_2}^{(n)}(0,\mu_2 T)}.
\end{aligned}$$

$$\mathsf{E}\,\zeta_p^{(n)}(m_0,\mu T) = \mathsf{E}\,\zeta^{(n)}(m_0T+p-1,\mu T) = \mathsf{E}\,\zeta^{(n)}(p-1,\mu T) = \mathsf{E}\,\zeta_p^{(n)}(0,\mu T). \qquad \square$$

Із теореми 2.1 випливає, що при заміні

$$\xi_p(k) = \zeta(kT+p-1), \quad p = 1,2,\dots,T; \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

отримаємо векторну послідовність $\xi(k) = \{\xi_p(k)\}_{p=1,2,\dots,T}$, $k \in \mathbb{Z}$, із стаціонарними n-ми приростами. Дійсно, для всіх $p = 1,2,\dots,T$

$$\xi_p^{(n)}(m,\mu) = \sum_{l=0}^{n}(-1)^l\binom{n}{l}\xi_p(m-l\mu) = \sum_{l=0}^{n}(-1)^l\binom{n}{l}\zeta\big((m-l\mu)T+p-1\big) = \\ = \zeta^{(n)}(mT+p-1,\mu T),$$

де $\xi_p^{(n)}(m,\mu)$ — n-й приріст p-ї компоненти векторної послідовності $\xi(m)$.
Якщо матриця спектральних щільностей $F(\lambda)$ стаціонарної послідовності $\xi^{(n)}(m,\mu)$ відома, то сама послідовність допускає спектральний розклад [1, 12, 29].

$$\xi_p^{(n)}(m,\mu) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\lambda}\big(1-e^{-i\mu\lambda}\big)^n \frac{1}{(i\lambda)^n}\,dZ_p(\lambda), \quad p = 1,2,\dots,T, \tag{3}$$

де $\boldsymbol{Z}(\Delta) = \{Z_p(\Delta)\}_{p=1}^{T}$ — ортогональна випадкова міра послідовності $\xi^{(n)}(m,\mu)$.

3. Класичний метод оцінювання

Нехай векторна стохастична послідовність $\xi(m)$, яка отримана із послідовності $\zeta(m)$ за допомогою перетворення (2), визначає стаціонарний n-й приріст $\xi^{(n)}(m,\mu) = \big\{\xi_p^{(n)}(m,\mu)\big\}_{p=1}^{T}$ із матрицею спектральної щільності $F(\lambda) = \{f_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^{T}$.

Розглянемо задачу лінійного середньоквадратичного оптимального оцінювання функціонала

$$A_N\xi = \sum_{j=0}^{N}\boldsymbol{a}(j)^{\top}\xi(j) = \sum_{j=0}^{N}\sum_{p=1}^{T}a_p(j)\xi_p(j) \tag{4}$$

від невідомих значень векторної послідовності $\xi(j) = \{\xi_p(j)\}_{p=1}^{T}$ за даними спостережень послідовності $\xi(j)$ у точках $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \dots, N\}$.

Із співвідношення (1) за допомогою перетворень можна отримати зображення випадкової послідовності $\xi_p(j)$ через n-й приріст

$$\xi_p(j) = \frac{1}{(1 - B_\mu)^n} \xi_p^{(n)}(j, \mu) = \sum_{k=-\infty}^{j} d_\mu(j-k) \xi_p^{(n)}(k, \mu), \quad p = 1, 2, \dots, T, \tag{5}$$

де $\{d_\mu(j) : j \geqslant 0\}$ — коефіцієнти при x^j в розкладі $\sum_{j=0}^{\infty} d_\mu(j) x^j = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{\mu k}\right)^n$.

Враховуючи представлення послідовності через прирости (5), функціонал (4) можна подати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} A_N \xi &= \sum_{j=0}^{N} \boldsymbol{a}(j)^\top \xi(j) = \sum_{j=0}^{N} \sum_{p=1}^{T} a_p(j) \xi_p(j) = \\ &= \sum_{p=1}^{T} \left[- \sum_{j=-\mu n}^{-1} v_p(j) \xi_p(j) + \sum_{j=0}^{N} \left(\sum_{k=j}^{N} a_p(k) d_\mu(k-j) \right) \xi_p^{(n)}(j, \mu) \right] = \\ &= - \sum_{j=-\mu n}^{-1} \sum_{p=1}^{T} v_p(j) \xi_p(j) + \sum_{j=0}^{N} \sum_{p=1}^{T} b_p(j) \xi_p^{(n)}(j, \mu) = \\ &= - \sum_{j=-\mu n}^{-1} \boldsymbol{v}(j)^\top \xi(j) + \sum_{j=0}^{N} \boldsymbol{b}(i)^\top \xi^{(n)}(j, \mu). \end{aligned}$$

З останнього співвідношення випливає, що функціонал $A_N \xi$ можна записати у вигляді різниці функціоналів

$$A_N \xi = B_N \xi - V_N \xi, \tag{6}$$

де

$$B_N \xi = \sum_{j=0}^{N} \boldsymbol{b}(j)^\top \xi^{(n)}(j, \mu), \qquad V_N \xi = \sum_{j=-\mu n}^{-1} \boldsymbol{v}(j)^\top \xi(j),$$

$$v_p(j) = \sum_{l=\left[-\frac{j}{m}\right]'}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} b_p(l\mu + j), \quad p = 1, 2, \dots, T, \quad j = -1, -2, \dots, -\mu n, \tag{7}$$

$$b_p(j) = \sum_{m=j}^{N} a_p(m) d_\mu(m - j), \quad p = 1, 2, \dots, T, \quad j = 0, 1, \dots, N, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{v}(j) = \big(v_1(j), v_2(j), \dots, v_T(j)\big)^\top, \qquad \boldsymbol{b}(j) = \big(b_1(j), b_2(j), \dots, b_T(j)\big)^\top.$$

У співвідношенні (7) $[x]'$ позначає найменше ціле число серед чисел, що більші або рівні x.

