УДК 519.1

Г.А. ДОНЕЦ, САМЕР И.М. АЛЬШАЛАМЕ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПОСТРОЕНИИ ЛИНЕЙНОЙ МОЗАИКИ

Рассматривается задача построения образов в прямоугольном поле с помощью определённого набора шаблонов. Последовательно исследуется решение для линейных шаблонов, находятся необходимые и достаточные условия того, чтобы некоторый набор шаблонов представлял базис решения соответствующей системы линейных уравнений. Рассмотрены двуцветные и многоцветные шаблоны.

Введение. В теории распознавания образов есть много задач, решенных и нерешенных, которые имеют дело с прямоугольным полем, разбитым на квадратные клетки, которые имеют различную раскраску, в совокупности представляя определенный образ. Обозначим такое поле π с числом клеток $N = mn$, где m – число горизонтальных последовательных клеток (строк), а n – число столбцов. Каждому цвету имеющихся красок поставим в соответствие число, принадлежащее множеству $Q = \{0, 1,\ldots, K - 1\}$. Пусть имеется набор связных фигур, состоящих из клеток определенного цвета ($\neq 0$) и называемых шаблонами $S = \{s_1, s_2,..., s_p\}$. Предполагается, что количество каждых фигур ограничено числом $r(t)$, где $t = 1, 2,\ldots, p$. Часто возникает задача, можно ли с помощью накладывания имеющихся в наличии шаблонов построить на чистом поле π (окрашенном в цвет 0) заданный образ (мозаику)? При этом в зависимости от конкретной задачи под операцией накладывания может подразумеваться различное содержание. Известно, что в реальности синий цвет, смешанный с жёлтым, дает в результате зеленый, коричневатый и фиолетовый дают в совокупности черный и т. д. В общем виде операцию накладывания можно задавать бинарной таблицей. В частном случае таблица может отражать сложение чисел по модулю K. В данной работе будет подразумеваться только такая операция накладывания шаблонов.

Поскольку шаблон можно накладывать любой стороной, а также поворачивать в плоскости на любой угол, кратный 90°, то будем считать два типа положений шаблона разными, если их нельзя совместить параллельным переносом. Очевидно, что таких типов не больше восьми. Для каждого типа положения выделим в шаблонах одну определяющую клетку, называемую меткой шаблона. Зная координату на поле этой метки и тип положения шаблона, можно однозначно расположить его в поле. Если шаблон s_t (t = 1,2,...,p) α раз (α ≥ 0) наложен на поле β-м типом положения с координатами метки $l = n(i-1) + j$ (i = 1, 2,…, m; j = 1,2,…, n), то будем полагать $x_l^{(t,\beta)} = \alpha$. Мозаика всегда задается вектором $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_N\}$, где $b_i \in Q, (i = 1,2,\ldots,N)$.

Задача о возможности построения необходимой мозаики на поле π при заданном множестве шаблонов $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_P\}$ сводится к решению системы линейных уравнений

$$\sum_{t=1}^{P}\sum_{\beta=1} x_l^{(t,\beta)} \equiv b_l \left(\operatorname{mod} K\right);\ l = 1,2,\ldots,N \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{l=1}^{N}\sum_{\beta=1} x_l^{(t,\beta)} \le r(t);\ t = 1,2,\ldots,p\ . \tag{2}$$

В зависимости от видов и количества шаблонов возникает задача с огромным количеством переменных, число которых в большинстве случаев намного превышает число равенств и неравенств. Решение задачи зависит от искусства определения ранга этой системы.

Линейная система для двух цветов. Рассмотрим линейную систему (1) без неравенств (2) и множество шаблонов $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_P\}$, где s_i – набор s_i клеток, расположенных последовательно в одну строку (i = 1, 2,…, p). Будем называть два положения шаблона двойственными, если они отличаются друг от друга перестановкой своих концов. Очевидно, что такие шаблоны имеют на поле π четыре типа положений – два двойственных горизонтальных и два двойственных вертикальных, т. е. β = 1, 2, 3, 4. В качестве метки шаблона выберем крайнюю клетку для вертикальных положений. В зависимости от длины шаблонов $s_t \left(1 \le t \le p\right)$ очевидны соотношения:

$$x_l^{(t,1)} = x_l^{(t,2)} = 0 \ \text{ для } \ j > n+1-s_t; \qquad x_l^{(t,3)} = x_l^{(t,4)} = 0 \ \text{ для } \ i > m+1-s_t. \tag{3}$$

