Теорія оптимальних рішень

УДК 517.98

К.Г. ДЗЮБЕНКО

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Доказаны теоремы об ортогональных разложениях канонических пространств, о непрерывности линейных функционалов, о сопряженных операторах, о разрешимости операторных уравнений.

Изучение условий непрерывности линейных функционалов привело автора к рассмотрению ядер линейных операторов и ортогональных разложений пространств, позволило доказать ряд важных утверждений.

Пусть N, R и C – множества всех натуральных, вещественных и комплексных чисел, $N_0 = N \bigcup \{0\}$. L – линейное пространство над C, $\vec{0}$ – нулевой элемент L. Приведем ключевые определения, по поводу других см. [1]. *Ядро линейного функционала* $\varphi : L \to C$ $Ker\,\varphi = \{x \in L : \varphi(x) = 0\}$. *Ядро линейного оператора* $A : L \to L$ $Ker\,A = \{x \in L : Ax = \vec{0}\}$. *Образ линейного оператора* $A : L \to L$ $Im\,A = \{Ax : x \in L\}$. $L_1 \subset L$ – *линеал*, если $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in L_1$, $\alpha_1, \alpha_2 \in C$, $x_1, x_2 \in L_1$. $S \subset L$ *линейно независимо*, если $\sum_{n=1}^{m} \alpha_n a_n = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha_n = 0$, $n = \overline{1,m}$ для всех $a_n \in S$, $\alpha_n \in C$, $n = \overline{1,m}$, $m \in N$. *Размерность* $\dim L_1$ (конечная или бесконечная) линеала $L_1 \subset L$ – количество элементов максимального линейно независимого множества в L_1. Для $S \subset L$ *линейная оболочка* $\mathscr{L}(S)$ – минимальный линеал, содержащий S. Для линеала $L_1 \subset L$ *фактор-пространство* L / L_1 – это все классы $[x] = \{x + z : z \in L_1\}$, $x \in L$.

Коразмерность линеала $L_1 \subset L$ $\operatorname{codim} L_1 = \dim(L/L_1)$.

Линейное пространство E будем называть *каноническим*, если задано *скалярное произведение* $(\cdot,\cdot): E \times E \to C$ со свойствами: 1) $(x,x) \geq 0$, и $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$; 2) $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 (x_1, y) + \alpha_2 (x_2, y)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in C$, $x_1, x_2, y \in E$; 3) $\overline{(x,y)} = (y,x)$, $x, y \in E$ (верхняя черта над числом – комплексное сопряжение). В прошлом столетии канонические пространства иногда называли «предгильбертовыми». *Норма элемента* $\| x \| = \sqrt{(x,x)}$, $x \in E$. Верно $|(x,y)| \leq \| x \| \| y \|$, $x, y \in E$. *Базис* в E – линейно независимое множество $S \subset E$ с $\overline{\mathscr{L}(S)} = E$ (верхняя черта над множеством – замыкание по норме). Этот базис *ортонормированный*, если $(a,b) = I_{\{a=b\}}$, $a, b \in S$. Замкнутый линеал в E называется *подпространством*. Пусть заданы множества $S_1 \subset E$, $S_2 \subset E$. $S_1 \oplus S_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$ – *прямая сумма* S_1 и S_2, если каждое разложение $x = x_1 + x_2$ с $x_1 \in S_1$, $x_2 \in S_2$ единственно. $S_1 - S_2 = \{x_1 - x_2 : x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$ – *линейная разность* S_1 и S_2. $d(S_1, S_2) = \inf \{\| x_1 - x_2 \| : x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$ – *расстояние между* S_1 и S_2. S_1 и S_2 *ортогональны* (обозначается $S_1 \perp S_2$), если $(x_1, x_2) = 0$, $x_1 \in S_1$, $x_2 \in S_2$. Для $S \subset E$ *ортогональное дополнение* $S^{\perp} = \{x \in E : x \perp S\}$. *Ортогональная проекция* $x \in E$ на $S \subset E$ – это $y \in S$ такой, что $x - y \perp S$. Для $x \in E$ и $r \geq 0$ *шар* $\overline{B}(x,r) = \{y \in E : \| y - x \| \leq r\}$. Следующее утверждение известно более широко, чем его доказательство (для полного сепарабельного пространства).

