# К О Р О Т К І   П О В І Д О М Л Е Н Н Я

УДК 517.518

**Г. М. Губреев** (Полтав. нац. техн. ун-т),
**Е. И. Олефир** (Одес. нац. пед. ун-т),
**А. А. Тарасенко** (Autonomus Univ. of Hidalgo State, Mexico)

## ЛИНЕЙНЫЕ КОМБИНАЦИИ ВОЛЬТЕРРОВА ДИССИПАТИВНОГО ОПЕРАТОРА И ЕГО СОПРЯЖЕННОГО

We study the spectral properties of linear combinations of a Volterra dissipative operator and its adjoint in a separable Hilbert space.

У сепарабельному гільбертовому просторі вивчаються спектральні властивості лінійних комбінацій вольтеррового дисипативного оператора та спряженого з ним.

**1.** Пусть $B$ — вольтерров оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Операторы $\operatorname{Re} B := \dfrac{1}{2}(B + B^*)$, $\operatorname{Im} B := \dfrac{1}{2i}(B - B^*)$ играют важную роль в спектральной теории вольтерровых операторов (теоремы Мацаева о $\operatorname{Re} B$, $\operatorname{Im} B$ [1], фундаментальная теорема о плотности спектра $\operatorname{Re} B$ [2] и др.). Это наблюдение явилось побудительной причиной для изучения свойств произвольных линейных комбинаций $\alpha B + \beta B^*$, где $B$ — вольтерров диссипативный (т. е. $\operatorname{Im} B \geq 0$) оператор такой, что $\operatorname{rank} \operatorname{Im} B = n < \infty$. В данной работе сформулированы критерии полноты корневых векторов и критерии безусловной базисности собственных векторов таких операторов. При этом использованы результаты работ [3, 4].

Чтобы исключить из рассмотрения тривиальные случаи, будем предполагать, что $\alpha + \beta \neq 0$, $\alpha\beta \neq 0$. При изучении оператора $\alpha B + \beta B^*$ удобно перейти к новому параметру $\delta := \beta/\alpha$ и рассматривать пропорциональный оператор

$$K_\delta := \frac{1}{1+\delta} B + \frac{\delta}{1+\delta} B^*, \qquad \delta \neq -1, \quad \delta \neq 0. \tag{1}$$

В дальнейшем предполагается, что $\operatorname{Ker} B = \{0\}$. Поскольку $\operatorname{Im} B \geq 0$, $\operatorname{rank} \operatorname{Im} B = n$, существуют векторы $\varphi_k$ такие, что

$$(i)^{-1}(B - B^*)h = \sum_{k=1}^{n} (h, \varphi_k)\varphi_k, \quad h \in \mathfrak{H}. \tag{2}$$

Напомним, что характеристической функцией оператора $B$ называется целая внутренняя в области $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0\}$ матрица-функция $\Theta(z)$, элементы которой определяются равенствами [5]

$$\Theta_{kj}(z) = \delta_{kj} + iz((I - zB)^{-1}\varphi_j, \varphi_k), \quad 1 \leq j, k \leq n. \tag{3}$$

Отметим, что каждая целая внутренняя в $\mathbb{C}_+$ матрица-функция является характеристической для некоторого вольтеррова оператора рассматриваемого класса [5].

Из формул (1), (2) легко следует равенство

$$(i)^{-1}(K_\delta - K_\delta^*)h = \frac{1-|\delta|^2}{|1-\delta|^2}\sum_{k=1}^{n}(h,\varphi_k)\varphi_k, \quad h \in \mathfrak{H}, \tag{4}$$

и поэтому

$$(1-|\delta|^2)\operatorname{Im} K_\delta \geq 0, \quad |\delta| \neq 1.$$

Заметим также, что $K_\delta = K_\delta^*$, если $|\delta| = 1$. Поскольку $K_\delta$ вполне непрерывен, в дальнейшем случай $|\delta| = 1$ исключаем из рассмотрения как тривиальный. Нетрудно доказать, что при условии $|\delta| \neq 1$ оператор $K_\delta$ вполне несамосопряжен [5] (в частности, $\operatorname{Ker} K_\delta = \{0\}$). Напомним, что фредгольмов спектр оператора определяется равенством $F(K_\delta) = \{\mu_k^{-1} \colon \mu_k \in \sigma(K_\delta), \mu_k \neq 0\}$.

**Теорема 1.** *Фредгольмов спектр произвольного оператора* $K_\delta$, $|\delta| \neq 1$, *вида* (1) *бесконечен и совпадает с множеством корней целой функции экспоненциального типа* $\det(\delta E + \Theta^{-1}(z))$.