Нехай $\widehat{A}_N \xi$ — оптимальна в середньоквадратичному сенсі лінійна оцінка функціонала $A_N \xi$ за спостереженнями векторної випадкової послідовності $\xi(j)$ у точках $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \dots, N\}$. Позначимо через $\widehat{B}_N \xi$ оптимальну в середньоквадратичному сенсі лінійну оцінку значення функціонала $B_N \xi$ за спостереженнями стохастичного n-го приросту $\xi^{(n)}(m, \mu)$ у точках $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \dots, N + \mu n\}$. Оскільки значення послідовності $\xi(m)$ у точках $m = -1, -2, \dots, -\mu n$ відомі, то оцінку $\widehat{A}_N \xi$ можна записати у такому вигляді:

$$\widehat{A}_N \xi = \widehat{B}_N \xi - V_N \xi \tag{9}$$

Для середньоквадратичної похибки оцінки $\widehat{A}_N\xi$ справедливі такі співвідношення:

$$\Delta\Big(F, \widehat{A}_N\xi\Big) = \mathsf{E}\Big|A_N\xi - \widehat{A}_N\xi\Big|^2 = \mathsf{E}\Big|A_N\xi + V_N\xi - \widehat{B}_N\xi\Big|^2 = \\ = \mathsf{E}\Big|B_N\xi - \widehat{B}_N\xi\Big|^2 = \Delta\Big(F, \widehat{B}_N\xi\Big). \tag{10}$$

Позначимо через $H^{(N+\mu n)-}\big(\xi_\mu^{(n)}\big)$ замкнутий лінійний підпростір у просторі $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ випадкових величин другого порядку, який породжений величинами

$$\big\{\xi_p^{(n)}(l,\mu),\ p = 1,\ldots,T,\ l \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1,\ldots,N+\mu n\}\big\},$$

а через $L_2^{(N+\mu n)-}(F)$ позначимо підпростір, який породжений у просторі $L_2(F)$ функціями вигляду

$$e^{i\lambda l}(1-e^{-i\lambda\mu})^n\delta_p/(i\lambda)^n, \quad \delta_p = \{\delta_{pk}\}_{p=1}^T, \quad k = 1,2,\ldots,T, \quad l \in \mathbb{Z}\setminus\{0,1,\ldots,N+\mu n\}.$$

Тут δ_{pk} позначає дельта-символ Кронекера.

Між елементами $\xi_p^{(n)}(l,\mu)$ простору $H^{(N+\mu n)-}\big(\xi_\mu^{(n)}\big)$ та елементами

$$e^{i\lambda l}\big(1-e^{-i\lambda\mu}\big)^n\delta_p/(i\lambda)^n$$

простору $L_2^{(N+\mu n)-}(F)$ існує взаємно однозначна відповідність, що визначається співвідношенням (3).

Шукатимемо лінійну оцінку $\widehat{B}_N\xi$ у вигляді

$$\widehat{B}_N\xi = \int_{-\pi}^{\pi} \boldsymbol{h}(\lambda)^\top d\boldsymbol{Z}(\lambda), \tag{11}$$

де $\boldsymbol{h}(\lambda) = \{h_p(\lambda)\}_{p=1}^T$ — спектральна характеристика оцінки. Оптимальна оцінка $\widehat{B}_N\xi$ — це проекція елемента $B_N\xi$ простору H на підпростір $H^{(N+\mu n)-}\big(\xi_\mu^{(n)}\big)$. Вона визначається такими умовами:

$$\widehat{B}_N\xi \in H^{(N+\mu n)-}\big(\xi_\mu^{(n)}\big), \tag{12}$$

$$B_N\xi - \widehat{B}_N\xi \perp H^{(N+\mu n)-}\big(\xi_\mu^{(n)}\big). \tag{13}$$

З умови (13) випливає, що для всіх $p = 1,\ldots,T$ та $l \in \mathbb{Z}\setminus\{0,1,\ldots,N+\mu n\}$

$$\mathsf{E}\Big[\Big(B_N\xi - \widehat{B}_N\xi\Big)\overline{\xi_p^{(n)}(l,\mu)}\Big] = 0. \tag{14}$$

Оскільки

$$B_N\xi = \sum_{j=0}^{N}\boldsymbol{b}(j)^\top\xi^{(n)}(j,\mu) = \sum_{j=0}^{N}\boldsymbol{b}(j)^\top\int_{-\pi}^{\pi}e^{ij\lambda}\big(1-e^{-i\mu\lambda}\big)^n\frac{1}{(i\lambda)^n}\,d\boldsymbol{Z}(\lambda) = \\ = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{j=0}^{N}\boldsymbol{b}(j)^\top e^{ij\lambda}\,\frac{\big(1-e^{-i\mu\lambda}\big)^n}{(i\lambda)^n}\,d\boldsymbol{Z}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi}\boldsymbol{B}_N^{\mu}\big(e^{i\lambda}\big)^\top\,\frac{\big(1-e^{-i\mu\lambda}\big)^n}{(i\lambda)^n}\,d\boldsymbol{Z}(\lambda),$$

де

$$\boldsymbol{B}_N^{\mu}(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{N}\boldsymbol{b}(j)e^{ij\lambda},$$

то рівність (14) можна записати у вигляді

$$\mathsf{E}\Bigg[\int_{-\pi}^{\pi}\Bigg(\boldsymbol{B}_N^{\mu}\big(e^{i\lambda}\big)^\top\frac{\big(1-e^{-i\mu\lambda}\big)^n}{(i\lambda)^n} - \boldsymbol{h}(\lambda)^\top\Bigg)d\boldsymbol{Z}(\lambda)\times \\ \times\int_{-\pi}^{\pi}e^{-il\lambda}\frac{\big(1-e^{i\mu\lambda}\big)^n}{(-i\lambda)^n}\,d\overline{\boldsymbol{Z}(\lambda)}\Bigg] = 0, \quad l \in \mathbb{Z}\setminus\{0,1,\ldots,N+\mu n\}.$$

Отже,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\boldsymbol{B}_N^{\mu}(e^{i\lambda})\frac{(1-e^{-i\mu\lambda})^n}{(i\lambda)^n}-\boldsymbol{h}(\lambda)\right)^{\top}F(\lambda)\,\frac{(1-e^{i\mu\lambda})^n}{(-i\lambda)^n}\,e^{-il\lambda}\,d\lambda=0,$$
$$l\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1,\dots,N+\mu n\}.$$

З останьої умови випливає, що

$$\left(\boldsymbol{B}_N^{\mu}(e^{i\lambda})\frac{(1-e^{-i\mu\lambda})^n}{(i\lambda)^n}-\boldsymbol{h}(\lambda)\right)^{\top}F(\lambda)\,\frac{(1-e^{i\mu\lambda})^n}{(-i\lambda)^n}=\boldsymbol{C}_{N+\mu n}(e^{i\lambda})^{\top},$$
$$\boldsymbol{C}_{N+\mu n}(e^{i\lambda})=\sum_{j=0}^{N+\mu n}\boldsymbol{c}(j)e^{ij\lambda},$$

