УДК 517.5

Вит. В. Волчков, И. М. Савостьянова (Донец. нац. ун-т)

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЙОНА
ДЛЯ ВЗВЕШЕННЫХ ШАРОВЫХ СРЕДНИХ НА СФЕРЕ

We study generalizations of the class of functions having zero integrals over balls of fixed radius. An analog of the John uniqueness theorem is obtained for weighted spherical means on a sphere.

Досліджуються узагальнення класу функцій з нульовими інтегралами по кулях фіксованого радіуса. Отримано аналог теореми єдиності Ф. Йона для зважених кульових середніх на сфері.

1. Введение. Классическая теорема единственности Ф. Йона (см. [1], а также [2], гл. 6) утверждает, что если функция $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ с нулевыми интегралами по всем сферам фиксированного радиуса r обращается в нуль в некотором шаре радиуса r, то $f = 0$ в $\mathbb{R}^n$. Если $n = 1$, то это утверждение выполнено, очевидно, и для $f \in C(\mathbb{R}^1)$ (интеграл по нульмерной сфере понимается как сумма значений функций в точках этой сферы). Однако при $n \geq 2$ условие бесконечной гладкости f ослабить нельзя (см. [1] для $n = 2, 3$ и [3] (часть 2, теорема 1.2) в общем случае).

Теорема Ф. Йона получила дальнейшее развитие и уточнение в разных направлениях [3 – 15].

Во-первых, изучались ее обобщения для функций f, удовлетворяющих уравнению свертки $f * T = 0$, где T — заданное распределение с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$. Решения f предполагались равными нулю в выпуклой оболочке носителя T, а T считалось радиальным в случае $n \geq 2$. При этом даже в одномерном случае возникают содержательные проблемы и результаты (см. [3], [5] (приложение II) – [9] (гл. 6, п. F)).

Во-вторых, были получены аналоги теоремы Ф. Йона на римановых двухточечно-однородных пространствах [12 – 15]. Разработанные для этого методы оказались весьма полезными во многих вопросах, связанных с периодичностью в среднем как на пространствах X, так и на других однородных пространствах.

В-третьих, были доказаны так называемые „спектральные” аналоги теоремы Ф. Йона для функций конечной гладкости. Их смысл заключается в том, что чем больше порядок гладкости функции f, удовлетворяющей условиям типа Йона, тем больше нулевых членов в ее разложении Фурье по сферическим гармоникам [12 – 15].

В-четвертых, выяснилось, что теорема Ф. Йона и ее аналоги имеют глубокие связи с микролокальным анализом, который широко используется в современных исследованиях по уравнениям с частными производными [10], [16] (гл. 8).

Помимо самостоятельного интереса полученные результаты оказались важными в связи с их многочисленными и существенными применениями в экстремальных задачах интегральной геометрии, в теории лакунарных рядов, в проблеме носителя, в теории гармонических функций, а также при изучении различных классов периодических в среднем функций и их обобщений (см. [3, 15]).

В данной работе получен аналог теоремы Ф. Йона для взвешенных шаровых средних на двумерной сфере. Аналогичный результат был установлен ранее на евклидовом пространстве В. В. Волчковым (см. [17], теорема 2). Однако в [17] существенно используется векторная

© ВИТ. В. ВОЛЧКОВ, И. М. САВОСТЬЯНОВА, 2013

структура $\mathbb{R}^n$, а для пространств с ненулевой кривизной методы из [17] неприменимы. Отметим, что рассматриваемый случай интересен и тем, что не может быть исследован с помощью общей теории трансмутационных операторов, которая является мощным аппаратом для изучения свойств решений уравнений свертки с радиальными распределениями на различных однородных пространствах (см. [15], часть 2).