Лемма. Пусть E – каноническое пространство, $\{e_\beta, \beta \in \mathrm{B}\}$ – ортонормированный базис в E (B – индексное множество). Тогда для каждого $x \in E$ единственно разложение $x = \sum_{\beta \in \mathrm{B}} (x, e_\beta) e_\beta$, и $\| x \|^2 = \sum_{\beta \in \mathrm{B}} |(x, e_\beta)|^2$ (суммы не более чем счетны).

Доказательство. Обозначим $L = \mathscr{L}(\{e_\beta, \beta \in \mathrm{B}\})$. L состоит из конечных линейных комбинаций элементов базиса, $\overline{L} = E$. Для каждого $x \in E$ найдутся $\{\beta_n, n \in N\} \subset \mathrm{B}$, $\{n(m), m \in N\} \subset N$ и $\{\alpha_{mn} : n = \overline{1, n(m)}, m \in N\} \subset C$ такие, что $\lim_{m \to \infty} \| x - y_m \| = 0$ для $y_m = \sum_{n=1}^{n(m)} \alpha_{mn} e_{\beta_n}$. Пусть $L_m = \mathscr{L}(\{e_{\beta_n}, n = \overline{1, n(m)}\})$ и $x_m = \sum_{n=1}^{n(m)} (x, e_{\beta_n}) e_{\beta_n}$, $m \in N$. Для всех $m \in N$ $x - x_m \perp L_m$, $x_m - y_m \in L_m$

влекут $\| x - y_m \|^2 = \| x - x_m \|^2 + \| x_m - y_m \|^2 \geq \| x - x_m \|^2$. Следовательно $\lim\limits_{m\to\infty} \| x - x_m \| = 0$, и $\sum\limits_{n=1}^{n(m)} \left| (x, e_{\beta_n}) \right|^2 = \| x \|^2 - \| x - x_m \|^2 \to \| x \|^2$, $m \to \infty$. Для двух разных разложений совпадение членов устанавливается скалярным умножением на каждый из элементов базиса.

Теорема 1. Пусть E – каноническое пространство, M – подпространство в E. Тогда выполнены утверждения.

1. $M^{\perp}$ – подпространство в E.
2. $E = M \oplus M^{\perp}$.
3. Для любого $x \in E$ существует единственная ортогональная проекция на M.
4. $(M^{\perp})^{\perp} = M$.
5. $\operatorname{codim} M = \dim M^{\perp}$.

Доказательство. 1. Для всех $y_1, y_2 \in M^{\perp}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in C$, $x \in M$ из $(x, y_1) = 0$, $(x, y_2) = 0$ следует $(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = 0$ (линейность $M^{\perp}$). Для всех $\{y_n\} \subset M^{\perp}$ с $y_* = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, $x \in M$ верны $\left|(x, y_*)\right| = \left|(x, y_*) - (x, y_n)\right| = \left|(x, y_* - y_n)\right| \leq \| x \| \| y_* - y_n \| \to 0$, $n \to \infty$, откуда $y_* \perp x$ (замкнутость $M^{\perp}$). 2. Выберем любое $x \in E$. Пусть $r_* = \inf\{\| y - x \| : y \in M\}$. Верно $d(\overline{B}(x, r_*), M) = 0$, что равносильно $d(x, M - \overline{B}(\vec{0}, r_*)) = 0$. Для $\{y_n\} \subset M$, $\{z_n\} \subset \overline{B}(\vec{0}, r_*)$ с $y_n - z_n \to w \in E$ верно $\overline{\{y_n\}} - \overline{\{z_n\}} \in M - \overline{B}(\vec{0}, r_*)$ (по замкнутости M и $\overline{B}(\vec{0}, r_*)$), откуда $w \in M - \overline{B}(\vec{0}, r_*)$. Следовательно, $M - \overline{B}(\vec{0}, r_*)$ замкнуто, и $x \in M - \overline{B}(\vec{0}, r_*)$, т. е. $\overline{B}(x, r_*) \bigcap M \neq \varnothing$. Пусть $x_1 \in \overline{B}(x, r_*) \bigcap M$.

