УДК 519.85

П.И. СТЕЦЮК, А.В. БОНДАРЕНКО

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА*

Проведено численное исследование статических моделей Леонтьева для 15-отраслевого баланса Украины за 2003–2009 годы. Показано, что матрицы Леонтьева продуктивны, даны числа и векторы Фробениуса для матриц Леонтьева и матриц полных затрат. Исследованы соотношения между структурами спроса и добавленной стоимости для матриц полных затрат.

Введение. Предложенный Леонтьевым алгебраический метод "затраты-выпуск" позволяет одновременно учитывать затраты на производство продукции в заданной номенклатуре и распределение продукции в той же номенклатуре [1]. Он сводится к системе линейных уравнений, параметрами которых являются коэффициенты затрат на производство продукции (матрица Леонтьева). Матрица Леонтьева и соответствующая ей обратная матрица Леонтьева содержат много информации о сложившейся структуре межотраслевых связей и существующей технологии производства.

Средством для анализа качественных свойств экономической системы служат спектральные свойства матриц Леонтьева (собственные числа, собственные векторы). С их помощью определяют необходимые и достаточные условия продуктивности технологической системы, т.е. способности производить конечную продукцию.

В данной работе исследуются спектральные свойства матриц Леонтьева для простейшей статической модели "затраты-выпуск" (статический межотраслевой баланс). Сделано это на примере агрегированного 15-отраслевого баланса Украины за 2003–2009 годы.

*Работа выполнена при поддержке SNSF (Швейцария), проект № IZ73ZO_127962 "Analysis of Institutional and Technological Changes in Market and Transition Economies on the Background of the Present Financial Crisis".

1. Матрицы Леонтьева для 15-отраслевого баланса Украины. Пусть экономика страны образована n *чистыми* отраслями (*каждая отрасль производит один вид продукции и разные отрасли выпускают разную продукцию).* Пусть i, j – номера этих отраслей ($i, j = \overline{1, n}$). Обозначим a_{ij} значение прямых производственных затрат продукции отрасли i на изготовление единицы продукции отрасли j. Величина a_{ij} может быть выражена как в натуральном, так и в стоимостном выражении. Матрица $A = \{a_{ij}\}$ называется матрицей Леонтьева (матрицей коэффициентов прямых затрат, матрицей технологических коэффициентов). Матрица A несет много информации о сложившейся структуре межотраслевых связей, описывает технологию работы всех отраслей с единичной интенсивностью.

В работе рассмотрим матрицы Леонтьева, построенные для агрегированного межотраслевого баланса Украины на основе таблиц «затраты-выпуск» в ценах потребителей за 2003–2009 годы [2]. Названия всех 15 агрегированных отраслей перечислены на рисунке, где показан фрагмент матрицы Леонтьева, построенной на основе данных за 2009 год.

матрица Леонтьева

№	Название отрасли / № отрасли	1	2	3	4	5
1	Сельское хозяйство, охотничье и лесное хозяйство	0,25644	0,07763	0,00214	0,03313	0,00017
2	Рыбное хозяйство	0,00017	0,07457	0,00001	0,00049	0,00001
3	Добывающая промышленность	0,01008	0,00367	0,06446	0,11893	0,33387
4	Перерабатывающая промышленность	0,18065	0,18032	0,15941	0,29734	0,11449
5	Производство и распределение электроэнергии, газа и воды	0,01163	0,02934	0,08042	0,02750	0,07150
6	Строительство	0,00019	0,00000	0,00107	0,00025	0,00176
7	Торговля, ремонт автомобилей, бытовых изделий и предметов личного пользования	0,12371	0,21394	0,06930	0,20672	0,00137
8	Деятельность гостиниц и ресторанов	0,00025	0,00122	0,00194	0,00116	0,00254
9	Деятельность транспорта и связи	0,04232	0,08924	0,12953	0,04982	0,01114
10	Финансовая деятельность	0,00225	0,00428	0,00749	0,00809	0,01582
11	Операции с недвижимым имуществом, аренда, инжиниринг и предоставление услуг	0,00860	0,01284	0,01234	0,01477	0,01549
12	Государственное управление	0,00032	0,00122	0,00207	0,00242	0,00726
13	Образование	0,00006	0,00000	0,00042	0,00011	0,00052
14	Здравоохранение и предоставление соц. помощи	0,00032	0,00244	0,00134	0,00045	0,00093
15	Предоставление коммунальных и индивидуальных услуг, деятельность в сфере культуры и спорта	0,00018	0,00061	0,00151	0,00083	0,00222

