УДК 517.5

**В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов, Е. А. Севостьянов**
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

# О КЛАССАХ ОРЛИЧА – СОБОЛЕВА И ОТОБРАЖЕНИЯХ С ОГРАНИЧЕННЫМ ИНТЕГРАЛОМ ДИРИХЛЕ

It is showed that homeomorphisms $f$ in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, with finite distortion by Iwaniec of the Orlicz – Sobolev class $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, under the Calderon condition on $\varphi$, in particular, the Sobolev classes $W^{1,p}_{\rm loc}$, $p > n-1$, are differentiable almost everywhere and have the Luzin $(N)$–property on the almost everywhere hyperplane. It allows to obtain the connection of the corresponding inverse homeomorphisms with the class of the mappings with bounded Dirichlet integral and the uniform equicontinuity and normality of the class of the inverse mappings.

Показано, що гомеоморфізми $f$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, зі скінченним спотворенням за Іванцем класів Орліча – Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ за умовою типу Кальдерона на функцію $\varphi$, зокрема, класів Соболєва $W^{1,p}_{\rm loc}$, $p > n-1$, є диференційовними майже скрізь та мають $(N)$-властивість Лузіна на майже всіх гіперплощинах. Це дозволяє довести теореми про належність відповідних обернених гомеоморфізмів до класу відображень з обмеженим інтегралом Діріхле, а також одностайну неперервність і нормальність сімей обернених відображень.

**1. Введение.** Основной целью настоящей статьи является установление связи отображений конечного искажения классов Орлича – Соболева с отображениями с ограниченным интегралом Дирихле (см., например, [1]). Основные результаты работы содержатся в пункте 4, в то время как в пунктах 2 и 3 приведены некоторые необходимые сведения из теории отображений и вспомогательные утверждения.

В работах Ю. Г. Решетняка и его учеников С. К. Водопьянова, В. М. Гольдштейна и других была развита теория отображений с ограниченным искажением, которая уже давно стала классикой теории отображений (см., например, [2 – 5]). Напомним, что непрерывное отображение $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ открытого множества $U$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, называется *отображением с ограниченным искажением,* если $f \in W^{1,n}_{\rm loc}$, его якобиан $J_f(x) = \det f'(x)$ не меняет знак в $U$ и $\|f'(x)\|^n \leq K|J_f(x)|$ при почти всех $x \in U$ для некоторого числа $K \in [1,\infty)$, где $f'(x)$ — якобиева матрица $f$, $\|f'(x)\|$ — ее операторная норма: $\|f'(x)\| = \sup|f'(x)\cdot h|$, где супремум берется над всеми векторами-столбцами $h$ в $\mathbb{R}^n$ единичной длины.

Как известно, в последнее десятилетие интенсивно развивается теория так называемых отображений с конечным искажением. Напомним, что гомеоморфизм $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, называется *отображением с конечным искажением,* если $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$ и

$$\|f'(x)\|^n \leq K(x)\cdot J_f(x) \tag{1}$$

для некоторой почти всюду конечной функции $K(x)$. В дальнейшем $K_f(x)$ обозначает наименьшую функцию $K(x) \geq 1$ в (1), т. е. мы полагаем $K_f(x) = \|f'(x)\|^n/\, J_f(x)$ при $J_f(x) \neq 0$, $K_f(x) = 1$ при $f'(x) = 0$ и $K_f(x) = \infty$ в остальных точках. Впервые понятие отображения с конечным искажением введено в случае плоскости для $f \in W^{1,2}_{\rm loc}$ в работе [6]. В дальнейшем это условие было заменено требованием $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$, предполагающим дополнительно, что $J_f \in L^1_{\rm loc}$ (см., например, [7]).

Заметим, что упомянутое выше дополнительное условие $J_f \in L^1_{\rm loc}$ излишне в случае гомеоморфизмов. Действительно, для каждого гомеоморфизма $f$ между областями $D$ и $D'$ в $\mathbb{R}^n$, имеющего почти всюду частные производные в $D$, существует множество $E$ лебеговой меры нуль такое, что $f$ обладает $(N)$-свойством Лузина в $D \setminus E$ и

$$\int\limits_A J_f(x)\,dm(x) = m(f(A))$$

для каждого измеримого по Лебегу множества $A \subset D \setminus E$ (см., например, пункты 3.1.4, 3.1.8 и 3.2.5 в [8]). Здесь и в дальнейшем $D$ — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $m$ — мера Лебега $\mathbb{R}^n$.

