Дослідження за актуальними проблемами інженерно-технічного забезпечення АПК

УДК 514.8

Надикто В., д-р техн. наук, **Величко О.,** канд. фіз.-мат. наук (Таврійський ДАТУ)

Означення точки оптимуму кривої та спосіб її визначення

Розглянуто диференційовані функції, область визначення яких можна поділити на дві ділянки з суттєво різними швидкостями зростання функції. Означено точку оптимуму такої функції та визначено її геометричну інтерпретацію. Запропоновано чисельну та геометричну методики визначення точки оптимуму.

Ключові слова: функція, двозонна крива, точка оптимуму, похідна, дотична.

Суть проблеми. Результати виробничих та економічних процесів зазвичай залежать від багатьох факторів. Якщо ми зафіксуємо усі з них, окрім одного, то будемо мати залежність, яка описується функцією однієї змінної. Найчастіше являють інтерес точки, в яких описана функція набуває свого найменшого або найбільшого значення. Для знаходження таких точок екстремуму використовують диференційне обчислення.

Розглянемо процеси, в яких область зміни фактора можна умовно розбити на два інтервали. В кожному з інтервалів залежність результату від досліджуваного фактора є близькою до лінійної, але на одному з інтервалів функція зростає або спадає швидко, а на іншому – повільно. Випуклі криві, що описують такі функції, будемо називати **двозонними**.

Прикладами таких двозонних кривих є графіки функцій $y_1 = \dfrac{\alpha x}{1-\beta x^2}$ на проміжку [0, $\beta^{-0,5}$] та $y_2 = k - \alpha e^{-\beta x}$ на проміжку [-∞, ∞]. Типові графіки цих функцій зображені на рис. 1.

Функцію y_1, для прикладу, застосовують для апроксимування кривих буксування мобільних енергетичних засобів [1, 2]. Функція y_2 – для аналізу низки процесів з експоненціальною складовою [3, 4].

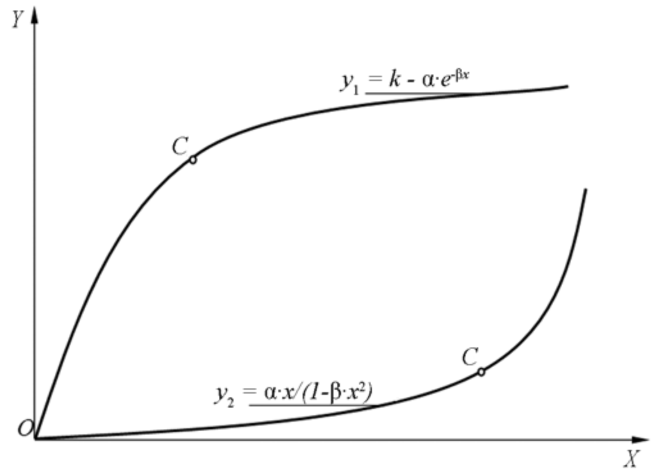

Рис. 1 – **Типові графіки двозонних кривих**

Досліджуючи процеси, які описуються двозонними кривими, бажано вміти визначати точку, яка розділяє проміжки зміни фактора з істотно різними швидкостями залежності результату від цього фактора. Для цього потрібно дати строге означення точки (будемо називати її точкою оптимуму двозонної кривої), яка поділяє двозонну криву на дві частини з суттєво різними властивостями та запропонувати метод визначення її положення.

В роботі [5] автор вводить поняття точки раціонального оптимуму монотонної нелінійної функції, заданої на скінченому проміжку. За означенням, введеним в цій статті, це є «таке значення аргументу, при якому значення функції максимально віддалено від прямої, яка з'єднує значення функції на межах інтервалу». Очевидно, мова йде не про значення функцій, а про відповідні точки на графіку функції.

У цій статті автори пропонують інше визначення поняття оптимальної точки, яке, на наш погляд, є більш «фізичним» і може бути узагальнене, наприклад, на «тризонні криві», на невипуклі криві, на криві, які є графіками недиференційованих функцій тощо. Для випуклих двозонних кривих отриманий критерій оптимальності співпадає з наведеним в [5].

Для означення точки оптимуму розглянемо «ідеальну» двозонну криву, яка являє собою дволанкову ламану. Очевидно, що для неї точкою оптимуму буде кутова точка. Для довільної двозонної кривої розглянемо множину дволанкових ламаних, вписаних в цю криву, тобто таких ламаних, початок і кінець яких співпадає з початком і кінцем цієї кривої, а кутова точка лежить на цій кривій.

Точкою оптимуму двозонної кривої будемо називати кутову точку дволанкової ламаної, яка найкращим чином наближує задану криву.

Нам потрібно визначити критерій, який визначає ступінь наближення. В якості такого критерію візьмемо відстань між функціями $f(x)$ та $g(x)$, які описують криву та ламану відповідно в просторі $L^1[a, b]$ [6]:

$$\rho(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx. \qquad (1)$$

Іншими словами, ламана тим краще наближає криву, чим менша площа фігури, обмеженої цими лініями.