РИСУНОК. Фрагмент матрицы Леонтьева за 2009 год

Использовался следующий способ построения матриц. Для каждой отрасли j из таблиц были взяты ее валовый выпуск v_j и объем продукции $\tilde{a}_{ij}$ отрасли i, израсходованный отраслью j в процессе производства. Элементы матрицы Леонтьева a_{ij} получены в результате деления этих чисел: $a_{ij} = \tilde{a}_{ij} \big/ v_j$.

На самом деле межотраслевой баланс экономики Украины ведется по 38 отраслям. Он публикуется в ежегодных статистических сборниках Госкомстата Украины, которые можно найти на сайте http://www.ukrstat.gov.ua. Агрегированный 15-отраслевой баланс построен на его основе в результате объединения нескольких отраслей в одну агрегированную: так, например, добыча угля и торфа, добыча углеводородов и добыча неэнергетических материалов группируются в сектор добывающей промышленности. Элементы агрегированной матрицы Леонтьева a_{ij} вычисляются как $a_{ij} = \sum\limits_{i',j'} \tilde{a}_{i'j'} \Big/ \sum\limits_{j'} v_{j'}$, где индексы i' и j' – номера отраслей, образующих агрегированные отрасли i и j .

2. Спектральные свойства статических моделей Леонтьева. Пусть A – известная матрица Леонтьева, I – единичная $n \times n$ -матрица. Прямой моделью Леонтьева будем называть статическую модель “затраты–выпуск”

$$y = (I - A)x, \quad x \geq 0, \tag{1}$$

где y – известный вектор спроса, x – неизвестный вектор выпуска. Двойственной моделью Леонтьева будем называть статическую ценовую модель

$$c = (I - A^T)p, \quad p \geq 0, \tag{2}$$

где c – известный вектор добавленной стоимости (чистый доход от единицы выпуска), p – неизвестный вектор цен. Свойства моделей (1) и (2) во многом определяются спектральными характеристиками матриц A и A^T .

Пусть $\lambda_{\max}(A)$ – максимальное собственное число матрицы A, его называют числом Фробениуса и обозначают λ_A. Для произвольной неотрицательной матрицы число Фробениуса всегда положительно и не меньше модуля любого собственного числа этой матрицы (теорема 1.2, [3]). Нахождению числа Фробениуса λ_A соответствует следующая задача:

$$\lambda_A = \max_{\xi \in R^n, \lambda \in R^1} \lambda \quad \text{при ограничениях } A\xi = \lambda\xi, \|\xi\| = 1, \tag{3}$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора.

Пусть вектор ξ_A является решением задачи (3), т.е. $A\xi_A = \lambda_A \xi_A, \|\xi_A\| = 1$. Вектор ξ_A – нормированный собственный вектор матрицы A, отвечающий ее максимальному собственному числу $\lambda_{\max}(A) = \lambda_A$. Если матрица A – неотрицательна, то согласно теореме Фробениуса–Перрона для произвольных неотрицательных матриц (теорема 1.2, [3]) все компоненты вектора ξ_A можно выбрать неотрицательными. Вектору ξ_A соответствует вектор Фробениуса $x_A = \xi_A / e^T \xi_A$, где e – n-мерный вектор, все компоненты которого равны единице. Вектор x_A называют также правым вектором Фробениуса.

Матрица Леонтьева A продуктивна тогда и только тогда, когда $\lambda_A < 1$ (теорема 1.5, [3]). Продуктивность матрицы Леонтьева A эквивалентна тому, что существует матрица $B = (I - A)^{-1}$, состоящая только из неотрицательных элементов. Матрицу B называют матрицей полных затрат.