де $\boldsymbol{c}(j)=\{c_p(j)\}_{p=1}^{T}$ — невідомі коефіцієнти, які потрібно знайти. З останньої рівності знаходимо спектральну характеристику оцінки, яка має вигляд

$$\boldsymbol{h}(\lambda)^{\top}=\boldsymbol{B}_N^{\mu}(e^{i\lambda})^{\top}\,\frac{(1-e^{-i\lambda\mu})^n}{(i\lambda)^n}-\frac{(-i\lambda)^n\boldsymbol{C}_{N+\mu n}(e^{i\lambda})^{\top}}{(1-e^{i\lambda\mu})^n}\,F^{-1}(\lambda).$$

Знайдемо рівняння, що визначають невідомі коефіцієнти $\boldsymbol{c}(j)=\{c_p(j)\}_{p=1}^{T}$. З умови (12) випливає, що для всіх $j=0,\dots,N+\mu n$ справджується рівність

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\boldsymbol{B}_N^{\mu}(e^{i\lambda})^{\top}-\frac{\lambda^{2n}\boldsymbol{C}_{N+\mu n}(e^{i\lambda})^{\top}}{(1-e^{-i\lambda\mu})^n(1-e^{i\lambda\mu})^n}\,F^{-1}(\lambda)\right]e^{-ij\lambda}\,d\lambda=0.$$

Запишемо вказану рівність у вигляді ($j=0,\dots,N+\mu n$)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\boldsymbol{B}_N^{\mu}(e^{i\lambda})^{\top}e^{-ij\lambda}\,d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\lambda^{2n}\boldsymbol{C}_{N+\mu n}(e^{i\lambda})^{\top}}{(1-e^{-i\lambda\mu})^n(1-e^{i\lambda\mu})^n}\,F^{-1}(\lambda)e^{-ij\lambda}\,d\lambda. \tag{15}$$

Припустимо, що спектральна щільність $F(\lambda)$ задовольняє умову мінімальності

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Tr}\left[\frac{\lambda^{2n}}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}F^{-1}(\lambda)\right]d\lambda<\infty, \tag{16}$$

де $\mathrm{Tr}[A]$ — слід матриці A. Ця умова є необхідною та достатньою для того, щоб у задачі інтерполяції неможливо було побудувати безпомилкову оцінку невідомого значення послідовності [25].

Визначимо коефіцієнти Фур'є матричної функції

$$\frac{\lambda^{2n}}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}\,F^{-1}(\lambda).$$

Позначимо

$$D(j)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\lambda^{2n}}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}\,F^{-1}(\lambda)^{\top}e^{-ij\lambda}\,d\lambda,\quad j=0,\dots,N+\mu n.$$

Тоді з рівності (15) отримаємо систему рівнянь, які визначають невідомі коефіцієнти $\boldsymbol{c}(j)=\{c_p(j)\}_{p=1}^{T}$, $j=0,\dots,N+\mu n$:

$$\boldsymbol{b}(0)=D(0)\boldsymbol{c}(0)+D(-1)\boldsymbol{c}(1)+\dots+D(-N-\mu n)\boldsymbol{c}(N+\mu n),$$
$$\boldsymbol{b}(1)=D(1)\boldsymbol{c}(0)+D(0)\boldsymbol{c}(1)+\dots+D(1-N-\mu n)\boldsymbol{c}(N+\mu n),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\boldsymbol{b}(N+\mu n)=D(N+\mu n)\boldsymbol{c}(0)+D(N+\mu n-1)\boldsymbol{c}(1)+\dots+D(0)\boldsymbol{c}(N+\mu n).$$

Покладемо $\boldsymbol{b}(j)=\boldsymbol{0}$ при $j=N+1,N+2,\dots,N+\mu n$ і позначимо через $\boldsymbol{b}_{N+\mu n}=\{\boldsymbol{b}(j)\}_{j=0}^{N+\mu n}$ і $\boldsymbol{c}_{N+\mu n}=\{\boldsymbol{c}(j)\}_{j=0}^{N+\mu n}$ — вектори розмірності $(N+\mu n+1)T$, а через

$D_{N+\mu n}$ — матрицю розмірності $(N+\mu n+1)T \times (N+\mu n+1)T$, що складається із матриць-блоків розмірності $T \times T$

$$D_{N+\mu n} = \begin{pmatrix} D(0) & D(-1) & \dots & D(-N-\mu n) \\ D(1) & D(0) & \dots & D(1-N-\mu n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D(N+\mu n) & D(N+\mu n-1) & \dots & D(0) \end{pmatrix}$$

Тоді попередню систему рівнянь можна записати у вигляді

$$\boldsymbol{b}_{N+\mu n} = D_{N+\mu n}\boldsymbol{c}_{N+\mu n},$$

звідки отримаємо формулу для знаходження невідомих коефіцієнтів $c_p(j)$:

$$\boldsymbol{c}_{N+\mu n} = D^{-1}_{N+\mu n}\boldsymbol{b}_{N+\mu n}. \tag{17}$$

Скориставшись отриманими співвідношенями, можемо стверджувати, що спектральна характеристика $\boldsymbol{h}(\lambda) = \{h_p(\lambda)\}_{p=1}^T$ оптимальної оцінки $\widehat{B}_N\xi$ обчислюється за формулою

$$\boldsymbol{h}(\lambda)^\top = \boldsymbol{B}_N^\mu\big(e^{i\lambda}\big)^\top \frac{\big(1-e^{-i\lambda\mu}\big)^n}{(i\lambda)^n} - \\ - \frac{(-i\lambda)^n\Big[\sum_{j=0}^{N+\mu n}\Big(D^{-1}_{N+\mu n}\boldsymbol{b}_{N+\mu n}\Big)_j e^{ij\lambda}\Big]^\top}{\big(1-e^{i\lambda\mu}\big)^n} F^{-1}(\lambda). \tag{18}$$