2. Формулировка основного результата. Пусть $\mathbb{S}^2$ — стандартная единичная сфера в $\mathbb{R}^3$ с внутренней метрикой d и поверхностной мерой $d\xi$, $B_R = \{\xi \in \mathbb{S}^2 \colon d(o,\xi) < R\}$ — открытый геодезический шар (сферическая шапочка) радиуса R с центром в точке $o = (0,0,1) \in \mathbb{S}^2$, $L_{\mathrm{loc}}(B_R)$ — множество локально интегрируемых по мере $d\xi$ функций на B_R. Отметим, что $B_\pi = \mathbb{S}^2 \backslash \{(0,0,-1)\}$, а при $R > \pi$ шар B_R совпадает с $\mathbb{S}^2$. Всюду в дальнейшем считаем, что r — фиксированное число, принадлежащее интервалу $(0;\pi)$, и $r < R$. Обозначим через $\overline{B}_r$ замыкание шара B_r.

Пусть $SO(3)$ — группа вращений $\mathbb{R}^3$. Как обычно, символами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ будем обозначать соответственно множества натуральных, целых и целых неотрицательных чисел. Для фиксированного $M \in \mathbb{Z}_+$ положим

$$V_{r,M}(B_R) = \left\{ f \in L_{\mathrm{loc}}(B_R) \colon \int\limits_{B_r} f(\tau\xi)(\xi_1 + i\xi_2)^M d\xi = 0 \qquad \forall \tau \in SO(3) \colon \tau\overline{B}_r \subset B_R \right\},$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 — декартовы координаты точки $\xi \in \mathbb{S}^2$.

Для $s \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ определим

$$V^s_{r,M}(B_R) = V_{r,M}(B_R) \cap C^s(B_R).$$

При $M = 0$ класс $V_{r,M}(B_R)$ совпадает с классом функций $f \in L_{\mathrm{loc}}(B_R)$, имеющих нулевые интегралы по всем замкнутым геодезическим шарам радиуса r, лежащим в B_R. Это эквивалентно тому, что $f * \chi_r = 0$ в B_{R-r}, где χ_r — индикатор шара B_r, а $*$ обозначает свертку на сфере. Указанный случай изучался многими авторами для различных однородных пространств (см. [3] (часть 2), [15] (часть 3), [18]). Если $M > 0$, то уравнение

$$\int\limits_{B_r} f(\tau\xi)(\xi_1 + i\xi_2)^M d\xi = 0$$

не сводится к уравнению свертки с радиальным распределением, что делает невозможным применение общей теории из [15].

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $f \in V^\infty_{r,M}(B_R)$ и $f = 0$ в B_r. Тогда $f = 0$ в B_R.*

Доказательство основано на методах гармонического анализа и интегральных уравнений, при этом используются некоторые важные результаты из теории специальных функций. Отметим также, что теорема 1 становится неверной для функций произвольной конечной гладкости и радиус r в условии $f = 0$ в B_r уменьшить нельзя (см. [15], раздел 16.2).

3. Простейшие свойства классов $V^s_{r,M}(B_R)$. Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{S}^2$, φ, θ — сферические координаты точки ξ ($0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$ и $\xi_1 = \sin\theta\sin\varphi$, $\xi_2 = \sin\theta\cos\varphi$, $\xi_3 = \cos\theta$). Любой функции $f \in L_{\mathrm{loc}}(B_R)$ соответствует ряд Фурье

$$f(\xi) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(\theta) e^{ik\varphi}, \qquad \theta \in (0, R), \tag{1}$$

где

$$f_k(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^\circ(\varphi, \theta) e^{-ik\varphi} d\varphi,$$

$$f^\circ(\varphi, \theta) = f(\sin\theta \sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \cos\theta).$$

Отметим, что функция χ_r, возникающая в определении класса $V_{r,0}(B_R)$, зависит только от θ. Это соответствует нулевому коэффициенту в разложении (1). В связи с этим вид веса в определении класса $V_{r,M}(B_R)$ является вполне естественным.