Следуя Орличу, для заданной выпуклой возрастающей функции $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\varphi(0) = 0$, обозначим символом $L^\varphi$ пространство всех функций $f\colon D \to \mathbb{R}$ таких, что

$$\int\limits_D \varphi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dm(x) < \infty$$

при некотором $\lambda > 0$ (см., например, [9]). Пространство $L^\varphi$ называется *пространством Орлича*. Другими словами, $L^\varphi$ есть конус над классом всех функций $g\colon D \to \mathbb{R}$ таких, что

$$\int\limits_D \varphi\left(|g(x)|\right)\, dm(x) < \infty\,,$$

который называется *классом Орлича*.

*Классом Орлича – Соболева* $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}(D)$ называется класс всех локально интегрируемых функций $f$, заданных в $D$, с первыми обобщенными производными по Соболеву, градиент $\nabla f$ которых локально в области $D$ принадлежит классу Орлича. Заметим, что по определению $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}} \subset W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$. Как обычно, мы пишем $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$, если $\varphi(t) = t^p$, $p \geq 1$. Известно, что непрерывная функция $f$ принадлежит классу $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ тогда и только тогда, когда $f \in ACL^p$, т. е. если $f$ локально абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных координатным осям, а первые частные производные $f$ локально интегрируемы в степени $p$ в области $D$ (см., например, разд. 1.1.3 в [10]). Далее, если $f$ — вектор-функция $n$ вещественных переменных $x_1,\ldots,x_n$, $f = (f_1,\ldots,f_m)$, $f_i \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, $i = 1,\ldots,m$, $G$ — компактная область в $D$ и

$$\int\limits_G \varphi\left(|\nabla f(x)|\right) dm(x) < \infty\,,$$

где $|\nabla f(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2}$, то мы также пишем $f \in W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$. Мы также используем обозначение $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ в случае более общих функций $\varphi$, чем в классах Орлича, всегда предполагавших выпуклость функции $\varphi$ и нормировку $\varphi(0) = 0$.

В настоящей статье $H^k$, $k \in [0,\infty)$, обозначает *$k$-мерную меру Хаусдорфа* в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ (см., например, [11]). Точнее, если $A$ — множество в $\mathbb{R}^n$, то полагаем

$$H^k(A) = \sup_{\varepsilon>0}\, H^k_\varepsilon(A)\,, \qquad H^k_\varepsilon(A) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \left(\operatorname{diam}(A_i)\right)^k\,, \tag{2}$$

где $\operatorname{diam} E$ обозначает евклидов диаметр множества $E \subset \mathbb{R}^n$, а инфимум в (2) берется по всем покрытиям $A$ множествами $A_i$ с $\operatorname{diam} A_i < \varepsilon$. Если $H^{k_1}(A) < \infty$, то $H^{k_2}(A) = 0$ для любого

$k_2 > k_1$ (см., например, разд. 1В гл. VII в [11]). Величина

$$\dim_H A = \sup_{H^k(A)>0} k$$

называется *хаусдорфовой размерностью* множества $A$.

**2. Теорема Кальдерона о дифференцируемости и следствия из нее.** Следующий результат восходит к Кальдерону [12].

**Лемма 1.** *Пусть $\Omega$ — открытое множество в $\mathbb{R}^k$, $k \geq 2$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, где $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ — возрастающая функция, удовлетворяющая условию*

$$A := \int\limits_1^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{1/(k-1)} dt < \infty\,.$$

*Тогда $f$ имеет полный дифференциал почти всюду в $\Omega$.*

Следующее свойство доказано в монографии [4] для классов $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ (см. теорему 5.5 из разд. 5.5 гл. II), и, как показывают приведенные ниже рассуждения, может быть распространено на классы Орлича – Соболева.

**Предложение 1.** *Пусть $U$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, — отображение класса Орлича – Соболева $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}(U)$, где $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ — возрастающая функция. Тогда для почти всех гиперплоскостей $\mathcal{P}$, параллельных фиксированной координатной гиперплоскости $\mathcal{P}_0$, сужение отображения $f$ на множество $\mathcal{P} \cap U$ является отображением класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{P} \cap U)$.*

***Доказательство.*** Прежде всего по теореме 5.5 из [4] (гл. II) $f|_{\mathcal{P}} \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ на почти всех гиперплоскостях $\mathcal{P}$, параллельных фиксированной координатной гиперплоскости $\mathcal{P}_0$.