Середньоквадратична похибка оцінки обчислюється за формулою

$$\Delta\Big(F,\widehat{B}_N\xi\Big) = \mathsf{E}\Big|B_N\xi - \widehat{B}_N\xi\Big|^2 = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(i\lambda)^n\Big[\sum_{j=0}^{N+\mu n}\Big(D^{-1}_{N+\mu n}\boldsymbol{b}_{N+\mu n}\Big)_j e^{ij\lambda}\Big]^\top}{\big(1-e^{i\lambda\mu}\big)^n} \times \\ \times F^{-1}(\lambda)\frac{(-i\lambda)^n\overline{\Big[\sum_{j=0}^{N+\mu n}\Big(D^{-1}_{N+\mu n}\boldsymbol{b}_{N+\mu n}\Big)_j e^{ij\lambda}\Big]}}{\big(1-e^{-i\lambda\mu}\big)^n}\,d\lambda = \\ = \langle \boldsymbol{c}_{N+\mu n}, D_{N+\mu n}\boldsymbol{c}_{N+\mu n}\rangle = \Big\langle D^{-1}_{N+\mu n}\boldsymbol{b}_{N+\mu n}, \boldsymbol{b}_{N+\mu n}\Big\rangle. \tag{19}$$

З указаних вище результатів отримаємо таку теорему.

Теорема 3.1. *Нехай векторна стохастична послідовність* $\{\xi(m), m\in\mathbb{Z}\}$ *визначає стаціонарний* n*-й приріст* $\xi^{(n)}(m,\mu)$ *із матрицею спектральної щільності* $F(\lambda) = \{f_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^T$*, що задовольняє умову* (16)*. Оптимальна лінійна оцінка* $\widehat{B}_N\xi$ *функціонала* $B_N\xi$ *від невідомих значень* $\xi^{(n)}(m,\mu)$*,* $m\in\{0,1,\dots,N\}$*, за даними спостережень послідовності* $\xi(m)$*,* $m\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1,\dots,N\}$*, визначається формулою* (11)*, де спектральна характеристика* $\boldsymbol{h}(\lambda) = \{h_p(\lambda)\}_{p=1}^T$ *оптимальної оцінки* $\widehat{B}_N\xi$ *розраховується за формулою* (18)*. Величина середньоквадратичної похибки* $\Delta\big(F,\widehat{B}_N\xi\big)$ *обчислюється за формулою* (19)*.*

Із теореми 3.1 можна, як наслідок, отримати оцінку невідомого значення приросту $\xi_p^{(n)}(m,\mu)$, $m = 0,1,\dots,N$, $p = 1,2,\dots,T$, за даними спостережень послідовності $\xi(m)$, $m\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1,\dots,N\}$. Для цього потрібно взяти вектор $\boldsymbol{b}(m) = e_p$ — вектор, у якого на p-му місці стоїть 1, а всі інші елементи рівні нулю, а вектори $\boldsymbol{b}(j)$, $j = 0,1,\dots,N$, $j\neq m$, є рівними 0. У такому випадку отримаємо, що $\boldsymbol{b}_{N+\mu n} = e_{mT+p}$ — вектор, у якого на $(mT+p)$-му місці 1, а всі інші елементи 0.

Оптимальна лінійна оцінка $\widehat{\xi}_p^{(n)}(m,\mu)$ невідомого значення приросту $\xi_p^{(n)}(m,\mu)$ визначається за формулою

$$\widehat{\xi}_p^{(n)}(m,\mu)=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_m(\lambda,\mu)^\top d\boldsymbol{Z}(\lambda), \tag{20}$$

спектральна характеристика $\varphi_m(\lambda,\mu)$ оптимальної оцінки $\widehat{\xi}_p^{(n)}(m,\mu)$ знаходиться за формулою

$$\varphi_m(\lambda,\mu)^\top=e_{mT+p}^\top e^{im\lambda}\,\frac{\left(1-e^{-i\lambda\mu}\right)^n}{(i\lambda)^n}-$$
$$-\frac{(-i\lambda)^n\left[\sum_{j=0}^{N+\mu n}\left(D_{N+\mu n}^{-1}e_{mT+p}\right)_j e^{ij\lambda}\right]^\top}{\left(1-e^{i\lambda\mu}\right)^n}F^{-1}(\lambda), \tag{21}$$

Для обчислення середньоквадратичної похибки оцінки матимемо таку формулу:

$$\begin{aligned}\Delta\Big(F,\xi_p^{(n)}(m,\mu)\Big)&=\langle\tilde{\boldsymbol{c}}_{N+\mu n},D_{N+\mu n}\tilde{\boldsymbol{c}}_{N+\mu n}\rangle=\\&=\Big\langle D_{N+\mu n}^{-1}e_{mT+p},D_{N+\mu n}D_{N+\mu n}^{-1}e_{mT+p}\Big\rangle=\\&=\Big\langle D_{N+\mu n}^{-1}e_{mT+p},e_{mT+p}\Big\rangle=\Big(D_{N+\mu n}^{-1}\Big)_{mT+p,mT+p},\end{aligned} \tag{22}$$

де $\tilde{\boldsymbol{c}}_{N+\mu n}=\{\tilde{\boldsymbol{c}}(j)\}_{j=0}^{N+\mu n}=D_{N+\mu n}^{-1}e_{mT+p}$.

Таким чином дістали такий наслідок для оцінки $\widehat{\xi}_p^{(n)}(m,\mu)$ невідомого значення приросту $\xi_p^{(n)}(m,\mu)$:

Наслідок 3.1. *Оптимальна лінійна оцінка $\widehat{\xi}_p^{(n)}(m,\mu)$ невідомого значення приросту $\xi_p^{(n)}(m,\mu)$, $m=0,1,\dots,N$, $p=1,2,\dots,T$ за даними спостережень послідовності $\xi(m)$, $m\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1,\dots,N\}$ визначається за формулою* (20), *спектральна характеристика $\varphi_m(\lambda,\mu)$ оптимальної оцінки $\widehat{\xi}_p^{(n)}(m,\mu)$ знаходиться за формулою* (21), *а середньоквадратична похибка обчислюється за формулою*

$$\Delta\Big(F,\xi_p^{(n)}(m,\mu)\Big)=\Big(D_{N+\mu n}^{-1}\Big)_{mT+p,mT+p}. \tag{23}$$

Із теореми 3.1 та формул (10) і (19) отримаємо таку теорему.