Отсюда вытекает, что число переменных, соответствует одному шаблону S_t, учитывая двойственные положения, равно

$$N(s_t) = 2m(s_t - 1) + 2n(s_t - 1) = 2(s_t - 1)(m+n)\ .$$

Если учесть все шаблоны, то число переменных в системе (1) даже для малых размеров поля π будет намного больше числа mn. Это означает, что многие переменные являются зависимыми и выражаются через другие. Необходимо придумать способ, чтобы отсеять такие переменные. Для этого представим, что необходимо построить образ *B*, у которого $b_i \equiv 1(\bmod K), (i \le i \le n)$, а для всех $j \ne i$ $b_j \equiv 0(\bmod K)$. Будем называть такой образ единицей. Очевидно, что для решения этой задачи достаточно рассмотреть только горизонтальные положения шаблонов и накладывать их только в первой строке. Для построения плоского образа необходимо размножить результаты одной строки на все остальные. Шаблоны будем задавать как последовательность цветов $s_t = (q_1, q_2, \ldots, q_s)$, где $q_i \in Q \setminus \{0\}$, и $q_1 \le q_s$. Самый тривиальный шаблон состоит из одной клетки цвета 1. Очевидно, что если таких шаблонов достаточно много, то с его помощью можно построить любой образ (мозаику).

Таким образом, приходим к необходимости изучения поставленной задачи для простейшего поля, которым является строка из *n* клеток. Пусть $K = 2$, тогда все шаблоны окрашены цветом 1, и существует только один тип положения линейного шаблона. В этом случае s_t есть число, задающее длину этого шаблона.

Будем говорить, что подмножество шаблонов $S_0 \in S$ образует базис, если с его помощью можно построить любую единицу $b_i = 1\ (i = 1,2,\ldots,n)$.

В работе [1] показано, что два числа s_1 и s_2 с условием $s_1 + s_2 = n + 2$ образуют базис, если наибольший общий делитель НОД $(s_1, s_2) = 1$. Там же приводится алгоритм построения любой единицы. Покажем, как при этих условиях получить решение для произвольной правой части системы (1).

Для удобства изложения рассмотрим небольшой пример со следующими параметрами: $S = \{5,8\}$, $n = 11$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.

Обозначим переменные для первого шаблона $x_i\ (i = 1,2,\ldots,n+1-s_1)$, для второго шаблона – $x_{s_2+j}\ (j = 1,2,\ldots,n+1-s_2)$, где *i* и *j* координаты в строке меток соответствующих шаблонов. Тогда система (1) примет вид

$$
\left.\begin{array}{cccccccccccc}
x_1+ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +x_9 & \cdot & \cdot & \cdot & =b_1\\
x_1+ & x_2+ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +x_9 & +x_{10} & \cdot & \cdot & =b_2\\
x_1+ & x_2+ & x_3+ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +x_9 & +x_{10} & +x_{11} & \cdot & =b_3\\
x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4+ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +x_9 & +x_{10} & +x_{11} & +x_{12} & =b_4\\
x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4+ & x_5+ & \cdot & \cdot & \cdot & +x_9 & +x_{10} & +x_{11} & +x_{12} & =b_5\\
\cdot & x_2+ & x_3+ & x_4+ & x_5+ & x_6+ & \cdot & \cdot & +x_9 & +x_{10} & +x_{11} & +x_{12} & =b_6\\
\cdot & \cdot & x_3+ & x_4+ & x_5+ & x_6+ & x_7+ & \cdot & +x_9 & +x_{10} & +x_{11} & +x_{12} & =b_7\\
\cdot & \cdot & \cdot & x_4+ & x_5+ & x_6+ & x_7+ & \cdot & +x_9 & +x_{10} & +x_{11} & +x_{12} & =b_8\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_5+ & x_6+ & x_7+ & \cdot & \cdot & +x_{10} & +x_{11} & +x_{12} & =b_9\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_6+ & x_7+ & \cdot & \cdot & \cdot & +x_{11} & +x_{12} & =b_{10}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_7+ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +x_{12} & =b_{11}
\end{array}\right\} \bmod 2. \qquad (5)
$$