Докажем, что $x_2 = x - x_1 \perp M$. Для всех $y \in M \setminus \{\vec{0}\}$

$$\| x_2 \pm y \| \geq \| x_2 \| \Leftrightarrow \pm 2\operatorname{Re}\,(x_2, y) + \| y \|^2 \geq 0 \Leftrightarrow \pm 2\operatorname{Re}(x_2, y\| y \|^{-1}) \geq -\| y \|,$$

откуда $\operatorname{Re}(x_2, y) = 0$ (предел при $y \to \vec{0}$ при неизменном $e(y) = y\| y \|^{-1}$). Аналогично $\| x_2 \pm i\, y \| \geq \| x_2 \|$, $y \in M \setminus \{\vec{0}\}$, влечет $\operatorname{Im}(x_2, y) = 0$. Если для $y_1 \in M$, $y_2 \in M^{\perp}$ также верно $x = y_1 + y_2$, то $z = x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \in M \bigcap M^{\perp}$. Тогда $(z, z) = 0$, $z = \vec{0}$ и $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$. 3. Для $x \in E$ x_1 из доказательства утверждения 2 является единственным элементом $y \in M$ таким, что $x - y \perp M$. 4. В силу 2, $(M^{\perp})^{\perp} = \{x \in E : (x, x_2) = 0, x_2 \in M^{\perp}\} = M$. 5. В силу 2, $E / M = M^{\perp}$, откуда $\dim(E / M) = \dim M^{\perp}$.

Пример 1. $M=\{x\in C[0,1]:x(0)=0\}$ – линеал в $E=C[0,1]$ над C с $(x,y)=\int_0^1 x(t)\overline{y(t)}\,dt$. Верны $\overline{M}=E$ (пример 2), $M^{\perp}=\{\vec{0}\}$, $\overline{M}\oplus M^{\perp}=E$, но $M\oplus M^{\perp}\neq E$, $(M^{\perp})^{\perp}=E\neq M$. Также $\operatorname{codim} M^{\perp}=\dim E=\dim M=\infty$.

Критерий непрерывности стохастически линейного функционала в линейном пространстве с топологией доказан автором в [2]. Приведу свой первый вариант доказательства подобного утверждения.

Теорема 2. Пусть L– линейное нормированное пространство, φ – линейный функционал в L. Тогда φ непрерывен $\Leftrightarrow$ $Ker\,\varphi$ замкнуто.

Доказательство. Пусть $\|\cdot\|$ – норма в L, относительно которой рассматривается сходимость. $Ker\,\varphi$ не пусто (содержит нулевой элемент $\vec{0}$). Если φ непрерывен, для каждой $\{x_n, n\in N\}\subset Ker\,\varphi$ с $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_*\in L$ выполнено $\varphi(x_*)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$, и $x_*\in Ker\,\varphi$. Пусть нарушена достаточность: $Ker\,\varphi$ замкнуто, но φ не непрерывен в $\vec{0}$. Пусть сперва L задано над R, а φ – действительный. Тогда существуют $\{x_n, n\in N\}\subset L$ и $\varepsilon_0>0$ такие, что $x_n\to\vec{0}$, но $\varphi(x_n)>\varepsilon_0$, $n\in N$ $(\varphi(-x)\equiv-\varphi(x))$. Положим $\alpha_n=\dfrac{\varepsilon_0}{\varphi(x_n)}$, $n\in N$. Тогда $\alpha_n\in(0,1)$ и $\varphi(\alpha_n x_n)=\varepsilon_0$, $n\in N$. Для $y_n=\alpha_1 x_1-\alpha_n x_n$ выполнено $\varphi(y_n)=\varepsilon_0-\varepsilon_0=0$, $n\in N$, т. е. $y_n\in Ker\,\varphi$, $n\in N$. Но $\|\alpha_n x_n\|=\alpha_n\|x_n\|\le\|x_n\|\to 0$, откуда $y_n\to\alpha_1 x_1$, $n\to\infty$. Замкнутость $Ker\,\varphi$ влечет $\varphi(\alpha_1 x_1)=0$, что противоречит $\varphi(\alpha_1 x_1)=\varepsilon_0>0$. Переход к L над C и комплексному $\varphi=\operatorname{Re}\varphi+i\operatorname{Im}\varphi$ очевиден.