Таким образом, осталось показать, что для почти всех гиперплоскостей $\mathcal{P}$, параллельных фиксированной координатной гиперплоскости $\mathcal{P}_0$, и произвольного компакта $K \subset \mathcal{P} \cap U$ выполнено условие $\int\limits_K \varphi\left(|\nabla g(z)|\right)\, dm_{n-1}(z) < \infty$, где $g := f|_{\mathcal{P}\cap U}$. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что гиперплоскость $\mathcal{P}_0$ образована $n-1$ векторами $(1,0,\ldots,0),\ldots,(0, 0,\ldots,1,0)$ (доказательство для остальных гиперплоскостей проводится аналогично).

Пусть $C$ — произвольный сегмент, такой, что $\overline{C} \subset U$, $C = \{x \in \mathbb{R}^n\colon a_1 < x_1 < b_1, \ldots, a_n < < x_n < b_n\}$. Тогда по теореме Фубини (см., например, теорему 8.1 в [13], гл. III) получаем

$$\infty > \int\limits_C \varphi(|\nabla f(x)|) dm(x) \geq \int\limits_C \varphi\left(\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x)\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}}(x)\right)^2}\right) dm(x) =$$

$$= \int\limits_{a_n}^{b_n} \left(\int\limits_{\mathcal{P}_t \cap C} \varphi(|\nabla g_t(z)|) dm_{n-1}(z)\right) dt\,,$$

где $g_t(z) := f(z,t)$, $z = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ и $\mathcal{P}_t$ обозначает гиперплоскость, перпендикулярную $n$-й оси с $x_n = t$. Отсюда следует, что для почти всех $t \in [a_n, b_n]$

$$\int\limits_{\mathcal{P}_t \cap C} \varphi(|\nabla g_t(z)|) dm_{n-1}(z) < \infty\,. \tag{3}$$

Покроем $U$ с помощью всех сегментов $C_m$, $m = 1, 2, \ldots$, $C_m = \{x \in \mathbb{R}^n \colon a_1^{(m)} < x_1 < b_1^{(m)}, \ldots, a_n^{(m)} < x_1 < b_n^{(m)}\}$, с рациональными $a_k^{(m)}$ и $b_k^{(m)}$ такими, что $\overline{C_m} \subset U$. Пусть $G_m$ состоит из таких чисел $t \in (a_n^{(m)}, b_n^{(m)})$, для которых $\varphi(|\nabla g_t(z)|) \notin L^1(\mathcal{P}_t \cap C_m)\}$. Для произвольного $t \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m$ выберем гиперплоскость $\mathcal{P}_t$ и произвольный компакт $K \subset \mathcal{P} \cap U$. Заметим, что по доказанному выше $m_1 \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} G_m\right) = 0$ и для компакта $K$ найдутся номера $s_1, \ldots s_k \in \mathbb{N}$ такие, что $K \subset \bigcup_{l=1}^{k} C_{s_l}$. По построению имеем

$$\int\limits_{\mathcal{P}_t \cap K} \varphi(|\nabla g_t(z)|) dm_{n-1}(z) \ \leq\ \sum_{l=1}^{k} \int\limits_{\mathcal{P}_t \cap C_{s_l}} \varphi(|\nabla g_t(z)|) dm_{n-1}(z) \ <\ \infty\,.$$

Таким образом, $\displaystyle\int_K \varphi\left(|\nabla g_t(z)|\right)\, dm_{n-1}(z) < \infty$ для почти всех гиперплоскостей $\mathcal{P}_t$, параллельных гиперплоскости $\mathcal{P}_0$, и произвольного компакта $K \subset \mathcal{P}_t \cap U$, что и требовалось доказать.

Комбинируя лемму 1 с предложением 1, получаем следующее утверждение.

***Следствие* 1.** *Пусть $\Omega$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, и $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, где $\varphi \colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ — возрастающая функция, удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_1^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{1/(n-2)} dt < \infty\,. \tag{4}$$

*Тогда на почти каждой гиперплоскости, параллельной фиксированной координатной гиперплоскости, отображение $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ имеет почти всюду полный дифференциал.*

Напомним также теорему Вяйсяля – Фаделя, которая позволяет на основе теоремы Кальдерона распространить известную теорему Меньшова – Геринга – Лехто на плоскости, а также теорему Вяйсяля в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, о дифференцируемости почти всюду открытых отображений классов Соболева (см., например, [14 – 17]) на открытые отображения классов Орлича – Соболева в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Напомним, что отображение $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется *открытым,* если образ любого открытого множества в $\Omega$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$.