Отметим особенности общей системы для двух шаблонов, которая делится по столбцам на две подобные части. Левая часть состоит из $s_2 - 1$ столбцов, в каждом из которых ровно $s_1 - 1$ переменных. Все столбцы одинаковы, но сдвигаются вниз ровно на одну позицию по отношению к предыдущему. Аналогично, правая часть состоит из $s_1 - 1$ столбцов, в которых ровно $s_2 - 1$ переменных.

В системе отсутствует переменная x_{s_2}. В строке s_1 переменных первого шаблона на одну больше, чем в предыдущей строке, а переменных второго шаблона – одинаковое число. Тоже самое можно сказать о строке $n + 2 - s_1$. Пусть $b_0 \equiv b_{12} \equiv 0 (\bmod 2)$. Начиная со второй строки, прибавим к ней предыдущую по mod 2. В результате получим новую систему, в которой все строки, за исключением вышеуказанных, будут иметь по одной переменной от каждого шаблона, а в строках s_1 и $n + 2 - s_1$ ровно по одной переменной от первого шаблона. И добавим в систему последнее уравнение из (5).

$$\left.\begin{array}{cccccccccccl}
x_1 + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + x_9 & \cdot & \cdot & \cdot & = b_0 + b_1 \\
\cdot & x_2 + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + x_{10} & \cdot & \cdot & = b_1 + b_2 \\
\cdot & \cdot & x_3 + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + x_{11} & \cdot & = b_2 + b_3 \\
\cdot & \cdot & \cdot & x_4 + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + x_{12} & = b_3 + b_4 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & = b_4 + b_5 \\
x_1 + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_6 + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & = b_5 + b_6 \\
\cdot & x_2 + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_7 + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & = b_6 + b_7 \\
\cdot & \cdot & x_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & = b_7 + b_8 \\
\cdot & \cdot & \cdot & x_4 + & \cdot & \cdot & \cdot & + x_9 & \cdot & \cdot & \cdot & = b_8 + b_9 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_5 + & \cdot & \cdot & \cdot & + x_{10} & \cdot & \cdot & = b_9 + b_{10} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_6 + & \cdot & \cdot & \cdot & + x_{11} & \cdot & = b_{10} + b_{11} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_7 + & \cdot & \cdot & \cdot & + x_{12} & = b_{11} + b_{12}
\end{array}\right\} \bmod 2. \qquad (6)$$

Для выделенных переменных получаем прямое решение $x_5 \equiv (b_4 + b_5)(\bmod 2)$ и $x_3 \equiv (b_7 + b_8)(\bmod 2)$. Подставляя эти значения в остальные уравнения, можно найти полное решение системы (6).

Теорема 1. Решением системы (6) есть

$$x_i \equiv \sum_{j=1}^{\lambda} (b_\gamma + b_{\gamma-1}) \ (\bmod 2), \qquad (7)$$

где $\gamma \equiv js_1 [\bmod (s_1 + s_2)]$, а $\lambda = i \cdot s_1^{-1} [\bmod (s_1 + s_2)]$.

Доказательство. Будем рассуждать по индукции. Для начального значения x_{s_1} получаем $\lambda = s_1 \cdot s_1^{-1} [\bmod (s_1 + s_2)] = 1$ и $x_{s_1} \equiv (b_{s_1} + b_{s_1 - 1})(\bmod 2)$, или для (6) $x_5 \equiv (b_4 + b_5)(\bmod 2)$. Переменная x_5 встречается в строке ниже на пять позиций. Подставляя в это уравнение значение x_5, получаем решение для x_{10}. Для него $\lambda = 2 \cdot s_1 \cdot s_1^{-1} [\bmod (s_1 + s_2)] = 2$. Получаем $x_{10} \equiv (b_4 + b_5 + b_9 + b_{10}) (\bmod 2)$. Поднимаясь на восемь позиций вверх, и подставляя значение x_{10}, получаем решение для x_2. Таким образом, получаем последовательное движение либо вниз на s_1 позиций (при этом индексы увеличиваются на s_1), либо вверх на s_2 позиций (при этом индексы уменьшаются на s_2). Но $-s_2 \equiv s_1[\mathrm{mod}(s_1+s_2)]$, т. е. в классе вычетов получается каждый раз увеличение индекса на s_1.