Лемма 1. *Пусть $f \in V^s_{r,M}(B_R)$. Тогда $f_k(\theta)e^{ik\varphi} \in V^s_{r,M}(B_R)$ для любого $k \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Для краткости положим $f^k(\xi) = f_k(\theta)e^{ik\varphi}$. Обозначим через g_α вращение в плоскости (x_1, x_2) на угол α. Из (1) следует формула

$$f^k(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(g_\alpha \xi) e^{ik\alpha} d\alpha. \tag{2}$$

В частности, $f^k \in C^s(B_R)$. Далее, пусть $\tau \in SO(3)$ и $\tau\overline{B}_r \subset B_R$. Согласно (2) имеем

$$\int_{B_r} f(\tau\xi)(\xi_1 + i\xi_2)^M d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{B_r} f(g_\alpha \tau\xi)(\xi_1 + i\xi_2)^M d\xi e^{ik\alpha} d\alpha.$$

Учитывая, что $g_\alpha \tau \overline{B}_r \subset B_R$ для любого $\alpha \in [0, 2\pi]$, отсюда получаем требуемое утверждение.

Лемма 2. *Пусть $s \in \mathbb{N}$ и $f \in V^s_{r,M}(B_R)$. Тогда $\cos\varphi \dfrac{\partial f^\circ}{\partial \theta} - \sin\varphi \operatorname{ctg}\theta \dfrac{\partial f^\circ}{\partial \varphi} \in V^{s-1}_{r,M}(B_R)$.*

Доказательство. Пусть $\tau \in SO(3)$ и $\tau\overline{B}_r \subset B_R$. Обозначим через a_t вращение $\mathbb{R}^3$ на угол $(-t)$ в плоскости (x_2, x_3). При достаточно малых $|t|$ из условия имеем

$$\int_{\tau B_r} F(a_t \xi) \mathcal{P}_M(\tau^{-1}\xi) d\xi = 0, \tag{3}$$

где $F(x) = f(x/|x|)$, $\mathcal{P}_M(\xi) = (\xi_1 + i\xi_2)^M$. Дифференцируя (3) по t и полагая $t = 0$, находим

$$\int_{\tau B_r} h(\xi) \mathcal{P}_M(\tau^{-1}\xi) d\xi = 0,$$

где $h(\xi) = \xi_3 \dfrac{\partial F}{\partial x_2}(\xi) - \xi_2 \dfrac{\partial F}{\partial x_3}(\xi)$. Осталось заметить, что

$$h^\circ(\varphi, \theta) = \cos\varphi \frac{\partial f^\circ}{\partial \theta} - \sin\varphi \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial f^\circ}{\partial \varphi}.$$

Лемма 3. *Пусть $s \in \mathbb{N}$ и $u(\theta)e^{ik\varphi} \in V^s_{r,M}(B_R)$ при некотором $k \in \mathbb{Z}$. Тогда функции $(u'(\theta) - k\operatorname{ctg}\theta u(\theta))e^{i(k+1)\varphi}$ и $(u'(\theta) + k\operatorname{ctg}\theta u(\theta))e^{i(k-1)\varphi}$ принадлежат $V^{s-1}_{r,M}(B_R)$.*

Доказательство. Полагая $f(\xi)=u(\theta)e^{ik\varphi}$, находим

$$2\left(\cos\varphi\frac{\partial f^\circ}{\partial\theta}-\sin\varphi\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial f^\circ}{\partial\varphi}\right)=(u'(\theta)-k\operatorname{ctg}\theta u(\theta))e^{i(k+1)\varphi}+(u'(\theta)+k\operatorname{ctg}\theta u(\theta))e^{i(k-1)\varphi}.$$

Теперь лемма 3 следует из лемм 1 и 2.

4. Присоединенные функции Лежандра. Для дальнейших ссылок приведем некоторые свойства присоединенных функций Лежандра P_ν^μ (см. [19], гл. 3, § 3, п.3.4, формула (6)). В основном, нас будет интересовать случай, когда $\nu=l\in\mathbb{Z}_+$, $\mu=m\in\mathbb{Z}$. При этом (см. [20], гл. 3, § 3, п. 9, формула (11))

$$P_l^m(x)=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{m}{2}}\sum_{\max(m,0)\le j\le l}\frac{(-1)^j(l+j)!}{(l-j)!(j-m)!j!}\left(\frac{1-x}{2}\right)^j. \tag{4}$$

Как обычно, сумма в (4) считается равной нулю, если множество индексов суммирования является пустым.