Если матрица A – продуктивна, то прямая модель Леонтьева называется продуктивной, а двойственная модель – прибыльной. Продуктивность означает наличие решения у системы (1) при любом неотрицательном векторе спроса, а прибыльность – наличие решения у системы (2) при любом неотрицательном векторе добавленной стоимости.

Если матрица A – продуктивна, то ее спектральные свойства определяют спектральные свойства матрицы B: число Фробениуса матрицы B $\lambda_B = 1/(1-\lambda_A)$ и ему соответствует нормированный собственный вектор ξ_B, который совпадает с вектором ξ_A.

Для 15-отраслевого баланса в табл. 1 приведены числа Фробениуса λ_A и λ_B (максимальные собственные числа матриц Леонтьева и матрицы полных затрат). Здесь же даны и векторы Фробениуса x_A. Собственные числа и собственные векторы матрицы A вычислялись с помощью встроенной функции *eig* $(\cdot)$ языка Octave [4]. Она возвращает две матрицы: диагональную матрицу D с собственными числами и матрицу V, столбцы которой содержат собственные векторы.

В табл. 2 даны векторы Фробениуса p_A, которые связаны с двойственной моделью Леонтьева. Вектор p_A называют левым вектором Фробениуса. Он характеризует спектральные свойства матриц A^T и B^T и построен на основе задачи (3), где матрица A заменяется матрицей A^T. Вектор p_A вычисляется с помощью вектора η_A – нормированного собственного вектора матрицы A^T, отвечающего ее максимальному собственному числу $\lambda_{\max}(A^T) = \lambda_A$.

Числа Фробениуса в табл. 1 показывают, что доля косвенных затрат в экономике Украины за 2003–2009 годы колеблется от 0,566 до 0,596. Сравнение компонент векторов Ax_A с компонентами векторов Фробениуса x_A позволяет проиллюстрировать долю косвенных затрат для каждой отдельной отрасли.

ТАБЛИЦА 1. Числа и векторы Фробениуса для 15-отраслевых матриц A и B

№ п/п	Год						
	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
λ_A	0,58641	0,58476	0,59611	0,58495	0,57231	0,56623	0,56958
λ_B	2,41787	2,40825	2,47591	2,40936	2,33812	2,30535	2,32332
1	0,10177	0,07615	0,07084	0,06833	0,06328	0,04409	0,03947
2	0,00018	0,00029	0,00024	0,00026	0,00039	0,00033	0,00047
3	0,16095	0,14523	0,14102	0,13164	0,11518	0,13097	0,13376
4	0,31416	0,32355	0,37801	0,37361	0,35441	0,34770	0,31934
5	0,07168	0,05568	0,05528	0,05943	0,05277	0,05381	0,06229
6	0,00138	0,00172	0,00411	0,00414	0,00707	0,00587	0,00464
7	0,12725	0,12228	0,14329	0,14683	0,15471	0,15140	0,15340
8	0,00460	0,00466	0,00278	0,00640	0,00611	0,00649	0,00600
9	0,09892	0,11132	0,09658	0,09983	0,10367	0,11028	0,11456
10	0,04710	0,07589	0,03874	0,03197	0,03985	0,04523	0,03822
11	0,05467	0,06422	0,05641	0,06065	0,08519	0,08411	0,10667
12	0,00655	0,00958	0,00596	0,00569	0,00638	0,00727	0,00679
13	0,00111	0,00107	0,00034	0,00098	0,00041	0,00102	0,00112
14	0,00338	0,00172	0,00100	0,00136	0,00155	0,00141	0,00202
15	0,00631	0,00664	0,00539	0,00888	0,00904	0,01001	0,01127