В результате выражение ts_1, если t пробегает все значения от 1 до $s_1 + s_2 - 2$, пробегает все индексы переменных, а при $t = s_1 + s_2 - 2$ получаем

$$i = s_1(s_1+s_2-1) \equiv -s_1 \equiv s_2[\mathrm{mod}(s_1+s_2)].$$

Но у нас переменная x_{s_2} отсутствует. А предыдущая переменная имела индекс $i = s_1(s_1+s_2-2) \equiv -2s_1[\mathrm{mod}(s_1+s_2)]$. Для примера это $-2 \cdot 5 \equiv 3(\mathrm{mod}\,13)$, для него справедливо

$$x_3 \equiv \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 8}}^{11} (b_j + b_{j-1})\,(\mathrm{mod}\,2) \equiv (b_7+b_8)\ (\mathrm{mod}\,2),$$

что совпадает с непосредственным равенством (6). Это и завершает доказательство теоремы.

Пример 1. Построение для этих решений образа $B = (0,1,1,0,0,0,1,0,1,1,1)$ показано на рис. 1.

Согласно теореме имеем:

$x_5 = b_4 + b_5 = 0$; $x_{10} = x_5 + b_9 + b_{10} = 0$; $x_2 = x_{10} + b_1 + b_2 = 1$;

$x_7 = x_2 + b_6 + b_7 = 0$; $x_{12} = x_7 + b_{11} + b_{12} = 1$; $x_4 = x_{12} + b_3 + b_4 = 0$;

$x_9 = x_4 + b_8 + b_9 = 1$; $x_1 = x_9 + b_0 + b_1 = 1$; $x_6 = x_1 + b_5 + b_6 = 1$;

$x_{11} = x_6 + b_{10} + b_{11} = 1$; $x_3 = x_{11} + b_2 + b_3 = 1$.

Напомним, что x_j для $j > 8$ отвечают второму шаблону с метками $j - 8$.

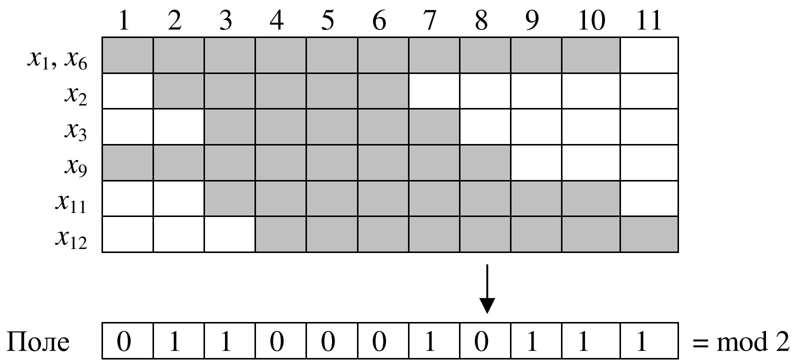


РИС.1. Построение образа *B*

Так решается проблема для двух шаблонов при заданных двух цветах. Если $s_1 + s_2 > n+2$, то некоторые образы построить невозможно. Если $s_1 + s_2 < n+2$, то появляется множество решений, ибо путем сдвига шаблонов, которые являются базисом для $s_1 + s_2 = n+2$, можно получить базис для больших значений n.

Вопрос о числе шаблонов больше двух решается аналогично. Пусть задано p шаблонов. Очевидно, что для них также должно выполняться условие

$$\text{НОД}\left(s_1, s_2, \ldots, s_p\right) = 1. \tag{8}$$

Кроме того, система (5) должна всегда иметь n переменных, чтобы решение было единственным. Но каждый шаблон может иметь $n + 1 - s_t$ переменных. Поэтому необходимо

$$\sum_{i=1}^{p} s_i = (p-1)n + p. \tag{9}$$

Эти условия являются необходимыми. Вопрос о конкретном методе решения задачи для более двух шаблонов остается открытым.