Функции P_l^m и P_l^{-m} связаны равенством

$$P_l^{-m}(x)=(-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x),\qquad -l\le m\le l \tag{5}$$

(см. [20], гл. 3, § 3, п. 9, формула (10)). Имеет место рекуррентное соотношение

$$\sqrt{1-x^2}\frac{dP_l^m(x)}{dx}-\frac{mx}{\sqrt{1-x^2}}P_l^m(x)=(l+m)(l-m+1)P_l^{m-1}(x) \tag{6}$$

(см. [20], гл. 3, § 4, п. 4, формула (13)). Из (6) получаем

$$\left(\frac{d}{d\theta}+m\operatorname{ctg}\theta\right)(P_l^m(\cos\theta))=(l+m)(m-l-1)P_l^{m-1}(\cos\theta). \tag{7}$$

Через функции Лежандра выражаются многочлены Гегенбауэра $C_l^p(x)$ и многочлены Чебышева $T_l(x)$ (см. [20], гл. 9, § 4, п. 8, формулы (6′), (11′)). Отметим следующие формулы дифференцирования:

$$\frac{d}{dx}\left(C_l^1(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)=-(l+1)T_{l+1}(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

$$\frac{d}{dx}\left(C_l^{\frac{n}{2}}(x)(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}\right)=\frac{(l+1)(n+l-1)}{2-n}C_{l+1}^{\frac{n-2}{2}}(x)(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}},\qquad n=3,4,\ldots. \tag{9}$$

Доказательство этих соотношений легко следует из [20] (гл. 9, § 3, п. 2, формулы (4), (5) и § 4, п. 8, формула (11′)).

Нам потребуются также некоторые интегральные формулы. Используя соотношение (8) из [21] (раздел 1.12.1), находим

$$\int\limits_0^r(\sin\theta)^{m+1}P_l^{-m}(\cos\theta)d\theta=(\sin r)^{m+1}P_l^{-(m+1)}(\cos r),\qquad m\in\mathbb{Z}_+\,. \tag{10}$$

Далее, пусть числа θ_1, θ_2 и $\theta_1+\theta_2$ принадлежат промежутку $[0;\pi)$. Имеет место формула умножения

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{ik\varphi} P_l(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi)d\varphi = P_l^k(\cos\theta_1)P_l^{-k}(\cos\theta_2), \tag{11}$$

где $P_l = P_l^0$ (см. [20], гл. 2, § 4, п. 3, формула (2)). Отметим наконец, что интеграл (11) преобразуется к виду

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\theta_1-\theta_2|}^{\theta_1+\theta_2} P_l(\cos\theta) T_k\left(\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta}{\sin\theta_1\sin\theta_2}\right)\times$$

$$\times\frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{(\cos\theta - \cos(\theta_1+\theta_2))(\cos(\theta_1-\theta_2)-\cos\theta)}} = P_l^k(\cos\theta_1)P_l^{-k}(\cos\theta_2) \tag{12}$$

(см. [20], гл. 3, § 4, п. 3, формула (7)).

5. Интегральное уравнение. Для краткости положим

$$a = a(\theta, t, r) = \frac{\cos\theta - \cos r\cos t}{\sin r\sin t},$$

$$b = b(\theta, t, r) = (\cos\theta - \cos(r+t))(\cos(t-r) - \cos\theta).$$

Лемма 4. *Пусть* $0 < r < R < \pi$, $k \in \mathbb{N}$. *Предположим, что* $\Phi \in C^{k+1}[0, R]$, $\Phi = 0$ *на* $[0, r]$ *и*

$$\int\limits_{|t-r|}^{t+r} \Phi(\theta)\sin\theta T_k(a) b^{-\frac{1}{2}} d\theta = 0 \tag{13}$$

при $0 < t < R - r$. *Тогда* $\Phi = 0$ *на* $[0, R]$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что

$$1 - a^2 = \frac{b}{(\sin r\sin t)^2} \tag{14}$$

и

$$\frac{db}{d\theta} = 2\sin\theta(\cos\theta - \cos r\cos t). \tag{15}$$

Определим функции $\mathfrak{X}_{m,n}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n = 2, 3, \ldots,$ равенством

$$\mathfrak{X}_{m,n}(\theta) = \begin{cases} \sin\theta T_m(a) b^{-\frac{1}{2}}, & n = 2, \\ \sin\theta C_m^{\frac{n-2}{2}}(a) b^{\frac{n-3}{2}}, & n \geq 3. \end{cases}$$