Теорема 3.2. *Нехай векторна стохастична послідовність $\{\xi(m),m\in\mathbb{Z}\}$ визначає стаціонарний n-й приріст $\xi^{(n)}(m,\mu)$ із матрицею спектральної щільності $F(\lambda)=\{f_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^T$, що задовольняє умову* (16). *Оптимальна лінійна оцінка $\widehat{A}_N\xi$ функціонала $A_N\xi$ від невідомих елементів $\xi(m),m\in\{0,1,\dots,N\}$, за даними спостережень послідовності $\xi(m)$, $m\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1,\dots,N\}$, визначається за формулою*

$$\widehat{A}_N\xi=\int_{-\pi}^{\pi}\boldsymbol{h}(\lambda)^\top d\boldsymbol{Z}(\lambda)-\sum_{j=-\mu n}^{-1}\boldsymbol{v}(j)^\top\xi(j),$$

де спектральна характеристика $\boldsymbol{h}(\lambda)=\{h_p(\lambda)\}_{p=1}^T$ оптимальної оцінки знаходиться за формулою (18), *$\boldsymbol{v}(j)$ визначаються за формулою* (7). *Величина середньоквадратичної похибки $\Delta\big(F,\widehat{A}_N\xi\big)$ обчислюється за формулою*

$$\Delta\Big(F,\widehat{A}_N\xi\Big)=\langle\boldsymbol{c}_{N+\mu n},D_{N+\mu n}\boldsymbol{c}_{N+\mu n}\rangle=\Big\langle D_{N+\mu n}^{-1}\boldsymbol{b}_{N+\mu n},\boldsymbol{b}_{N+\mu n}\Big\rangle,$$

де $\boldsymbol{c}_{N+\mu n}=\{\boldsymbol{c}(j)\}_{j=0}^{N+\mu n}=D_{N+\mu n}^{-1}\boldsymbol{b}_{N+\mu n}$, вектор $\boldsymbol{b}_{N+\mu n}$ складається з векторів $\boldsymbol{b}(j)$, компоненти яких визначені у формулі (8).

Повернемось до одновимірної випадкової послідовності з періодично стаціонарними приростами $\{\zeta(m), m \in \mathbb{Z}\}$. Розглянемо задачу лінійного середньоквадратичного оптимального оцінювання функціонала

$$A_M\zeta = \sum_{k=0}^{M} a^{(\zeta)}(k)\zeta(k) \tag{24}$$

від невідомих значень послідовності $\zeta(k)$ за даними спостережень послідовності $\zeta(k)$ при $k < 0$ та $k > M$. Припустимо, що число $M+1$ — кількість невідомих значень послідовності $\{\zeta(m), m \in \mathbb{Z}\}$, кратне числу T — величині періоду. Визначимо число N таким чином:

$$N = \frac{M+1}{T} - 1. \tag{25}$$

Тоді, зробивши заміну, вказану у формулі (2), і враховуючи, що $M = (N+1)T - 1$, отримаємо наступний вираз для функціонала $A_M\zeta$:

$$\begin{aligned} A_M\zeta &= \sum_{k=0}^{M} a^{(\zeta)}(k)\zeta(k) = \sum_{j=0}^{N}\sum_{p=1}^{T} a^{(\zeta)}(jT+p-1)\zeta(jT+p-1) = \\ &= \sum_{j=0}^{N}\sum_{p=1}^{T} a_p(j)\xi_p(j) = \sum_{j=0}^{N} \boldsymbol{a}(j)^\top \xi(j) = A_N\xi, \end{aligned}$$

де $\boldsymbol{a}(j)^\top = \big(a_1(j), a_2(j), \ldots, a_T(j)\big)$, $a_p(j) = a^{(\zeta)}(jT+p-1)$. Враховуючи отриману рівність і теорему 3.2, отримаємо теорему, що визначає оптимальну лінійну оцінку $\widehat{A}_M\zeta$ функціонала $A_M\zeta$.

Теорема 3.3. *Нехай $\{\zeta(k), k \in \mathbb{Z}\}$ — стохастична послідовність із періодично стаціонарними приростами така, що при заміні* (2) *отримана векторна послідовність $\{\xi(m), m \in \mathbb{Z}\}$ задовольняє умови теореми 3.2. Оптимальна лінійна оцінка $\widehat{A}_M\zeta$ функціонала $A_M\zeta$ від невідомих значень $\zeta(k)$, $k \in \{0, 1, \ldots, M\}$ за даними спостережень послідовності $\zeta(k)$ при $k < 0$ та $k > M$ визначається за формулою*

$$\widehat{A}_M\zeta = \int_{-\pi}^{\pi} \boldsymbol{h}(\lambda)^\top d\boldsymbol{Z}(\lambda) - \sum_{j=-\mu n}^{-1} \boldsymbol{v}(j)^\top \xi(j),$$

де спектральна характеристика $\boldsymbol{h}(\lambda) = \{h_p(\lambda)\}_{p=1}^{T}$ оптимальної оцінки $\widehat{A}_{(N+1)T-1}\zeta$ знаходиться за формулою (18), *$\boldsymbol{v}(j)$ визначаються за формулою* (7). *Величина середньоквадратичної похибки $\Delta\big(F, \widehat{A}_M\zeta\big)$ обчислюється за формулою*

$$\Delta(F, \widehat{A}_M\zeta) = \langle \boldsymbol{c}_{N+\mu n}, D_{N+\mu n}\boldsymbol{c}_{N+\mu n}\rangle = \Big\langle D_{N+\mu n}^{-1}\boldsymbol{b}_{N+\mu n}, \boldsymbol{b}_{N+\mu n}\Big\rangle,$$

де $\boldsymbol{c}_{N+\mu n} = \{\boldsymbol{c}(j)\}_{j=0}^{N+\mu n} = D_{N+\mu n}^{-1}\boldsymbol{b}_{N+\mu n}$, вектор $\boldsymbol{b}_{N+\mu n}$ складається з векторів $\boldsymbol{b}(j)$, елементи яких визначені у формулі (8).

4. Мінімаксні оцінки функціонала

Щоб скористатися теоремами і формулами попереднього розділу, необхідно знати матрицю спектральної щільності $F(\lambda) = \{f_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^{T}$ стаціонарного n-го приросту $\xi^{(n)}(m, \mu)$. У тому випадку, коли точні значення щільності невідомі, а відома лише множина $\mathcal{D}$ допустимих щільностей, застосовується мінімаксний метод оцінювання функціонала. Скориставшись цим методом, ми находимо оцінку, яка мінімізує значення середньоквадратичної похибки одночасно для всіх спектральних щільностей із заданого класу $\mathcal{D}$.