В самом деле, вычисляя фредгольмову резольвенту $(I - zK_\delta)^{-1}$, выводим, что $F(K_\delta)$ совпадает с множеством корней функции $\det \Phi(z)$, где

$$\Phi(z) = \frac{1}{1+\delta}(\delta E + \Theta^{-1}(z)), \qquad E_{kj} = \delta_{kj}, \quad 1 \leq k, \quad j \leq n. \tag{5}$$

Если предположить, что $F(K_\delta)$ конечен (пуст), то с учетом равенства [5] $\det \Theta(z) = e^{iaz}$, $a > 0$, приходим к формуле $\det(\delta\Theta(z) + E) = \rho(z)e^{cz}e^{idz}$, где $c, d \in \mathbb{R}$, $\rho$ — некоторый полином. Пусть для определенности $|\delta| < 1$. Поскольку $\|\Theta(z)\| \leq 1$, $z \in \mathbb{C}_+$, в предыдущем равенстве $\rho(z) \equiv \mathrm{const}$, $c = 0$, $d > 0$. Действительно, $d = 0$, так как функция $\det(\delta\Theta(z) + E)$ внешняя в $\mathbb{C}_+$ [6]. Теперь воспользуемся формулой дифференцирования [1]

$$\operatorname{Sp}\big((\delta\Theta(z) + E)\delta\Theta'(z)\big) = \frac{d}{dz}\log\det(\delta\Theta(z) + E) \equiv 0,$$

откуда при $z = 0$ заключаем, что $\operatorname{Sp}\Theta'(0) = 0$. Последнее невозможно, поскольку из (3) следует, что $\operatorname{Sp}\Theta'(0) = i\sum_{k=1}^{n}\|\varphi_k\|^2$.

Рассмотрим задачу о полноте семейства корневых подпространств оператора $K_\delta$. Легко видеть, что

$$K_\delta h = B^* h + \frac{i}{1+\delta}\sum_{k=1}^{n}(h,\varphi_k)\varphi_k, \quad h \in \mathfrak{H}.$$

Из свойств оператора $B$ следует, что $K_\delta$ является $w$-возмущением ранга $n$ вольтеррова оператора $B^*$, которому соответствуют тривиальный матричный вес Макенхаупта $w^2(x) \equiv E$ и целая внутренняя функция $\Theta(z)$. Соответствующие определения и доказательство этого факта содержатся в [3]. Теперь из работы [4], посвященной изучению $w$-возмущений, следует, что если выполняются два условия:

1) вес $W^2(x) = \Phi(x)\Phi^*(x)$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяет матричному условию Макенхаупта, т. е.

$$\sup_{\Delta}\|(M(W^{-2}))^{1/2}(M(W^2))^{1/2}\| < \infty, \qquad M(W^{\pm 2}) := |\Delta|^{-1}\int_{\Delta} w^{\pm 2}(x)dx,$$

$\Delta$ — произвольный интервал, $|\Delta|$ — его длина;

2) $$\limsup_{y\to+\infty} y^{-1}\log|\det\Phi(iy)| = -i\,\mathrm{Sp}(\Theta'(0)), \qquad \limsup_{y\to-\infty} |y|^{-1}\log|\det\Phi(iy)| = 0,$$

то семейство корневых подпространств оператора $K_\delta$ полно в пространстве $\mathfrak{H}$.

Из формулы (5) легко следует существование такой константы $M$, что $\|\Phi(x)\| \le M$, $\|\Phi^{-1}(x)\| \le M$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Это означает, что условие 1 всегда ($|\delta| \ne 1$) выполняется. Далее, из двух равенств условия 2 всегда имеет место одно из них (при $|\delta| < 1$ справедливо первое равенство, при $|\delta| > 1$ — второе). Из теоремы Лившица [1] о полноте семейства корневых подпространств диссипативного оператора следует, что условие 2 является необходимым для полноты оператора $K_\delta$. Таким образом, приходим к следующему результату.

**Теорема 2.** *Пусть $K_\delta$ — произвольный оператор вида* (1), $\Theta$ — *характеристическая матрица-функция оператора $B$. Для полноты семейства корневых подпространств оператора $K_\delta$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\limsup_{y\to+\infty} y^{-1}\log|\det(\bar{\delta}E + \Theta(iy))| = 0, \tag{6}$$

*если* $|\delta| < 1$, *и*

$$\limsup_{y\to+\infty} y^{-1}\log|\det(\delta^{-1}E + \Theta(iy))| = 0 \tag{7}$$

*в случае* $|\delta| > 1$.