Теорема 3. Пусть E – каноническое пространство, φ – линейный функционал в E, не тождественный нулю. Тогда φ непрерывен $\Leftrightarrow$ $\overline{Ker\,\varphi}\neq E$. При этом найдется единственный $a\in E\setminus\{\vec{0}\}$ такой, что $\varphi(x)=(x,a)$, $x\in E$.

Доказательство. Необходимость: если φ непрерывен и $\overline{Ker\,\varphi}=E$, то по теореме 2 $Ker\,\varphi=E$, и $\varphi\equiv 0$. Докажем достаточность. Ввиду $E=\overline{Ker\,\varphi}\oplus(\overline{Ker\,\varphi})^{\perp}$ найдется $x_0\in(\overline{Ker\,\varphi})^{\perp}$ с $\|x_0\|=1$. Тогда $\varphi(x_0)\neq 0$. Выберем любое $x\in E$. Элемент $y=x-\varphi(x)(\varphi(x_0))^{-1}x_0$ принадлежит $Ker\,\varphi$. Значит $x=(x,x_0)\,x_0+y$ (в силу $x_0\perp y$, $\|x_0\|=1$), и

$\varphi(x)=(x,x_0)\,\varphi(x_0)=(x,\,\overline{\varphi(x_0)}\,x_0)$, $x\in E$. Требуемое представление верно с $a=\overline{\varphi(x_0)}\,x_0$. φ непрерывен: $\left|(x,a)\right|\le\|a\|\|x\|$, $x\in E$. Если $\varphi(x)\equiv(x,\tilde{a})$ с $\tilde{a}\in E$, то $(x,a-\tilde{a})=0$, $x\in E$. Тогда $(a-\tilde{a},a-\tilde{a})=0$, и $a-\tilde{a}=\vec{0}$.

Аналоги теорем 1 и 3 известны для полного канонического пространства ([1], с. 159–160, 187–188). Оператор A в каноническом пространстве E называется *компактным*, если он переводит ограниченные множества в предкомпактные (тогда A ограничен). Компактный непрерывный оператор называется *вполне непрерывным* (для линейного A равносильно компактности). В полном E компактность A равносильна отображению слабо сходящихся последовательностей в сильно сходящиеся: $(x_n,y)\to(x_*,y), y\in E\Rightarrow Ax_n\to Ax_*$. Введем новое определение. Оператор A в каноническом пространстве E назовем *слабо непрерывным*, если функционалы $\varphi_y(x)=(Ax,y)\,, x\in E$ непрерывны для всех $y\in E$. Это равносильно отображению сильно сходящихся последовательностей в слабо сходящиеся: $x_n\to x_*\Rightarrow(Ax_n,y)\to(Ax_*,y), y\in E$. Непрерывный оператор является слабо непрерывным (по непрерывности скалярного произведения).

Теорема 4. Пусть E – каноническое пространство, A – слабо непрерывный линейный оператор в E. Тогда $KerA$ замкнуто.

Доказательство. Для любых $\{x_n\}\subset KerA$ с $x_n\to x_*\in E$ и $y\in E$:

$$\left|(Ax_*,y)\right|=\left|(A(x_*-x_n),y)+(Ax_n,y)\right|=\left|(A(x_*-x_n),y)\right|\to\left|(A\vec{0},y)\right|=0,$$

$n\to\infty$. Поэтому $Ax_*\perp E$, $(Ax_*,Ax_*)=0$, и $Ax_*=\vec{0}$, т. е. $x_*\in KerA$.