Означення 4.1. Для заданої множини спектральних щільностей $\mathcal{D}$ щільність $F^0(\lambda) \in \mathcal{D}$ називається найменш сприятливою у класі $\mathcal{D}$ для оптимального оцінювання функціонала $A_N\xi$, якщо виконується співвідношення

$$\Delta\big(F^0\big) = \Delta\big(\boldsymbol{h}(F^0); F^0\big) = \max_{F\in\mathcal{D}} \Delta\big(\boldsymbol{h}(F); F\big).$$

Означення 4.2. Для заданого класу спектральних щільностей $\mathcal{D}$ спектральна характеристика $\boldsymbol{h}^0(\lambda)$ оптимальної оцінки функціонала $A_N\xi$ називається мінімаксною (робастною), якщо

$$\boldsymbol{h}^0(\lambda) \in H_{\mathcal{D}} = \bigcap_{F\in\mathcal{D}} L_2^{N-}(F),$$

$$\min_{h\in H_{\mathcal{D}}} \max_{F\in\mathcal{D}} \Delta(\boldsymbol{h}; F) = \max_{F\in\mathcal{D}} \Delta(\boldsymbol{h}^0; F).$$

Враховуючи наведені означення найменш сприятливої спектральної щільності та мінімаксної спектральної характеристики, а також отримані у попередньому розділі результати, ми можемо робити висновки, що справджується таке твердження.

Лема 4.1. *Спектральна щільність $F^0(\lambda) \in \mathcal{D}$, що задовольняє умову мінімальності* (16)*, найменш сприятлива серед щільностей класу $\mathcal{D}$ для оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_N\xi$ за спостереженнями послідовності $\xi(m)$ при $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0,1,2,\ldots,N\}$, якщо матриця $D^0_{N+\mu n}$, що утворена за допомогою коефіцієнтів Фур'є функції*

$$\frac{\lambda^{2n}}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}\big(F^0\big)^{-1}(\lambda),$$

визначає розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\max_{F\in\mathcal{D}} \Big\langle D^{-1}_{N+\mu n}\boldsymbol{b}_{N+\mu n}, \boldsymbol{b}_{N+\mu n}\Big\rangle = \Big\langle \big(D^0_{N+\mu n}\big)^{-1}\boldsymbol{b}_{N+\mu n}, \boldsymbol{b}_{N+\mu n}\Big\rangle. \tag{26}$$

Мінімаксна спектральна характеристика $\boldsymbol{h}^0 = \boldsymbol{h}(F^0)$ обчислюється за формулою (18)*, якщо $\boldsymbol{h}(F^0) \in H_{\mathcal{D}}$.*

Більш детальний аналіз властивостей найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксної спектральної характеристики оптимальної оцінки функціонала можна провести. якщо зауважити, що мінімаксна спектральна характеристика $\boldsymbol{h}^0$ та найменш сприятлива спектральна щільність F^0 утворюють сідлову точку функції $\Delta(\boldsymbol{h}; F)$ на множині $H_{\mathcal{D}} \times \mathcal{D}$. Нерівності сідлової точки

$$\Delta\big(\boldsymbol{h}; F^0\big) \geq \Delta\big(\boldsymbol{h}^0; F^0\big) \geq \Delta\big(\boldsymbol{h}^0; F\big) \quad \forall F \in \mathcal{D},\ \forall \boldsymbol{h} \in H_{\mathcal{D}}$$

виконуються, якщо $\boldsymbol{h}^0 = \boldsymbol{h}\big(F^0\big)$ та $\boldsymbol{h}\big(F^0\big) \in H_{\mathcal{D}}$, де F^0 — розв'язок задачі на умовний екстремум:

$$\widetilde{\Delta}(F) = -\Delta\big(\boldsymbol{h}\big(F^0\big); F\big) \to \inf, \quad F \in \mathcal{D},$$

$$\begin{aligned}\Delta\big(\boldsymbol{h}\big(F^0\big); F\big) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} &\frac{(i\lambda)^n\left[\sum_{j=0}^{N+\mu n}\Big(\big(D^0_{N+\mu n}\big)^{-1}\boldsymbol{b}_{N+\mu n}\Big)_j e^{ij\lambda}\right]^{\top}}{\big(1-e^{i\lambda\mu}\big)^n}\big(F^0(\lambda)\big)^{-1} \times \\ &\times F(\lambda)\big(F^0(\lambda)\big)^{-1}\,\overline{\frac{(-i\lambda)^n\left[\sum_{j=0}^{N+\mu n}\left(\Big(D^0_{N+\mu n}\Big)^{-1}\boldsymbol{b}_{N+\mu n}\right)_j e^{ij\lambda}\right]}{\big(1-e^{-i\lambda\mu}\big)^n}}\, d\lambda.\end{aligned} \tag{27}$$

Остання задача еквівалентна задачі на безумовний екстремум

$$\Delta_{\mathcal{D}}(F) = \widetilde{\Delta}(F) + \delta(F \mid \mathcal{D}) \to \inf, \tag{28}$$

де $\delta(F \mid \mathcal{D})$ — індикаторна функція множини $\mathcal{D}$. Розв'язок F^0 задачі на безумовний екстремум характеризується умовою $0 \in \partial\Delta_{\mathcal{D}}(F^0)$, яка є необхідною і достатньою умовою того, що функція F^0 належить до множини мінімумів опуклого функціонала $\Delta_{\mathcal{D}}(F)$ [15, 24]. Вираз $\partial\Delta_{\mathcal{D}}\big(F^0\big)$ позначає субдиференціал функціонала $\Delta_{\mathcal{D}}(F)$ у точці $F = F^0$.

Форма (27) функціонала $\Delta\big(\boldsymbol{h}\big(F^0\big); F\big)$ зручна для застосування методу невизначених множників Лагранжа до розв'язання задачі на екстремум (28). Застосовуючи метод невизначених множників Лагранжа та вирази для субдиференціалів індикаторних функцій множин допустимих спектральних щільностей, ми можемо знайти співвідношення, які описують найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні спектральні характеристики оптимальної оцінки функціонала для конкретних множин допустимих спектральних щільностей.