Обозначим через $\{\Theta\}$ множество всех предельных значений матрицы-функции $\Theta(iy)$ при $y \to +\infty$. Другими словами, если $\Theta_\infty \in \{\Theta\}$, то существует последовательность $y_n \to \infty$ такая, что $\Theta_\infty = \lim_{n\to\infty}\Theta(iy_n)$. Легко видеть, что если равенство (6) не имеет места, то число $-\bar{\delta}$ является общим собственным значением всех матриц $\Theta_\infty \in \{\Theta\}$. Отметим, что каждая матрица $\Theta_\infty$ необратима, а параметр $\delta \ne 0$. Поэтому может существовать не более чем $n-1$ исключительных значений $\delta$, для которых (6) не имеет места. В конце этой статьи приведен пример, показывающий, что все указанные выше $\delta$ в самом деле могут быть исключительными (т. е. равенство (6) для них не имеет места). Аналогично, равенство (7) может не выполняться только для не более чем $n-1$ значения параметра $\delta$.

***Следствие.*** *Пусть* $\operatorname{rank}\operatorname{Im} B = n$. *Тогда существует не более $n-1$ значения параметра $\delta$, для которых оператор $K_\delta$ может не иметь полную систему корневых подпространств. Если существует предел* $\lim_{y\to+\infty}\Theta(iy)$, *который является нильпотентной матрицей, то множество исключительных значений $\delta$ пусто.*

Приведем простую иллюстрацию к теореме 2. В пространстве $L_2(0,a)$ рассмотрим интегральный оператор

$$(Kh)(x) = \int_0^a k(x,t)h(t)dt, \tag{8}$$

где

$$k(x,t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}, & x \ge t, \\ \delta\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}, & x < t, \quad \delta \ne 0, 1. \end{cases}$$

В этих формулах функции $\varphi_k \in L_2(0,a)$, $1 \le k \le n$, линейно независимы. Назовем так определенное ядро $k(x,t)$ *полувырожденным*. Из теоремы 2 следует, что оператор (8) имеет полную систему корневых подпространств, за исключением, быть может, не более $n-1$ значения $\delta$. Не останавливаясь на этом подробно, отметим, что можно сформулировать условия на полувырожденное ядро, при которых множество исключительных значений $\delta$ пусто.

**2.** Вычислим теперь характеристическую матрицу-функцию $W$ оператора $K_\delta$, которая (с учетом (4)) определяется следующим образом [5]:

$$W_{kj}(z) := \delta_{kj} + iz((I - zK_\delta)^{-1}\psi_j, \psi_k), \qquad \psi_k = \sqrt{a}\varphi_k, \quad a = \frac{1-|\delta|^2}{|1+\delta|^2}.$$

Предполагая, что $|\delta| < 1$, в результате несложных преобразований получаем формулу

$$W(z) = \frac{1+\delta}{1+\bar\delta}(\Theta(z) + \bar\delta E)(E + \delta\Theta(z))^{-1}.$$

С другой стороны, известно, что полнота корневых векторов оператора равносильна тому, что его характеристическая функция является матричным произведением Бляшке – Потапова [7]. Поскольку при $|\delta| < 1$ оператор $K_\delta$ диссипативен (см. (4)), матрица $W(z)$ является произведение Бляшке – Потапова тогда и только тогда, когда $\det W(z) = \alpha B(z)$, $z \in \mathbb{C}_+$, $\alpha$ — константа ($|\alpha| = 1$), $B$ — скалярное произведение Бляшке [7]. Таким образом, имеет место следующий результат.

**Теорема 3.** *Пусть $\Theta$ — произвольная целая внутренняя в области $\mathbb{C}_+$ матрица-функция порядка $n$. Тогда для всех $\delta$ ($\delta \neq 0$, $|\delta| < 1$), за исключением, быть может, не более $n-1$ значения $\delta$, дробно-линейное преобразование*

$$\Pi(z) := (\bar\delta E + \Theta(z))(E + \delta\Theta(z))^{-1}, \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

*является дефинитным произведением Бляшке – Потапова.*

Эта теорема (для целых внутренних функций) существенно уточняет описание исключительных значений в общих теоремах о дробно-линейных преобразованиях внутренних в $\mathbb{C}_+$ функций. Скалярный вариант теоремы ($n = 1$, $\Theta$ — произвольная внутренняя функция) доказан Фростманом [6], матричная версия ($\Theta$ — произвольная матричная внутренняя функция) установлена Гинзбургом [8]. У обоих авторов о множестве исключительных значений $\delta$ известно лишь то, что оно имеет логарифмическую емкость нуль.