Оператор A^* в каноническом пространстве E называется *сопряженным* для линейного оператора A в E, если $(Ax,y)=(x,A^*y)\,, x,y\in E$. Такой оператор A^* единственен и линеен (доказательство стандартно). A^* в E существует для линейного непрерывного A в полном каноническом E ([1], с. 233).

Теорема 5. В каноническом пространстве E равносильны утверждения.
1. Линейный оператор A в E слабо непрерывен.
2. $Ker(A\cdot,y)$ замкнуто для каждого $y\in E$.
3. Существует A^* в E.

Доказательство. Утверждения 1 и 2 равносильны согласно теореме 2. Докажем, что из 1 следует 3. Для любого $y\in E$ $Ker\,\varphi_y=\overline{Ker\,\varphi_y}$. Тогда либо $\varphi_y\equiv0$, либо $\overline{Ker\,\varphi_y}\ne E$. По теореме 3 найдется $a(y)\in E$ такой, что $\varphi_y(x)=(x,a(y))$, $x\in E$ (возможно $a(y)=\vec{0}$). Равенства $A^*y=a(y)$, $y\in E$, задают требуемый оператор. Из 3 следует 1: непрерывность $\varphi_y(x) = (Ax, y) = (x, A^* y)$ по x очевидна.

Линейный оператор A в каноническом пространстве E называется *симметричным*, если $(Ax, y) = (x, Ay)$, $x, y \in E$. Это равносильно $A^* = A$ *(самосопряженность)*, поскольку сопряженный оператор единственен.

Теорема 6. Пусть E – каноническое пространство, $\{e_\beta, \beta \in \mathrm{B}\}$ – ортонормированный базис в E (B – индексное множество), A – линейный оператор в E. Тогда симметричность A равносильна одновременному выполнению условий:

1) $(Ae_{\beta_1}, e_{\beta_2}) = (e_{\beta_1}, Ae_{\beta_2})$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathrm{B}$;

2) A слабо непрерывен.

Доказательство. Необходимость 1) очевидна. Из симметричности следует непрерывность $\varphi_y(x) = (Ax, y) = (x, Ay)$ по x. Достаточность: (Au, v) и $(v, Au) = \overline{(Au, v)}$ непрерывны отдельно по u (условие 2)) и по v, и A симметричен ввиду равенства для всех $x, y \in E$ (суммы не более чем счетны):

$$(Ax, y) = (A\sum_{\beta_1 \in \mathrm{B}} (x, e_{\beta_1}) e_{\beta_1}, y) = \sum_{\beta_1 \in \mathrm{B}} (A(x, e_{\beta_1}) e_{\beta_1}, \sum_{\beta_2 \in \mathrm{B}} (y, e_{\beta_2}) e_{\beta_2}) =$$

$$= \sum_{\beta_1 \in \mathrm{B}} \sum_{\beta_2 \in \mathrm{B}} (x, e_{\beta_1}) \overline{(y, e_{\beta_2})} (Ae_{\beta_1}, e_{\beta_2}) = \sum_{\beta_1 \in \mathrm{B}} \sum_{\beta_2 \in \mathrm{B}} (x, e_{\beta_1}) \overline{(y, e_{\beta_2})} (e_{\beta_1}, Ae_{\beta_2}) =$$

$$= \sum_{\beta_1 \in \mathrm{B}} (x, e_{\beta_1}) \sum_{\beta_2 \in \mathrm{B}} (e_{\beta_1}, A(y, e_{\beta_2}) e_{\beta_2}) = \sum_{\beta_1 \in \mathrm{B}} (x, e_{\beta_1})(e_{\beta_1}, Ay) = (x, Ay).$$

Критерии разрешимости операторных уравнений ([1], с. 467–472) известны для линейных интегральных уравнений, для вполне непрерывных линейных операторов в полных канонических пространствах и в пространствах Банаха.