5. Найменш сприятливі щільності у класі $\mathcal{D}_{0,n}^{-}$

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціонала $\widehat{A}_N\xi$ за даними спостережень $\xi(j)$, $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \dots, N\}$, за умови, що спектральна щільність $F(\lambda)$ стаціонарного n-го приросту $\xi^{(n)}(m, \mu)$ належить множині

$$\mathcal{D}_{0,n}^{-} = \left\{ F(\lambda) \;\middle|\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lambda^{2n} [F(\lambda)]^{-1} d\lambda = P \right\},$$

де $P = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^{T}$ — задана матриця.

З умови $0 \in \partial\Delta_{\mathcal{D}}\big(F^0\big)$, при $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{0,n}^{-}$ отримаємо таке співвідношення для визначення найменш сприятливої спектральної щільності заданої множини:

$$\frac{1}{|1 - e^{i\lambda\mu}|^{2n}} \left[\sum_{j=0}^{N+\mu n} \Big(\big(D_{N+\mu n}^{0}\big)^{-1} \boldsymbol{b}_{N+\mu n} \Big)_j e^{ij\lambda} \right] \times \\ \times \overline{\left[\sum_{j=0}^{N+\mu n} \left(\left(D_{N+\mu n}^{0}\right)^{-1} \boldsymbol{b}_{N+\mu n} \right)_j e^{ij\lambda} \right]^{\top}} = \alpha\overline{\alpha^{\top}}, \quad (29)$$

де $\alpha = \{\alpha_p\}_{p=1}^{T}$ — вектор невизначених множників Лагранжа.

Позначимо через $\boldsymbol{s}^{(\alpha)}(j)$, $j = 0, \dots, N + \mu n$, вектор розмірності T, де

$$\boldsymbol{s}^{(\alpha)}(k\mu) = \alpha(-1)^k \binom{n}{k}, \quad k = 0, \dots, n, \qquad \boldsymbol{s}^{(\alpha)}(j) = 0, \quad j \neq k\mu.$$

Покладемо $\boldsymbol{s}_{N+\mu n}^{(\alpha)} = \big\{\boldsymbol{s}^{(\alpha)}(j)\big\}_{j=0}^{N+\mu n}$ — вектор розмірності $(N + \mu n + 1)T$. Із співвідношення (29) отримаємо систему рівнянь

$$D_{N+\mu n}^{0} \boldsymbol{s}_{N+\mu n}^{(\alpha)} = \boldsymbol{b}_{N+\mu n}. \quad (30)$$

Зауважимо, що елементи вектора $\boldsymbol{s}_{N+\mu n}^{(\alpha)}$ задовольняють умови $\boldsymbol{s}^{(\alpha)}(j) = 0$ при $j > \mu n$ і $\boldsymbol{s}^{(\alpha)}(j) = (-1)^{\mu n}\boldsymbol{s}^{(\alpha)}(\mu n - j)$ при $j \leqslant \mu n$, а для елементів матриці $D_{N+\mu n}^{0}$ виконується умова $D^0(j) = D^0(-j)$, $j = 0, \dots, N + \mu n$. Тому для сумісності системи (30) необхідно, щоб виконувались такі умови:

$$\boldsymbol{b}(j) = (-1)^{\mu n}\boldsymbol{b}(\mu n - j), \quad j = 0, \dots, \mu n. \quad (31)$$

Із обмежень, які накладаються на функції із класу $\mathcal{D}_{0,n}^{-}$, отримаємо наступне рівняння:

$$\sum_{j=-N-\mu n}^{N+\mu n} \frac{D^0(|j|)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\lambda} \big|1 - e^{i\lambda\mu}\big|^{2n} d\lambda = P. \quad (32)$$

Таким чином бачимо, що найменш сприятлива щільність задається співвідношенням

$$\frac{\lambda^{2n}}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}\left[F^0(\lambda)\right]^{-1}=\sum_{j=-N-\mu n}^{N+\mu n}D^0(|j|)e^{ij\lambda}, \tag{33}$$

де матриці $D^{(0)}(j), j=0,\dots,N+\mu n$, задовольняють рівняння (30) і (32). Клас найменш сприяливих щільностей має вигляд

$$\mathcal{R}=\left\{F^0(\lambda)\in\mathcal{D}_{0,n}^-:F^0(\lambda)=\frac{\lambda^{2n}}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}\left(\sum_{j=-N-\mu n}^{N+\mu n}D^0(j)e^{ij\lambda}\right)^{-1}\right\}. \tag{34}$$

Отже, справджується наступна теорема.

Теорема 5.1. *Нехай векторна стохастична послідовність* $\{\xi(m), m\in\mathbb{Z}\}$ *визначає стаціонарний n-й приріст, матриці* $D^{(0)}(j)$, $j=0,\dots,N+\mu n$, *задовольняють рівняння* (29), (30), (31), (32), *а послідовність* $\boldsymbol{a}(0),\dots,\boldsymbol{a}(N)$ *задана таким чином, що виконується умова* (31). *Тоді множина найменш сприятливих у класі* $\mathcal{D}_{0,n}^-$ *щільностей для побудови оптимальної лінійної оцінки функціонала* $A_N\xi$ *за спостереженнями послідовності* $\xi(m)$ *у моменти часу* $m\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1,\dots,N\}$ *має вигляд* (34). *Мінімаксна спектральна характеристика оцінки обчислюється за формулою* (18).

6. Висновки

У статті досліджується задача оптимального в середньоквадратичному сенсі лінійного оцінювання функціонала $A_N\xi=\sum_{k=0}^{N}a(k)\xi(k)$, який залежить від невідомих значень стохастичної послідовності $\xi(k)$ із періодично стаціонарними приростами за спостереженнями цієї послідовності в точках множини $\mathbb{Z}\setminus\{0,1\dots,N\}$. Застосовано класичний та мінімаксний (робастний) методи оцінювання для випадків спектральної визначеності, коли спектральна щільність послідовності точно відома, та спектральної невизначеності, коли спектральна щільність послідовності невідома, проте визначена множина допустимих спектральних щільностей. Зокрема, знайдено формули для обчислення середньоквадратичної похибки та спектральної характеристики оптимальної оцінки функціонала у тому випадку, коли спектральна щільність послідовності точно відома. У тому випадку, коли точний вигляд спектральних щільностей невідомий, проте задано клас допустимих спектральних щільностей, виведено співвідношення, що визначать найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні спектральні характеристики.