Рассмотрим теперь задачу о безусловной базисности собственных векторов произвольного оператора $K_\delta$. Напомним, что $\Lambda = \{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ является множеством корней функции $\det\Phi(z)$, где $\Phi$ определяется формулой (5) (фредгольмов спектр $K_\delta$). Отметим, что корневое подпространство, соответствующее собственному числу $\lambda_k^{-1}$, состоит только из собственных векторов тогда и только тогда, когда $\Phi^{-1}(z)$ в точке $z = \lambda_k$ имеет полюс 1-го порядка. Далее, размерность собственного подпространства $\mathfrak{N}_k$ вычисляется по формуле

$$\dim \mathfrak{N}_k = n - \operatorname{rank}\Phi(\lambda_k).$$

Применим теперь основной результат о базисности работы [4] к оператору $K_\delta$. Для этого необходимо предварительно получить внешне-внутренние факторизации вида [9]

$$\Phi(z) = W_-(z)V_-(z), \qquad z \in \mathbb{C}_- := \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z < 0\}, \tag{9}$$

в случае $|\delta| < 1$, а также

$$\Phi(z)\Theta(z) = W_+(z)V_+(z), \quad z \in \mathbb{C}_+, \tag{10}$$

если $|\delta| > 1$. В этих формулах $W_+(W_-)$ — внешняя в области $\mathbb{C}_+(\mathbb{C}_-)$, а $V_+(V_-)$ — внутренняя в $\mathbb{C}_+(\mathbb{C}_-)$ матрица-функция. Нахождение указанных факторизаций опирается на теорему 3. Действительно, учитывая (5), теорему 3 и равенство $(\Theta^*(\bar{z}))^{-1} = \Theta(z)$ [5], для неисключительных $\delta$ в области $\mathbb{C}_+$ получаем

$$\Phi^*(\bar{z}) = (1+\bar{\delta})^{-1}(\bar{\delta}E + (\Theta^*(\bar{z}))^{-1}) = (1+\bar{\delta})^{-1}(\bar{\delta}E + \Theta(z)) = \Pi(z)U(z),$$

$$U(z) := (1+\bar{\delta})^{-1}(E + \delta\Theta(z)),$$

где $\Pi$ — произведение Бляшке – Потапова, $U$ — внешняя в $\mathbb{C}_+$ матрица-функция. Отсюда следует, что в области $\mathbb{C}_-$ имеет место факторизация (9), в которой внешний множитель $W_-(z) := := U^*(\bar{z})$, $V_-(z) := \Pi^*(\bar{z})$ — внутренняя матрица-функция. Аналогично, если $|\delta| > 1$ и не является исключительным, то имеет место факторизация (10), в которой

$$W_+(z) = (1+\delta)^{-1}(E + (\bar{\delta})^{-1}\Theta(z)), \qquad V_+(z) = \Pi(z), \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

Предположим, что

$$\operatorname{rank}\Phi(\lambda_k) = n-1, \quad \lambda_k \in \Lambda, \tag{11}$$

т. е. все собственные подпространства одномерны. Обозначим также через $c_k$, $d_k$ векторы из $\mathbb{C}^n$, которые удовлетворяют системам уравнений

$$\Phi(\lambda_k)c_k = 0, \qquad \Phi^*(\lambda_k)d_k = 0, \quad \lambda_k \in \Lambda.$$

Напомним также, что $\Theta$ — характеристическая функция вольтеррова оператора $B$. Из работы [4] выводится следующий результат.

**Теорема 4.** *Пусть выполняется условие* (11) *и $\delta$ не является исключительным значением для оператора $K_\delta$. Тогда в случае $|\delta| < 1$ система собственных векторов оператора $K_\delta$ образует безусловный базис пространства $\mathfrak{H}$, если*

$$\inf_{\lambda_k \in \Lambda} \frac{|\operatorname{Im}\lambda_k|\,|(\Theta'(\lambda_k)c_k, d_k)|}{\|c_k\|\,\|d_k\|} > 0. \tag{12}$$

*Если $|\delta| > 1$, то безусловная базисность собственных векторов вытекает из условия*

$$\inf_{\lambda_k \in \Lambda} \frac{(\operatorname{Im}\lambda_k)\,|(\Theta'(\lambda_k)c_k, d_k)|}{\|\Theta^{-1}(\lambda_k)c_k\|\,\|d_k\|} > 0. \tag{13}$$

*Обратно, если при некотором $a > 0$ элементы матрицы $e^{-iaz}\Theta(z)$ ограничены в $\mathbb{C}_+$, то сформулированные условия являются необходимыми для безусловной базисности собственных векторов оператора $K_\delta$.*

Напомним, что в случае $|\delta| = 1$ собственные векторы оператора $K_\delta$ образуют ортогональный базис пространства $\mathfrak{H}$.