Соотношения (14), (15) и (8), (9) дают следующие формулы дифференцирования:

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\mathfrak{X}_{m-1,4}(\theta)}{\sin\theta}\right) = m\sin r\sin t\mathfrak{X}_{m,2}(\theta), \tag{16}$$

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\mathfrak{X}_{m-1,n+2}(\theta)}{\sin\theta}\right)=\frac{m(m+n-2)}{n-2}\sin r\sin t\mathfrak{X}_{m,n}(\theta),\qquad n\geq 3. \tag{17}$$

Выполним в (13) интегрирование по частям k раз с использованием (16), (17). В результате получим

$$\int\limits_{|t-r|}^{t+r}(\mathrm{D}^k\Phi)(\theta)\sin\theta b^{k-\frac{1}{2}}d\theta=0,\qquad 0<t<R-r, \tag{18}$$

где $\mathrm{D}=\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}$. Для изучения уравнения (18) рассмотрим сначала случай $R\leq 2r$. Тогда $0<t<R-r\leq r$ и $|t-r|=r-t<r$. Поскольку $\Phi=0$ на $[0,r]$, отсюда и из (18) следует, что

$$\int\limits_{r}^{t+r}(\mathrm{D}^k\Phi)(\theta)\sin\theta b^{k-\frac{1}{2}}d\theta=0,\qquad 0<t<R-r. \tag{19}$$

Перепишем (19) в виде

$$\int\limits_{\cos t}^{\cos r}h_1(x)\left((x-\cos t)(\cos(t-2r)-x)\right)^{k-\frac{1}{2}}dx=0,\qquad r\leq t<R, \tag{20}$$

где $h_1(x)=\left(\mathrm{D}^k\Phi\right)(\arccos x)$. Из (20) вытекает, что

$$\int\limits_{r}^{t}h_2(x)\left(\sin\frac{x+t}{2}\sin\frac{t-x-2r}{2}(\cos(t-r)-\cos(x-r))\right)^{k-\frac{1}{2}}dx=0,\qquad r\leq t<R,$$

где $h_2(x)=h_1(\cos x)\sin x$. Отсюда

$$\int\limits_{t}^{1}h_3(x)(x-t)^{k-\frac{1}{2}}g_1(x,t)dx=0,\qquad \cos(R-r)<t\leq 1, \tag{21}$$

где

$$h_3(x)=\frac{h_2(r+\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$g_1(x,t)=\left(t+\sqrt{1-x^2}\sin 2r-x\cos 2r\right)^{k-\frac{1}{2}}.$$

Пусть $\cos(R-r)<y\leq 1$. Умножим (21) на $(t-y)^{k-\frac{1}{2}}$ и проинтегрируем по t в пределах от y до 1. После перемены порядка интегрирования получим

$$\int\limits_{y}^{1}h_3(x)\int\limits_{y}^{x}\left((x-t)(t-y)\right)^{k-\frac{1}{2}}g_1(x,t)dtdx=0,\qquad \cos(R-r)<y\leq 1.$$

Выполняя во внутреннем интеграле замену переменной $(x-y)z=x+y-2t$, находим

$$\int_{y}^{1} h_3(x)(x-y)^{2k} g_2(x,y)dx = 0, \qquad \cos(R-r) < y \leq 1, \tag{22}$$

где

$$g_2(x,y) = \int_{-1}^{1} (1-z^2)^{k-\frac{1}{2}} g_1\left(x, \frac{x+y-(x-y)z}{2}\right) dz.$$

Дифференцируя (22) $2k+1$ раз по y, получаем

$$h_3(y) - \int_{y}^{1} h_3(x)\mathcal{K}(x,y)dx = 0, \qquad \cos(R-r) < y \leq 1,$$

где

$$\mathcal{K}(x,y) = \frac{\frac{\partial^{2k+1}}{\partial y^{2k+1}}\left((x-y)^{2k} g_2(x,y)\right)}{(2k)!g_2(y,y)}.$$

Таким образом, функция h_3 является решением однородного интегрального уравнения Вольтерра второго рода с ограниченным ядром $\mathcal{K}(x,y)$. Это означает, что $h_3 = 0$ на $(\cos(R-r), 1)$. Учитывая, что $\Phi = 0$ на $[0,r]$, отсюда получаем утверждение леммы при $R \leq 2r$.