**Предложение 2.** *Пусть $\Omega$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, и $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное открытое отображение. Если $f$ имеет почти всюду полный дифференциал в $\Omega$ относительно $n-1$ переменной в направлении каждой координатной гиперплоскости, то $f$ имеет полный дифференциал почти всюду в $\Omega$ относительно всех $n$ переменных.*

Комбинируя следствие 1 с результатом Вяйсяля – Фаделя, получаем основной результат настоящего пункта.

**Теорема 1.** *Пусть $\Omega$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное открытое отображение класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(\Omega)$, где $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ — возрастающая функция, удовлетворяющая условию* (4). *Тогда отображение $f$ имеет полный дифференциал почти всюду в $\Omega$.*

***Замечание* 1.** В частности, заключение теоремы 1 имеет место, если $f \in W^{1,p}_{\rm loc}$ при некотором $p > n-1$. Последнее утверждение — результат Вяйсяля (см. лемму 3 в [17]). Теорема 1 является также распространением в пространство известной теоремы Меньшова – Геринга – Лехто на плоскости (см., например, [15, 16]).

**3. Свойства Лузина и Сарда на поверхностях.** Следующий результат также принадлежит Кальдерону (см., например, [12, с 208]).

**Предложение 3.** *Пусть $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ — возрастающая функция, удовлетворяющая условию*

$$A \, : \, = \int\limits_0^\infty \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{1/(k-1)} dt \; < \; \infty$$

*при некотором натуральном $k \geq 2$. Предположим, что $f\colon D \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, заданная в области $D \subset \mathbb{R}^k$ класса $f \in W^{1,\varphi}(D)$. Тогда для каждого куба $C \subset D$, ребра которого ориентированы вдоль координатных осей, выполняется условие*

$$\operatorname{diam} f(C) \leq \alpha_k A^{(k-1)/k} \left[\int\limits_C \varphi\left(|\nabla f|\right) \, dm(x)\right]^{1/k}, \tag{5}$$

*где $\alpha_k$ — постоянная, зависящая только от $k$.*

***Замечание* 2.** Функция $(t/\varphi(t))^{1/(k-1)}$ может иметь в нуле неинтегрируемую особенность. Однако ясно, что поведение функции $\varphi$ вблизи нуля не существенно. Действительно, пусть

$$A_* \, : \, = \left[\frac{1}{\varphi(1)}\right]^{1/(k-1)} + \int\limits_1^\infty \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{1/(k-1)} dt \; < \; \infty$$

и $\varphi_*(t) \equiv \varphi(1)$ при $t \in (0,1)$, $\varphi_*(0) = 0$ и $\varphi_*(t) = \varphi(t)$ при $t \geq 1$. Применяя предложение 3 к однопараметрическому семейству функций $\varphi_\lambda(t) = \varphi(t) + \lambda \cdot [\varphi_*(t) - \varphi(t)]$, $\lambda \in [0,1)$, получаем при $\lambda \to 1$ соотношение (5) с заменами $A \mapsto A_*$ и $\varphi \mapsto \varphi_*$.

**Теорема 2.** *Пусть $\Omega$ — открытое множество в $\mathbb{R}^k$, $k \geq 2$, и $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, — непрерывное отображение класса $W^{1,\varphi}(\Omega)$, где $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ — возрастающая функция, удовлетворяющая условию*

$$A := \int\limits_1^\infty \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{1/(k-1)} dt < \infty\,. \tag{6}$$

*Тогда для любого измеримого множества $E \subset \Omega$ имеет место оценка*

$$H^k(f(E)) \le \gamma_{k,m}\, A_*^{k-1} \int\limits_E \varphi_*\left(|\nabla f|\right)\, dm(x)\,, \tag{7}$$

*где* $\gamma_{k,m} = (m\alpha_k)^k$, $\alpha_k$ *— постоянная из предложения* 3, *зависящая только от* $k$, $A_* = A + 1/[\varphi(1)]^{1/(k-1)}$, $\varphi_*(0) = 0$, $\varphi_*(t) \equiv \varphi(1)$ *при* $t \in (0,1)$ *и* $\varphi_*(t) = \varphi(t)$ *при* $t \ge 1$.