ТАБЛИЦА 2. Левые векторы Фробениуса для 15-отраслевых матриц A и B

№ п/п	Год						
	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
1	0,07863	0,08343	0,08846	0,09560	0,09659	0,09771	0,09502
2	0,09255	0,08620	0,09618	0,09522	0,08908	0,09660	0,09270
3	0,08273	0,08359	0,07885	0,07495	0,06585	0,06087	0,07100
4	0,11130	0,11684	0,10888	0,10698	0,10752	0,10726	0,10392
5	0,08082	0,07813	0,07130	0,07134	0,07204	0,07293	0,07692
6	0,09446	0,10566	0,10194	0,10610	0,10813	0,11957	0,11364
7	0,04089	0,03394	0,05157	0,05414	0,05117	0,04817	0,04931
8	0,08405	0,08612	0,08654	0,07564	0,07526	0,07343	0,08010
9	0,05106	0,05040	0,05976	0,06347	0,06634	0,06712	0,06321
10	0,03523	0,02492	0,02727	0,02261	0,02139	0,01655	0,01595
11	0,04668	0,04560	0,04573	0,05533	0,05621	0,05311	0,05366
12	0,05084	0,05218	0,03777	0,03368	0,03868	0,04058	0,03274
13	0,03531	0,03497	0,03656	0,03636	0,03736	0,04064	0,04115
14	0,06016	0,06128	0,05593	0,05524	0,05778	0,05652	0,05639
15	0,05529	0,05676	0,05326	0,05334	0,05660	0,04893	0,05429

Примечание. Собственные числа и собственные векторы матриц A и A^T вычислялись с помощью функции $eig\,(\cdot)$ языка Octave [4].

3. Оптимальные структуры спроса и добавленной стоимости. В работе [5] рассматриваются оптимальные структуры спроса y^* и добавленной стоимости c^*, которые для неотрицательной матрицы B являются решением следующей квадратичной экстремальной задачи:

$$f^* = (c^*)^T By^* = \max_{y\geq 0, c\geq 0} c^T By \quad \text{при ограничениях} \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 1, \qquad (4)$$

где y и c – n-мерные векторы из R^n. Если матрица A – продуктивна, то задача (4) имеет решение y^* и c^*, необязательно единственное. При этом f^* единственно и равно σ_B – максимальному сингулярному числу матрицы B. Сингулярным числом матрицы B есть арифметическое значение квадратного корня соответствующего собственного числа матрицы $B^T B$ или, что то же самое, матрицы BB^T. Если σ_B – единственное, то задача (4) имеет единственное решение – векторы y^* и c^*, равные нормированным собственным векторам симметричных матриц $B^T B$ и BB^T, соответствующим их максимальным собственным числам $\lambda_{\max}(B^T B) = \lambda_{\max}(BB^T) = \sigma_B{}^2$.

В табл. 3 приведены оптимальные векторы y^* и c^* для 15-отраслевых матриц B за 2003–2009 годы. Об их единственности свидетельствует тот факт, что $\sigma_B > \sigma_B^{'}$, где $\sigma_B^{'}$ – второе по величине сингулярное число матрицы B.