Далее, предположим, что утверждение леммы справедливо для радиуса $R \leq mr$, где $m \geq 2$ — фиксированное натуральное число. Докажем его при $R \in (mr, (m+1)r]$. По предположению индукции имеем $\Phi = 0$ на $[0, mr]$. Поскольку $t + r < mr$ при $t < (m-1)r$, а $|t-r| < (m-1)r$ при $(m-1)r < t < R-r$, из (18) снова следует утверждение (19). Как и выше, заключаем, что $\Phi = 0$ на $[0, R]$.

Таким образом, лемма 4 доказана.

6. Доказательство теоремы 1. Прежде всего установим еще один вспомогательный результат.

Лемма 5. *Пусть $f(\xi) = u(\theta) \in V^{\infty}_{r,M}(B_R)$ и $f = 0$ в B_r. Тогда $f = 0$ в B_R.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $R \leq \pi$. Пусть $0 < \varepsilon < R - r$. Рассмотрим функцию w_ε, удовлетворяющую следующим условиям: 1) $\mathrm{w}_\varepsilon \in C^\infty[0,\pi]$; 2) $\mathrm{w}_\varepsilon = 1$ на $[0, R-\varepsilon]$ и $\mathrm{w}_\varepsilon = 0$ на $[R-\varepsilon/2, \pi]$. Для $\theta \in [0,\pi]$ положим $\Phi(\theta) = u(\theta)\mathrm{w}_\varepsilon(\theta)$, где $u = 0$ на $[R, \pi]$. Тогда $\Phi \in C^\infty[0,\pi]$ и

$$\Phi(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l P_l(\cos\theta), \tag{23}$$

где

$$\alpha_l = \frac{2l+1}{2} \int_{0}^{\pi} \Phi(\theta) P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

(см. [20], гл. 3, § 6, п. 4, формулы (21), (22)). При этом $\alpha_l = O(l^{-c})$, $l \to +\infty$, для любого фиксированного $c > 0$. Далее будем использовать отображение a_t из доказательства леммы 2, где $0 < t < R - r - \varepsilon$. Из условия имеем

$$\int_{B_r} F(a_t\xi)(\xi_1+i\xi_2)^M d\xi = 0, \tag{24}$$

где $F(\xi)=\Phi(\arccos\xi_3)$. Разложение (23) показывает, что

$$F(a_t\xi)=\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l P_l(\xi_3\cos t-\xi_2\sin t).$$

Поэтому, переходя к сферическим координатам в (24), получаем соотношение

$$\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l\int_0^r\left(\int_0^{2\pi}P_l(\cos\theta\cos t-\sin\theta\sin t\cos\varphi)e^{-iM\varphi}d\varphi\right)(\sin\theta)^{M+1}d\theta=0.$$

Тогда по формуле умножения (11) имеем

$$\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l\int_0^r P_l^{-M}(\cos\theta)(\sin\theta)^{M+1}d\theta P_l^M(\cos t)=0.$$

Теперь, используя (10), (4) и (5), приходим к равенству

$$\sum_{l=M}^{\infty}\alpha_l P_l^{-(M+1)}(\cos r)\frac{(l+M)!}{(l-M)!}P_l^{-M}(\cos t)=0. \tag{25}$$

Применяя к (25) дифференциальный оператор $\dfrac{d}{dt}-M\operatorname{ctg}t$ и учитывая (7), (5), (4), находим

$$\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l P_l^{-(M+1)}(\cos r)P_l^{M+1}(\cos t)=0. \tag{26}$$

Поскольку $T_k(-x)=(-1)^kT_k(x)$, из (26), (12) и (23) следует уравнение

$$\int_{|t-r|}^{t+r}\Phi(\theta)\sin\theta T_{M+1}(a(\theta,t,r))(b(\theta,t,r))^{\frac{-1}{2}}d\theta=0, \qquad 0<t<R-r-\varepsilon.$$

Отсюда по лемме 4 заключаем, что $\Phi=0$ на $[0,R-\varepsilon]$. В силу произвольности $\varepsilon\in(0,R-r)$ $f=0$ в B_R.