Теорема 7. Пусть E – каноническое пространство, A – слабо непрерывный линейный оператор в E, $Im\,A$ замкнуто. Тогда выполнены утверждения.

1. Уравнение $Ax = f$ имеет решение в $E \Leftrightarrow f \perp KerA^*$.
2. Решение $Ax = f$ единственно при каждом $f \in E \Leftrightarrow KerA = KerA^* = \{\vec{0}\}$.
3. $\dim Im\,A = \dim Im\,A^*$.
4. Если и $Im\,A^*$ замкнуто, то $\dim KerA = \dim KerA^*$.

Доказательство. По теоремам 1 и 5, $E = Im\,A \oplus (Im\,A)^\perp$ и задан A^* в E.

$$y \perp Im\,A \Leftrightarrow (Ax, y) = 0, x \in E \Leftrightarrow (x, A^* y) = 0, x \in E \Leftrightarrow y \in KerA^*,$$

откуда $(Im\,A)^{\perp} = KerA^{*}$. Поэтому $E = Im\,A \oplus Ker\,A^{*}$, и 1 верно. Верно 2: существование решения $Ax = f$ при каждом $f \in E$ равносильно $KerA^{*} = \{\vec{0}\}$, а единственность решения равносильна $KerA = \{\vec{0}\}$. Верно 3:

$$\dim Im\,A = \operatorname{codim} KerA^{*} = \dim (E \,/ KerA^{*}) = \dim Im\,A^{*}$$

($x_1 - x_2 \in KerA^{*}$ равносильно $A^{*}x_1 = A^{*}x_2$, и существует биекция между классами $E \,/ KerA^{*}$ и элементами $Im\,A^{*}$). Верно 4: $E = Im\,A^{*} \oplus Ker\,A$, и

$$\dim KerA = \dim (E \,/ Im\,A^{*}) = \dim \,(E \,/ (E \,/ KerA^{*})) = \dim KerA^{*}$$

($[z]-[z_0] \in E \,/ KerA^{*} \Leftrightarrow [z] = [z_0] + z_1 + KerA^{*}$, где z_0, z_1 – фиксированы).

Пример 2. $(Ax)(t) = t\,x(t)$, $t \in [0,1]$, – линейный оператор в $E = C[0,1]$ над C с $(x, y) = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}\,dt$. A симметричен ($\int_0^1 t\,x(t)\overline{y(t)}\,dt \equiv \int_0^1 x(t)\overline{t\,y(t)}\,dt$) и, соответственно, слабо непрерывен. $Ax = f$ имеет решение $x_* \in E$ (единственное) лишь для $f \in Im\,A = \{\, y \in C[0,1] : y(0) = 0, \exists\, y'(0) \,\}$, поскольку $f(0) = 0 \cdot x(0) = 0$, $x_*(t) = t^{-1} f(t)$, $t \in (0,1]$, и непрерывность $x_*(t)$ влекут $\lim\limits_{\Delta t \to 0+} \dfrac{f(\Delta t) - f(0)}{\Delta t} = x_*(0)$. Верны $Ker\,A = \{\vec{0}\}$, $Im\,A \neq \overline{Im\,A} = E$. Ведь из $t\,x(t) \equiv 0$ и непрерывности $x(\cdot)$ следует $x(t) \equiv 0$, а для каждой $y \in C[0,1]$ функции $y_n(t) = n\,y(n^{-1})\,t\,I_{[0,n^{-1}]}(t) + y(t)\,I_{(n^{-1},1]}(t)$, $n \in N$, принадлежат $Im\,A$ и $\|\, y - y_n \,\|^2 = \int_0^{n^{-1}} n^2 \left| y(n^{-1}) \right|^2 t^2 \; dt = (3n)^{-1} \left| y(n^{-1}) \right|^2 \to 0$, $n \to \infty$.