Проверка условий (12), (13) сопряжена с определенными техническими трудностями. Проверку этих условий можно упростить, если воспользоваться теоремой Никольского – Павлова

[9] о сериях Карлесона. Заметим, что неравенства (12), (13) выполняются, если последовательность $\Lambda$ удовлетворяет условию Карлесона [6].

Пусть вектор-функция

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)), \qquad \sum_{k=1}^{n} |\varphi_k(t)|^2 \equiv 1,$$

кусочно-постоянная на сегменте $[0, a]$ с разрывами в точках $t_k = (ak)/m$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$. Обозначим через $\varphi_k$ постоянный вектор такой, что $\varphi(t) = \varphi_k$, если $t \in [t_{k-1}, t_k)$, $1 \leq k \leq m$, $t_0 = 0$, $t_m = a$. Рассмотрим теперь соответствующий интегральный оператор (8) с полувырожденным ядром. Можно доказать, что этому оператору соответствует целая внутренняя матрица-функция

$$\Theta(z) = (E - \varphi_1^*\varphi_1 + \varphi_1^*\varphi_1 e^{(iza)/m})(E - \varphi_2^*\varphi_2 + \varphi_2^*\varphi_2 e^{(iza)/m}) \ldots (E - \varphi_m^*\varphi_m + \varphi_m^*\varphi_m e^{(iza)/m})$$

и поэтому $\Theta_\infty$ является произведением матриц-ортопроекторов:

$$\Theta_\infty = (E - \varphi_1^*\varphi_1)(E - \varphi_2^*\varphi_2) \ldots (E - \varphi_m^*\varphi_m).$$

Нетрудно видеть, что равенство (6) нарушается тогда и только тогда, когда $-\overline{\delta}$ является ненулевым собственным числом матрицы $\Theta_\infty$. Аналогично, условие (7) не имеет места тогда и только тогда, когда $-\delta^{-1}$ — ненулевое собственное число $\Theta_\infty$. Таким образом, если $\Theta_\infty = 0$, то множество исключительных значений $\delta$ пусто. Введем для краткости обозначения $A_k = E - \varphi_k^*\varphi_k$, $B_k = \varphi_k^*\varphi_k$ и рассмотрим многочлен

$$P(\lambda) = \det(\delta E + (A_1 + \lambda B_1)(A_2 + \lambda B_2) \ldots (A_m + \lambda B_m)).$$

**Теорема 5.** *Пусть $K$ — интегральный оператор в пространстве $L_2(0, a)$ с полувырожденным кусочно-постоянным ядром, $\delta$ не является исключительным. Если многочлен $P(\lambda)$ имеет только простые корни, то семейство собственных подпространств оператора $K$ образует безусловный базис пространства $L_2(0, a)$.*

Отметим, что в условиях теоремы фредгольмов спектр $\Lambda$ оператора $K$ удовлетворяет условию Карлесона. Теорема утверждает, что семейство собственных подпространств образует базис, поскольку условие (11), вообще говоря, не имеет места.

1. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1965.
2. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. – М.: Наука, 1967.
3. *Губреев Г. М., Латушкин Ю. Д.* Функциональные модели несамосопряженных операторов, сильно непрерывные полугруппы и матричные веса Макенхаупта // Изв. РАН. Сер. мат. – 2011. – **75**, № 2. – С. 69 – 126.
4. *Губреев Г. М., Тарасенко А. А.* Критерий безусловной базисности собственных векторов конечномерных возмущений вольтерровых операторов // Функцион. анализ и его прил. – 2011. – **45**, № 2. – С. 86 – 91.
5. *Бродский М. С.* Треугольные и жордановы представления линейных операторов. – М.: Наука, 1969.
6. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984.
7. *Бродский М. С,, Лившиц М. С.* Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы // Успехи мат. наук. – 1958. – **13**, № 1. – С. 3 – 85.
8. *Гинзбург Ю. П.* О почти инвариантных спектральных свойствах сжатий и мультипликативных свойствах аналитических оператор-функций // Функцион. анализ и его прил. – 1971. – **5**, № 3. – С. 32 – 41.
9. *Никольский Н. К.* Лекции об операторе сдвига. – М.: Наука, 1980.

Получено 03.04.12