Лемма 5 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Из условия, леммы 1 и формулы (2) следует, что $f^k\in V^{\infty}_{r,M}(B_R)$ и $f^k=0$ в B_r при любом $k\in\mathbb{Z}$.

Докажем индукцией по k, что $f^k=0$ в B_R. При $k=0$ утверждение следует из леммы 5. Предположим, что утверждение верно при некотором $k\in\mathbb{Z}$. Установим его для $k+1$ и $k-1$. Используя лемму 3, делаем вывод, что $(\sin\theta)^{-k-1}\dfrac{d}{d\theta}\left((\sin\theta)^{k+1}f_{k+1}(\theta)\right)e^{ik\varphi}\in V^{\infty}_{r,M}(B_R)$ и $(\sin\theta)^{k-1}\dfrac{d}{d\theta}\left((\sin\theta)^{1-k}f_{k-1}(\theta)\right)e^{ik\varphi}\in V^{\infty}_{r,M}(B_R)$. Отсюда, учитывая, что f^{k+1} и f^{k-1} равны нулю в B_r, заключаем, что эти функции нулевые и в B_R. Таким образом, все $f^k=0$ в B_R и, значит, $f=0$ в B_R.

Теорема 1 доказана.

1. *John F.* Abhängigkeiten zwischen den Flächenintegralen einer stetigen Funktion // Math. Ann. – 1935. – **111**, № 1. – S. 541 – 559.
2. *Йон Ф.* Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. – М.: Изд-во иностр. лит., 2011. – 156 с.
3. *Volchkov V. V.* Integral geometry and convolution equations. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003. – 454 p.
4. *Smith J. D.* Harmonic analisis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1972. – **72**. – P. 403 – 416.
5. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.
6. *Леонтьев А. Ф.* Последовательности полиномов из экспонент. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
7. *Любич Ю. И.* К теореме единственности для функций, периодических в среднем // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1978. – **81**. – С. 166.
8. *Каргаев П. П.* О нулях функций, периодических в среднем // Мат. заметки. – 1985. – **37**, № 3. – С. 322 – 225.
9. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p. – М.: Мир, 1984. – 364 с.
10. *Quinto E. T.* Pompeiu transforms on geodesic spheres in real analytic manifolds // Isr. J. Math. – 1993. – **84**. – P. 353 – 363.
11. *Зарайский Д. А.* Уточнение к теореме единственности для решений уравнений свертки // Труды Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2006. – **12**. – С. 69 – 75.
12. *Волчков В. В.* Теоремы единственности для решений уравнений свертки на симметрических пространствах // Изв. РАН. Сер. мат. – 2006. – **70**, № 6. – С. 3 – 18.
13. *Волчков В. В.* Локальная теорема о двух радиусах на симметрических пространствах // Мат. сб. – 2007. – **198**, № 11. – С. 21 – 46.
14. *Волчков Вит. В.* О функциях с нулевыми шаровыми средними на компактных двухточечно-однородных пространствах // Мат. сб. – 2007. – **198**, № 4. – С. 21 – 46.
15. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. – London: Springer, 2009. – 671 p.
16. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. – М.: Мир, 1986. – Т. 1. – 495 с.
17. *Волчков В. В.* Теоремы о среднем для одного класса полиномов // Сиб. мат. журн. – 1994. – **35**, № 4. – С. 737 – 745.
18. *Ungar P.* Freak theorem about functions on a sphere // J. London Math. Soc. – 1954. – **29**, № 1. – P. 100 – 103.
19. *Бейтмен Г., Эрдейн А.* Высшие трансцендентные функции.– М.: Наука, 1973. – Т. 1. – 296 с.
20. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. – 2-е изд. – М.: Наука, 1991. – 576 с.
21. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. – М.: Наука, 1986. – 688 с.

Получено 26.04.12