Список літератури

1. I.I. Gikhman, A.V. Skorokhod, *The theory of stochastic processes*, vol. 1, Springer, Berlin, 2004.
2. U. Grenander, *A prediction problem in game theory*, Ark. Mat., **3** (1957), 371–379.
3. J. Franke, *Minimax robust prediction of discrete time series*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, **68** (1985), 337–364.
4. S. A. Kassam, H. V. Poor, *Robust techniques for signal processing: A survey*, Proc. IEEE, **73** (1985), 433–481.
5. A. N. Kolmogorov, *Selected works by A. N. Kolmogorov. Vol. II: Probability theory and mathematical statistics* (A. N. Shiryayev, ed.), Mathematics and Its Applications, Soviet Series, vol. 26, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht etc., 1992.
6. M. M. Luz, M. P. Moklyachuk, *Interpolation of functionals of stochactic sequenses with stationary increments*, Theory Probab. Math. Statist., **87** (2012), 117–133.
7. M. M. Luz, M. P. Moklyachuk, *Minimax-robust filtering problem for stochastic sequences with stationary increments*, Theory Probab. Math. Statist., **89** (2014), 127–142.

8. M. M. Luz, M. P. Moklyachuk, *Minimax-robust filtering problem for stochastic sequences with stationary increments and cointegrated sequences*, Stat. Optim. Inf. Comput., **2** (2014), no. 3, 176–199.
9. M. M. Luz, M. P. Moklyachuk, *Minimax interpolation problem for random processes with stationary increments*, Stat. Optim. Inf. Comput., **3** (2015), no. 1, 30–41.
10. M. M. Luz, M. P. Moklyachuk, *Filtering problem for functionals of stationary sequences*, Stat. Optim. Inf. Comput., **4** (2016), no. 1, 68–83.
11. M. M. Luz, M. P. Moklyachuk, *Minimax interpolation of stochastic processes with stationary increments from observations with noise*, Theory Probab. Math. Statist., **94** (2017), 121–135.
12. M. M. Luz, M. P. Moklyachuk, *Estimates of functionals of random processes with stationary increments and cointegrated sequences*, Interservice, Kyiv, 2016. (Ukrainian)
13. M. P. Moklyachuk, *Robust procedures in time series analysis*, Theory Stoch. Process., **6(22)** (2000), no. 3–4, 127–147.
14. M. P. Moklyachuk, *Game theory and convex optimization methods in robust estimation problems*, Theory Stoch. Process. **7(23)** (2001), no. 1–2, 253–264.
15. M. P. Moklyachuk, *Robust Estimations of Functionals of Stochastic Processes*, Kyivskyi Universytet, Kyiv, 2008. (Ukrainian)
16. M. P. Moklyachuk, *Minimax-robust estimation problems for stationary stochastic sequences*, Stat. Optim. Inf. Comput., **3** (2015), no. 4, 348–419.
17. M. P. Moklyachuk, M. I. Sidei, *Interpolation problem for stationary sequences with missing observations*, Stat. Optim. Inf. Comput., **3** (2015), no. 3, 259–275.
18. M. P. Moklyachuk, M. I. Sidei, *Filtering problem for stationary sequences with missing observations*, Stat. Optim. Inf. Comput., **4** (2016), no. 4, 308–325.
19. M. P. Moklyachuk, M. I. Sidei, *Extrapolation problem for stationary sequences with missing observations*, Stat. Optim. Inf. Comput., **5** (2017), no. 1, 212–233.
20. M. P. Moklyachuk, I. I. Golichenko, *Periodically correlated processes estimates*, Lambert Academic Publishing, 2016.
21. M. P. Moklyachuk, A. Yu. Masyutka, *Minimax-robust estimation technique for stationary stochastic processes*, Lambert Academic Publishing, 2012.
22. M. S. Pinsker, A. M. Yaglom, *On linear extrapolation of random processes with nth stationary increments*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **94** (1954), no. 3, 385–388. (Russian)
23. M. S. Pinsker, *The theory of curves with nth stationary increments in Hilbert spaces*, Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat., **19** (1955), no. 3, 319–344. (Russian)
24. B. N. Pshenichnyi, *Necessary conditions for an extremum*, Pure and Applied mathematics, vol. 4, Marcel Dekker, New York, 1971.
25. Yu. A. Rozanov, *Stationary stochastic processes*, Holden-Day, San Francisco-Cambridge-London-Amsterdam, 1967.
26. N. Wiener, *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. Whith Engineering Applications*, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1966.
27. A. M. Yaglom, *Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 1: Basic results*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York etc., 1987.
28. A. M. Yaglom, *Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 2: Suplementary notes and references*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York etc., 1987.
29. A. M. Yaglom, *Correlation theory of processes with random stationary nth increments*, Mat. Sb., **37(79)** (1955), no. 1, 141–196. (Russian)

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: petrokozak91@gmail.com

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: mmp@univ.kiev.ua

Стаття надійшла до редколегії 30.03.2017

ESTIMATES OF FUNCTIONALS OF STOCHASTIC SEQUENCES WITH PERIODICALLY STATIONARY INCREMENTS

P. S. KOZAK, M. P. MOKLYACHUK

ABSTRACT. The problem of optimal estimation of the linear functional $A_N\xi = \sum_{k=0}^{N} a(k)\xi(k)$ depending on the unknown values of a stochastic sequence $\xi(k)$ with periodically stationary increments from observations of the sequence at points $\mathbb{Z} \setminus \{0, 1 \dots, N\}$ is considered. Formulas for calculating the mean square error and the spectral characteristic of the optimal linear estimate of the functional are proposed in the case where spectral density is exactly known. Formulas that determine the least favorable spectral densities and the minimax spectral characteristics are proposed for the given sets of admissible spectral densities.

ОЦЕНКИ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИ СТАЦИОНАРНЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

П. С. КОЗАК, М. П. МОКЛЯЧУК

АННОТАЦИЯ. Исследуется задача оптимального оценивания линейного функционала $A_N\xi = \sum_{k=0}^{N} a(k)\xi(k)$ от неизвестных значений стохастической последовательности $\xi(k)$ с периодически стационарными приращениями по наблюдениям последовательности в точках $\mathbb{Z} \setminus \{0, 1 \dots, N\}$. Найдены формулы для вычисления среднеквадратической ошибки и спектральной характеристики оптимальной оценки функционала в том случае, когда спектральная плотность последовательности точно известна. Для заданных множеств допустимых спектральных плотностей определены множества наименее благоприятных спектральных плотностей и минимаксные спектральные характеристики оптимальной линейной оценки функционала.