Линейная система для более двух цветов. Если цветов более двух ($K > 2$), то шаблоны могут быть окрашены не единственным цветом, и при этом двойственные положения шаблонов могут играть существенную роль в построении образов.

Прежде всего, возникает вопрос, может ли один шаблон (вместе с двойственным положением) образовывать базис только накладыванием самого себя. Рассмотрим сначала шаблон из двух клеток $s_1 = \{q_1, q_2\}$, где $q_1, q_2 \in Q \setminus \{0\}$. Двойственный шаблон $s_2 = \{q_2, q_1\}$. Для построения образа $b_1 \equiv 1(\operatorname{mod} K)$, $b_i \equiv 0(\operatorname{mod} K)\,(i > 1)$ необходимо решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(1)} q_1 + x_1^{(2)} q_2 = 1 \\ x_1^{(1)} q_2 + x_1^{(2)} q_1 = 0 \end{aligned}\right\} \operatorname{mod} K. \tag{10}$$

Здесь $x_1^{(1)}$ и $x_1^{(2)}$ – количество первых (вторых) шаблонов, метка которых находится в первой клетке строки. Система имеет решение, если детерминант системы

$$\det = q_1^2 - q_2^2 \not\equiv 0(\operatorname{mod} K). \tag{11}$$

Таким образом, если $q_1^2 - q_2^2 \not\equiv 0(\operatorname{mod} K)$, то существуют такие шаблоны длиною 2 с соответствующей раскраской, которые позволяют накладыванием на самого себя получить любую клетку строки с окраской 1. Путем сдвига можно получить решение для базиса системы (1). Легко убедиться, что для $K = 2$, 3 таких шаблонов не существует. Для произвольных простых K множество шаблонов имеет вид (i, j), где $i = 1, 2, \ldots, K - 1$, а $j \neq K - i$. Тогда решение системы (11) примет вид

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(1)} &= q_1\left(q_1^2 - q_2^2\right)^{-1} \\ x_1^{(2)} &= -q_2\left(q_1^2 - q_2^2\right)^{-1} \end{aligned}\right\} \bmod K \,. \tag{12}$$

Выражение d^{-1} равно решению сравнения $td \equiv 1(\bmod K)$, если оно существует.

Для составных K этого недостаточно, так как возможны случаи, когда условия (11) не выполняются.

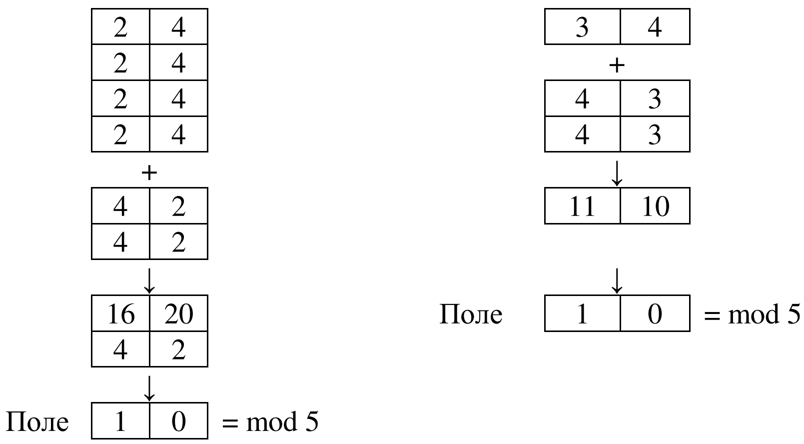
Пример 2. Пусть $K = 5$. Тогда число шаблонов, которые представляют базис с помощью накладывания на себя, равно четыре: $S_1 = (1, 2)$, $S_2 = (1, 3)$, $S_3 = (2, 4)$, и $S_4 = (3, 4)$.

Покажем это для

а) $S = (2, 4)$, детерминант системы (10) равен $2^2 - 4^2 = -12 \equiv -2(\bmod 5)$;
$x_1^{(1)} = 2 \cdot (-2)^{-1} = -1 \equiv 4(\bmod 5)$; $x_1^{(2)} = -4 \cdot (-2)^{-1} \equiv 2(\bmod 5)$.