Безпосереднє використання формули (1) для отримання аналітичного виразу для координат точки оптимуму ускладнене, оскільки наявність модулів не дозволяє скористатися апаратом диференційного обчислення. Але використання інформації про випуклість функції дає можливість спростити міркування.

Для прикладу розглянемо графік функції $f(x)$, яка на заданому кінцевому проміжку $[a, b]$ є випуклою вгору (рис. 2).

Розглянемо кінцеві точки кривої $A(a, f(a))$ та $B(b, f(b))$. Позначимо кутову точку ламаної через C. Вона буде мати координати $C(c, f(c))$. Із викладеного вище випливає, що потрібно так обрати точку оптимуму C, щоб площа S фігури, обмеженою кривою ACB та ламаною ACB, була мінімальна. Зрозуміло, що для фіксованої кривої величина S буде залежати тільки від положення точки C, тобто $S=S(c)$. Оскільки крива ACB

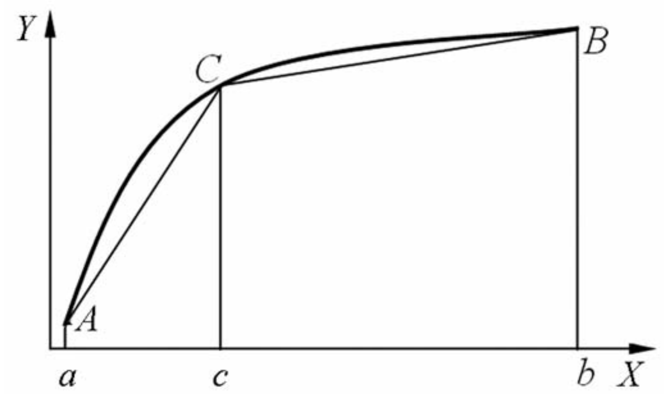

Рис. 2 – **Ламана, вписана в криву**

випукла, матимемо те, що ламана лежить під кривою, а, отже S дорівнює різниці площ, обмежених кривою та ламаною.

Площа, обмежена кривою, є постійною величиною. Таким чином, S буде тим менша, чим більшою буде площа $P(c)$ під ламаною. Отже, умову $S(c) \to \min$ можна замінити еквівалентною умовою

$$P(c) \to \max. \qquad (2)$$

Оскільки розглянута фігура складаєтсь з двох трапецій, вираз для площі $P(c)$ можна записати таким чином:

$$P(c) = \frac{f(a) + f(c)}{2}(c - a) + \frac{f(c) + f(b)}{2}(b - c). \qquad (3)$$

Для знаходження максимуму $P(c)$ розв'яжемо рівняння $P'(c) = 0$. Оскільки

$$2P'(c) = f'(c)(b-a) + f(a)-f(b),$$

то абсциса c точки оптимуму C визначається з умови

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad (4)$$

Зауважимо, що для диференційованих функцій точка, визначена умовою (4) обов'язково існує з огляду на теорему Лагранжа [7]. Майже ті ж самі міркування будуть правильними, якщо будемо розглядати функцію, випуклу вниз. Тільки в такому випадку шукають не максимум, а мінімум функції $P(c)$. Умова (4), як необхідна умова екстремуму, матиме місце і в цьому випадку.

Розглянемо графічну інтерпретацію умови (4). Точка C є оптимумом в означеному сенсі тоді і тільки тоді, коли дотична до неї паралельна відрізку AB (рис. 3).

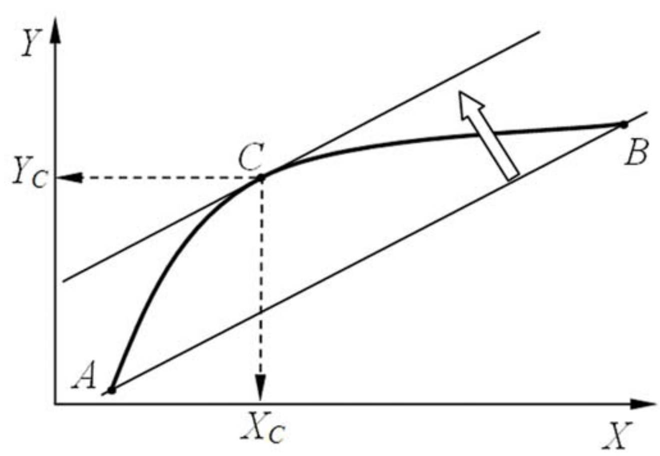

Рис. 3 – **Графічний метод пошуку точки оптимуму**

Це дає можливість досить просто визначати координати шуканої точки *C* безпосередньо з графіка функції. Для цього слід взяти лінійку, прикласти її до точок *A* і *B* і посувати паралельно уверх до тих пір, поки над нею не залишиться єдина точка дуги *ACB* (рис. 3).