Доказательство теоремы 2 основано на следующей лемме.

**Лемма 2.** *Пусть* $\Omega$ *— открытое множество в* $\mathbb{R}^k$, $k \ge 2$, *и* $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$, $m \ge 1$, *— непрерывное отображение класса* $W^{1,\varphi}(\Omega)$, *где* $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *— возрастающая функция, удовлетворяющая условию* (6). *Тогда для каждого куба* $C \subset \Omega$ *с ребрами, параллельными координатным осям, имеет место оценка*

$$\operatorname{diam} f(C) \le m\alpha_k\, A_*^{(k-1)/k} \left[\,\int\limits_C \varphi_*\left(|\nabla f|\right)\, dm(x)\right]^{1/k}. \tag{8}$$

***Доказательство.*** Покажем справедливость (8) индукцией по $m = 1, 2, \ldots$. Действительно, при $m = 1$ соотношение (8) имеет место в силу предложения 3 и замечания 2. Предположим, что неравенство (8) справедливо при некотором $m = l$, и докажем его при $m = l+1$. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{V} = (v_1, v_2, \ldots, v_l, v_{l+1})$ в $\mathbb{R}^{l+1}$, а также векторы $\vec{V_1} = (v_1, v_2, \ldots, v_l, 0)$ и $\vec{V_2} = (0, 0, \ldots, 0, v_{l+1})$. По неравенству треугольника $|\vec{V}| = |\vec{V_1} + \vec{V_2}| \le |\vec{V_1}| + |\vec{V_2}|$. Таким образом, обозначая через $\mathrm{Pr}_1\, \vec{V} = \vec{V_1}$ и $\mathrm{Pr}_2\, \vec{V} = \vec{V_2}$ перпендикулярные проекции векторов из $\mathbb{R}^{l+1}$ на координатную гиперплоскость $y_{l+1} = 0$ и на $(l+1)$-ю координатную ось в $\mathbb{R}^{l+1}$ соответственно, получаем $\operatorname{diam} f(C) \le \operatorname{diam} \mathrm{Pr}_1 f(C) + \operatorname{diam} \mathrm{Pr}_2 f(C)$, и, применяя (8) при $m = l$ и $m = 1$, приходим к неравенству (8) при $m = l+1$ вследствие монотонности функции $\varphi$.

Лемма 2 доказана.

***Доказательство теоремы* 2.** В силу счетной аддитивности интеграла и меры, не ограничивая общности рассуждений, можем считать, что множество $E$ ограничено и $\overline{E} \subset \Omega$, т. е. $\overline{E}$ — компакт в $\Omega$. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $\omega \subset \Omega$ такое, что $E \subset \omega$ и $m\,(\omega \setminus E) < \varepsilon$ (см., например, теорему III в [13]). Учитывая замечание, приведенное выше, можем считать, что $\overline{\omega}$ — компакт и, следовательно, отображение $f$ равномерно непрерывно в $\omega$. Поэтому $\omega$ может быть покрыто счетным набором замкнутых ориентированных кубов $C_i$, лежащих в $\omega$, внутренности которых попарно не пересекаются, и таких, что $\operatorname{diam} f(C_i) < \delta$ для каждого предписанного заранее $\delta > 0$ и $m\,(\bigcup_{i=1}^{\infty} \partial C_i) = 0$. Таким образом, по лемме 2 имеем

$$H^k_\delta(f(E)) \le H^k_\delta(f(\omega)) \le \sum_{i=1}^{\infty} \left[\,\operatorname{diam} f(C_i)\right]^k \le \gamma_{k,m} A_*^{k-1} \int\limits_\omega \varphi_*\left(|\nabla f|\right)\, dm(x)\,.$$

Наконец, вследствие абсолютной непрерывности неопределенного интеграла, произвольности $\varepsilon$ и $\delta > 0$ получаем (7).

Теорема 2 доказана.

По теореме 2 приходим к следующему заключению о свойстве Лузина отображений классов Орлича – Соболева.

***Следствие* 2.** *При условиях теоремы* 2 $f$ *обладает* $(N)$*-свойством Лузина, более того, отображение* $f$ *абсолютно непрерывно относительно* $k$*-мерной хаусдорфовой меры.*

По теореме 2 (см. также теорему VII.3 в [11]) получаем дополнительно следующие заключения типа Сарда для классов Орлича – Соболева.