ТАБЛИЦА 3. Оптимальные векторы y^* и c^* для 15-отраслевых матриц B

№ п/п	Год													
	2003		2004		2005		2006		2007		2008		2009	
σ_B	2,914		2,937		3,107		2,980		2,865		2,884		2,866	
$\sigma_B^{'}$	1,537		1,479		1,412		1,443		1,437		1,344		1,363	
	y*	**c***	**y***	**c***	**y***	**c***	**y***	**c***	**y***	**c***	**y***	**c***	**y***	**c***
1	0,26	0,24	0,26	0,21	0,27	0,20	0,28	0,20	0,28	0,20	0,28	0,18	0,28	0,19
2	0,28	0,10	0,26	0,09	0,30	0,10	0,29	0,10	0,27	0,10	0,28	0,11	0,26	0,10
3	0,33	0,35	0,32	0,33	0,30	0,29	0,28	0,28	0,25	0,25	0,24	0,27	0,28	0,30
4	0,55	0,76	0,57	0,78	0,55	0,81	0,55	0,80	0,56	0,78	0,56	0,79	0,54	0,76
5	0,26	0,20	0,24	0,17	0,22	0,16	0,22	0,16	0,23	0,16	0,23	0,16	0,25	0,18
6	0,30	0,11	0,33	0,12	0,33	0,12	0,35	0,12	0,35	0,14	0,38	0,14	0,37	0,14
7	0,19	0,27	0,17	0,26	0,23	0,29	0,24	0,30	0,23	0,32	0,22	0,30	0,23	0,32
8	0,27	0,10	0,26	0,10	0,28	0,09	0,24	0,09	0,23	0,09	0,22	0,09	0,25	0,10
9	0,21	0,22	0,21	0,24	0,23	0,22	0,24	0,23	0,26	0,24	0,26	0,25	0,25	0,26
10	0,12	0,11	0,11	0,14	0,09	0,09	0,07	0,07	0,08	0,09	0,07	0,08	0,06	0,07
11	0,17	0,15	0,17	0,16	0,16	0,14	0,19	0,16	0,21	0,20	0,19	0,18	0,21	0,22
12	0,15	0,06	0,16	0,07	0,11	0,05	0,10	0,04	0,11	0,05	0,12	0,05	0,09	0,04
13	0,10	0,04	0,09	0,03	0,10	0,03	0,10	0,04	0,09	0,03	0,10	0,04	0,11	0,04
14	0,18	0,07	0,18	0,07	0,17	0,06	0,17	0,06	0,17	0,06	0,17	0,06	0,17	0,06
15	0,16	0,07	0,16	0,07	0,15	0,06	0,15	0,07	0,15	0,08	0,13	0,07	0,14	0,08

Заключение. Анализ качественных свойств статических прямой и двойственной моделей Леонтьева для экономической системы можно осуществить с помощью чисел и векторов Фробениуса. Они позволяют оценить долю косвенных затрат в процессе производства как системы в целом, так и ее отдельных отраслей. Это дает возможность обнаружить такие коэффициенты в матрице Леонтьева, изменения которых необходимо отслеживать в первую очередь. Объединение статических моделей позволяет использовать для анализа экономической системы сингулярные числа и собственные векторы некоторых симметричных матриц. С их помощью можно исследовать связи между затратами на производство продукции и ценами при распределении продукции в экономической системе с тем, чтобы сохранить ее способность производить конечную продукцию.

П.І. Стецюк, А.В. Бондаренко

ПРО СПЕКТРАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ МОДЕЛІ ЛЕОНТЬЄВА

Проведено чисельне дослідження статичних моделей Леонтьєва для 15-галузевого балансу України за 2003–2009 роки. Показано, що матриці Леонтьєва продуктивні, наведено числа і вектори Фробеніуса для матриць Леонтьєва і матриць повних витрат. Досліджено співвідношення між структурами попиту і доданої вартості для матриць повних витрат.

P.I. Stetsyuk, A.V.Bondarenko

ON SPECTRAL PROPERTIES OF LEONTIEF MODEL

A numerical research of static Leontief models for 15-sectoral balance of Ukraine for 2003-2009 is considered. It is shown that the Leontief matrices are productive. Frobenius numbers and Frobenius vectors for Leontief matrices and Leontief inverse matrices are given. Correlation between the structures of demand and value added for Leontief inverse matrices is investigated.

1. *Леонтьев В.В.* Избранные произведения: в 3 т. – М.: Экономика, 2006 – 2007. – 407 с., 543 с., 414 с.
2. *Статистическая информация* [Электронный ресурс]: Таблица "Затраты-выпуск" (в ценах потребителей) / Госкомстат Украины. – http://www.ukrstat.gov.ua. – Режим доступа: свободный.
3. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984. – 296 с.
4. *Octave* [Электронный ресурс] http://www.octave.org. – Режим доступа: свободный.
5. *Стецюк П. И., Кошлай Л. Б.* Оптимальная нормированная структура спроса и добавленной стоимости в продуктивной модели Леонтьева // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 5.– С. 51–59.

Получено 05.04.2011