Цілком зрозуміло, що вираз (4) можна використовувати для аналітичного визначення положення (координат) точки *C*. В якості прикладу розглянемо функцію

$$y = \frac{\alpha x}{1-\beta x^2}. \qquad (5)$$

На рис. 4 зображено її графік на відрізку [*a, b*]=[0; 0,5] з параметрами: α = 0,12; β = -3. На кінцях відрізка функція набуває значень: *y*(*a*) = *y*(0) = 0, *y*(*b*) = *y*(0,5) = 0,24.

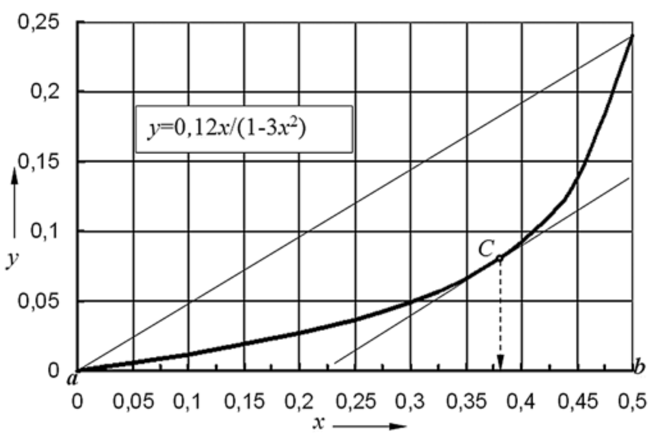

Рис. 4 – **Практичне визначення координат точки *C***

Оскільки для функції (5) похідна, в загальному вигляді, дорівнює

$$y'(x) = \alpha \frac{1+\beta x^2}{\left(1-\beta x^2\right)^2},$$

то умова (4) з заданими значеннями параметрів являє собою рівняння

$$0{,}12\frac{1+3c^2}{\left(1-3c^2\right)^2} = \frac{0{,}24}{0{,}5}.$$

Ми отримали біквадратне рівняння, яке на розглянутому проміжку [0; 0,5] має єдиний корінь *c* = 0,37. Таким чином, ми обчислили абсцису точки оптимуму розглянутої функції. На рис. 4 показано, що отриманий результат узгоджується з встановленою геометричною інтерпретацією, тобто його можна отримати шляхом зсуву прямої, яка з’єднує кінці кривої.

Насамкінець наведемо ще одну геометричну інтерпретацію отриманої в роботі [5] умови для визначення *x*-координати точки оптимуму *C*. Якщо задану двозонну криву повернути та зсунути (не змінюючи її форми!) так, щоб її кінці мали однакові ординати (наприклад, лежали на осі *OX*), то точка *C* буде точкою екстремуму (максимуму або мінімуму) функції, графік якої отримано в результаті такого перетворення. В роботі [5] наведена та ж сама інтерпретація, але пов’язана не з поворотом кривої, а з переходом до іншої прямокутної системи координат.

Висновки. В дослідженні вперше введено поняття двозонних кривих та формалізовано поняття їх точок оптимуму. На основі отриманого рівняння (4) можна точно визначати координати цих точок, що дуже важливо для тих прикладних диференційованих кривих, друга похідна яких не дорівнює нулю. Запропонована геометрична інтерпретація отриманих результатів дозволяє за виглядом двозонної кривої досить точно знаходити точку її оптимуму.

Список літератури

1. Сураев Н.Г. Исследование тягового КПД и буксования тракторов / Н.Г. Сураев // Тракторы и сельскохозяйственные машины. – 1991. – № 4.
2. Трепененков И.И. Эксплуатационные показатели сельскохозяйственных тракторов / И.И. Трепененков. – М.: Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы. – 1963. – 272 с.
3. Русанов В.А. Проблема переуплотнения почв движителями и эффективные пути ее решения / В.А. Русанов. – М.: ВИМ, 1998. – 368 с.
4. Ксеневич И.П. Ходовая система – почва – урожай / И.П. Ксеневич, В.А. Скотников, М.И. Ляско. – М.: Агропромиздат, 1985. – 304 с.
5. Истомина В.В. Определение рационального оптимума монотонных нелинейных функций / В.В. Истомина. – Оптимізація виробничих процесів: зб. наук. пр. – Севастополь: Вид-во СевНТУ, 2010. – Вип. 12. – С. 128-130.
6. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 572 с.
7. Никольский С. М. Курс математического анализа / С.М. Никольскийю – Т.1. – М.: Наука, 1983. – 464 с.

Аннотация. *В работе рассматриваются дифференцируемые функции, область определения которых можно разбить на два участка с существенно различными скоростями роста функции. Определена точка оптимума такой функции и указана ее геометрическая интерпретация. Предложены численная и геометрическая методики определения точки оптимума.*

Summary. *We consider differentiable function whose domain can be divided into two areas with significantly different rates of growth of the function. Given strict definition of the optimum point of such a function. Specified his geometric interpretation. Proposed numerical and geometric methods for determining the optimum point.*

Стаття надійшла до редакції 6 грудня 2013 р.