б) $S = (3, 4)$, детерминант системы (10) равен $3^2 - 4^2 = -7 \equiv +3(\bmod 5)$;
$x_1^{(1)} = 3 \cdot 3^{-1} \equiv 1(\bmod 5)$; $x_1^{(2)} = -4 \cdot (-2)^{-1} \equiv 2(\bmod 5)$.

На рис. 2 показаны накладывания шаблонов, подтверждающие эти результаты.



а б

РИС. 2. Наложение двойственных шаблонов

Однако для шаблонов большей длины аналогичный результат невозможен.

Лемма 1. Шаблон $s_1 = (q_1, q_2, \ldots, q_s)$ для $s > 2$ не может представлять базис наложением на себя.

Для доказательства этого распишем систему (10) для искомого базиса

$$\left.\begin{array}{r} x_1^{(1)} q_1 + x_1^{(2)} q_s \equiv 1 \\ x_1^{(1)} q_2 + x_1^{(2)} q_{s-1} \equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{(1)} q_{s-1} + x_1^{(2)} q_2 \equiv 0 \\ x_1^{(1)} q_s + x_1^{(2)} q_1 \equiv 0 \end{array}\right\} \bmod K . \tag{13}$$

Пусть $s \equiv 1(\bmod 2)$. Рассмотрим уравнение с номером $\lambda = \dfrac{s+1}{2}$,

$$x_1^{(1)} q_\lambda + x_1^{(2)} q_\lambda \equiv 0(\bmod K).$$

Так как $q_\lambda \equiv 0(\bmod K)$, то $x_1^{(1)} + x_1^{(2)} \equiv 0(\bmod K)$. Подставляя $x_1^{(2)} \equiv -x_1^{(1)}(\bmod K)$ в первое и последнее уравнение (13), придем к равенствам

$$\left.\begin{array}{r} x_1^{(1)}(q_1 - q_s) \equiv 1 \\ \\ x_1^{(1)}(q_1 - q_s) \equiv 0 \end{array}\right\} \bmod K ,$$

что невозможно.

Аналогично доказывается случай $s \equiv 0(\bmod 2)$.

Лемма 2. Пусть $s \equiv K \equiv 1(\bmod 2)$ и задан шаблон $s_1 = (q_1, q_2, \ldots, q_s)$. Обозначим $\lambda = \dfrac{s+1}{2}$. Система (13) имеет решение для $b_\lambda \equiv 1(\bmod K)$, $b_i \equiv 0(\bmod K)\,(i \neq \lambda)$, если

а) $q_i + q_{s+1-i} \equiv 0(\bmod K)\,(i = 1, 2, \ldots, \lambda - 1)$;

б) НОД(q_λ, K) = 1.

Лемма легко доказывается конструктивным путём.

Пусть $s > 2$. Рассмотрим произвольный шаблон $s_1 = (q_1, q_2, \ldots, q_{s-1}, q_s)$ и ему двойственный $s_2 = (q_s, q_{s-1}, \ldots, q_2, q_1)$.

Число положений в строке длиною n для каждого шаблона равно $n + 1 - s$. Так как число уравнений равно числу клеток строки, то для однозначности решения системы (1) число переменных должно равняться числу уравнений, то есть $2(n+1-s) = n$. Отсюда

$$s = \frac{n}{2} + 1 . \tag{14}$$

Таким образом, для любого шаблона единственный базис может существовать только при условии (14), при этом строка поля должна содержать четное число клеток. Составим соответствующую систему уравнений для определения базиса. При этом переменные для шаблона s_1 обозначим x_i, а двойственные переменные $- y_i$ $(i \geq 1)$.