Пример 3. Линейное пространство $E = C^{\infty}[-1,1]$ с $(x, y) = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}\,dt$ состоит из всех бесконечно дифференцируемых функций $(-1,1) \to C$, которые со всеми производными непрерывно продолжаются на $[-1,1]$. Симметричность оператора $A = i\dfrac{d}{dt}$ на подпространстве $E_1 = \{\, x \in C^{\infty}[-1,1] : x(-1) = x(1) \,\}$ может быть доказана интегрированием по частям. $a_0(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $a_{2k-1}(t) = \sin(k\pi t)$, $a_{2k}(t) = \cos(k\pi t)$, $t \in [-1,1]$, $k \in N$, – ортонормированный базис в E. Проверим условия теоремы 6 в E_1.

$$(Aa_{2k-1}, a_{2k}) = (a_{2k-1}, Aa_{2k}) = i\lambda_k\,,\ (Aa_{2k}, a_{2k-1}) = (a_{2k}, Aa_{2k-1}) = -i\lambda_k\,,$$

$k \in N$, и $(Aa_{n_1}, a_{n_2}) = (a_{n_1}, Aa_{n_2}) = 0$ для других $n_1, n_2 \in N_0$ ($\lambda_k = \pi k$, $k \in N_0$). Оператор слабо непрерывен на E_1, поскольку для любых $y \in E_1$ и $\{x_n\} \subset E_1$ с $x_n \to \vec{0}$, $n \to \infty$, верны соотношения

$$\left|(Ax_n, y)\right| = \left|\int_{-1}^{1} \dot{x}_n \bar{y}\, dt\right| = \left| x_n \bar{y}\,\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} x_n \bar{\dot{y}}\, dt\right| = \left|\int_{-1}^{1} x_n \bar{\dot{y}}\, dt\right| \le \| x_n \| \| \dot{y} \|,$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} (Ax_n, y) = 0 = (A\vec{0}, y)$. A не симметричен на всем E: для $x_*(t) = t$ и $a_0(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ на $[-1,1]$ верны $i\sqrt{2} = (Ax_*, a_0) \ne (x_*, Aa_0) = 0$. Равенство $x(-1) = x(1)$ необходимо для выполнения условий симметричности: $\int_{-1}^{1} i\,\dot{x}(t)\,\overline{y(t)}\,dt \equiv \int_{-1}^{1} x(t)\,\overline{i\,\dot{y}(t)}\,dt$ при $y = a_0$ влечет $\int_{-1}^{1} \dot{x}(t)\,dt = 0$. Соответственно A не является слабо непрерывным на E: для $x_*(t) = t$, $x_n(t) = 2\pi^{-1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^{-1}\sin k\pi t$, $n \in N$, выполнены $\lim\limits_{n\to\infty}\| x_* - x_n \| = 0$, $(Ax_n, a_0) = 0$, $n \in N$, но $(Ax_*, a_0) = i\sqrt{2} \ne 0$. $Ker(A\cdot, a_0)$ содержит весь базис $\{a_n\}$, но не $E = \overline{\mathscr{L}(\{a_n\})}$, – и не является замкнутым в E.

Доказанные результаты позволяют решать проблемы существования и единственности решений для гораздо более широкого класса моделей, чем ранее. При этом не требуется полнота пространств и вполне непрерывность операторов. Теоремы имеют и другие применения.

К.Г. Дзюбенко

ОРТОГОНАЛЬНІ РОЗКЛАДИ ПРОСТОРІВ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Доведено теореми про ортогональні розклади канонічних просторів, про неперервність лінійних функціоналів, про спряжені оператори, про розв'язність операторних рівнянь.

K.G. Dziubenko

ORTHOGONAL DECOMPOSITIONS OF SPACES AND THEIR APPLICATIONS

Theorems are proved on orthogonal decompositions for canonic spaces, on continuity of linear functionals, on adjoint operators, on operator equations solvability.

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 544 с.
2. *Дзюбенко К.Г.* Непрерывность линейного функционала и стохастический интеграл // Теорія оптимальних рішень. – 2009. – № 8. – С. 28 – 35.

Получено 29.03.2010