$$\left.\begin{array}{llllllll}
x_1 q_1 + & \cdot & \cdot & \cdot & + y_1 q_s & \cdot & \cdot & \equiv 1 \\
x_1 q_2 + & x_2 q_1 + & \cdot & \cdot & + y_1 q_{s-1} & + y_2 q_s & \cdot & \equiv 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
x_1 q_s + & x_2 q_{s-1} + & \cdot & \cdot & + y_1 q_1 & + y_2 q_2 + & \cdot & \equiv 0 \\
\cdot & x_2 q_s & \cdot & \cdot & \cdot & + y_2 q_1 + & \cdot & \equiv 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & x_{n/2-1} q_s + & x_{n/2} q_{s-1} + & \cdot & + y_{n/2-1} q_1 & + y_{n/2-1} q_2 & \equiv 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & x_{n/2} q_{s1} + & \cdot & \cdot & + y_{n/2} q_1 & \equiv 0
\end{array}\right\} \bmod K. \qquad (15)$$

Теорема 2. Система уравнений (15) для $s = 3$ имеет решение при условиях:

а) $(q_1 - q_3)^2 \not\equiv 0 (\bmod K)$,

б) $(q_1 + q_3)^2 - q_2^2 \not\equiv 0 (\bmod K)$.

Для доказательства запишем матрицу системы (15) для $s = 3$, размерность которой равна 4

$$A = \begin{vmatrix} q_1 & 0 & q_3 & 0 \\ q_2 & q_1 & q_2 & q_3 \\ q_3 & q_2 & q_1 & q_2 \\ 0 & q_3 & 0 & q_1 \end{vmatrix}.$$

Легко подсчитать, что $\det \mathbf{A} \equiv (q_1 - q_3)^2 \left[(q_1 + q_3)^2 - q_2^2 \right] (\bmod K)$.

Если $\det \mathbf{A} \not\equiv 0 (\bmod K)$, то должны выполняться условия (а, б) теоремы 2.

Зная значения $\det \mathbf{A}$, можно найти значения x_i и y_i $(i = 1, 2, 3)$ системы (15)

$$x_1 = \frac{q_1 (q_1 + q_3) - q_2^2}{(q_1 - q_3)[(q_1 + q_3)^2 - q_2^2]} (\bmod K); \quad x_2 = -\frac{q_1 q_2}{(q_1 - q_3)[(q_1 + q_3)^2 - q_2^2]} (\bmod K);$$

$$y_1 = \frac{q_2^2 - q_3 (q_1 + q_3)}{(q_1 - q_3)[(q_1 + q_3)^2 - q_2^2]} (\bmod K); \quad y_2 = \frac{q_2 q_3}{(q_1 - q_3)[(q_1 + q_3)^2 - q_2^2]} (\bmod K).$$

Условия теоремы 2 могут не выполняться для составного K. Если для $K = 5$ существует 16 допустимых раскрасок шаблонов, которые образуют базис, то для $K = 4$ таких шаблонов только 2, это $s_1 = (1, 2, 2)$ и $s_2 = (2, 2, 3)$.

Заключение. При построении базиса для системы (1) почти незначительную роль играет число раскрасок шаблонов и образов. Существенную роль играет размер шаблонов. Для $s = 3$ решение представляется громоздкими формулами. Поэтому в дальнейшей работе необходимо либо упростить формулы, либо найти другую формулу представления решения системы (1).

Г.П. Донець, Самер І.М. Альшаламе

РІШЕННЯ ЗАДАЧІ ПРО ПОБУДОВУ ЛІНІЙНОЇ МОЗАЇКИ

Розглядається задача побудови образів на прямокутному полі за допомогою деякого набору шаблонів. Послідовно досліджуються випадки для лінійних шаблонів, знаходяться необхідні та достатні умови для того, щоб деякий набір шаблонів представляв базис розв'язку відповідної системи лінійних рівнянь. Розглянуто двокольорові та багатокольорові шаблони.

G.A. Donets, Samer I.M. Alshalame

SOLUTION OF THE PROBLEM ON LINEAR MOSAIC CONSTRUCTION

For the first time, the problem of sample – aided imagery construction on a rectangular field is studied in this paper. Cases of different linear samples are analyzed in succession; necessary and sufficient conditions are found for a set of samples to be a basis for certain system of linear equations. Both one – colored and multi – colored samples are treated.

1. *Донец Г.А., Самер И.М Альшаламе.* Задача о дискретном построении образов // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2004. – С. 117–122.

Получено 23.03.2005