***Следствие* 3.** *При условиях теоремы* 2 $H^k(f(E)) = 0$, *если* $|\nabla f| = 0$ *на измеримом множестве* $E \subset \Omega$, *поэтому* $\dim_H f(E) \le k$ *и* $\dim f(E) \le k-1$.

Из следствий 2, 3 и предложения 1 вытекает следующий результат об $(N)$-свойстве отображений класса Орлича – Соболева на гиперплоскостях.

**Теорема 3.** *Пусть* $U$ — *открытое множество в* $\mathbb{R}^n$, $n \ge 3$, *и* $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ — *возрастающая функция, удовлетворяющая условию* (4). *Тогда любое непрерывное отображение* $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, $m \ge 1$, *класса* $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ *обладает* $(N)$*-свойством, более того, локально абсолютно непрерывно относительно* $(n-1)$*-мерной хаусдорфовой меры на почти всех гиперплоскостях* $\mathcal{P}$, *параллельных фиксированной координатной гиперплоскости* $\mathcal{P}_0$. *Кроме того, на почти всех таких* $\mathcal{P}$ $H^{n-1}(f(E)) = 0$, *если* $|\nabla f| = 0$ *на* $E \subset \mathcal{P}$.

**4. Классы Орлича – Соболева и интеграл Дирихле.** Приведем необходимые сведения из теории отображений с ограниченным интегралом Дирихле. Следующее определение можно найти в § 2 гл. IV [1]. Пусть $D$ — область в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$. Будем говорить, что непрерывное отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $BL^{n/2}_k$ в $D$, если $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ и

$$J(f,D) = \int\limits_D \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2\right]^{n/2} dm(x) \le k < \infty\,. \tag{9}$$

При этом будем говорить, что $f \in BL^{n/2}$, если найдется $k < \infty$ такое, что $f \in BL^{n/2}_k$. Напомним, что *колебанием отображения* $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ *на множестве* $E \subset D$ называется величина

$$\omega(E,f) = \sup_{x_1,x_2 \in E} |f(x_1) - f(x_2)|\,.$$

Согласно § 1 гл. V в [1], отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ будем называть *монотонным,* если для любой области $G \subset D$ такой, что $\overline{G} \subset D$, выполнено условие $\omega(G,f) = \omega(\partial G, f)$. Отметим, что, в частности, каждый гомеоморфизм $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ является монотонным отображением. Следующие определения можно найти в монографии [18, с. 518, 539]. Сечение фиксированной сферы $S(a,r)$ в $\mathbb{R}^n$ любой гиперплоскостью, не проходящей через ее центр, будем называть *малой окружностью*. Очевидно, произвольная малая окружность разделяет сферу на две компоненты; та из них, которая не выходит за пределы полусферы, называется *сферическим кругом*. Пусть $K$ — сферический круг. Заметим, что существует единственная точка $O \in K$, называемая *центром сферического круга,* обладающая следующим свойством: длины дуг, соединяющих точку

$O$ с произвольной точкой сферы вдоль сферы $S(a,r)$, постоянны. Эту длину дуги называют *сферическим радиусом круга* $K$.

Следующее утверждение доказано в монографии [1, с. 120] (см. следствие в § 2 гл. IV).

**Предложение 4.** *Пусть отображение* $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ *принадлежит классу* $BL^{n/2}$. *Предположим, что найдутся* $r_1,r_2>0$, $r_1<r_2$, *такие, что множество* $S(a,r)\cap D$ *не пусто при всех* $r\in[r_1,r_2]$. *Обозначим через* $K_r$ *открытый сферический круг сферического радиуса* $R(r)\le\dfrac{\pi r}{2}$, $K_r\subset S(a,r)\cap D$. *Пусть почти всюду на* $[r_1,r_2]$ *определены измеримые функции* $\Omega(r)\le\omega(K_r,f)$ *и* $\alpha(r)>\dfrac{2R(r)}{\pi r}$. *Тогда для каждого* $\varepsilon>0$ *найдется* $\overline{r}\in[r_1,r_2]$, *для которого*

$$\Omega(\overline{r})\le(\alpha(\overline{r})(M_n+\varepsilon)J(f,D_{r_1,r_2}))^{1/n}\cdot\log^{-1/n}\left(\frac{r_2}{r_1}\right),$$

*где* $D_{r_1,r_2}:=\bigcup_{r\in[r_1,r_2]}S(a,r)\cap D$.

Следующая оценка искажения расстояния в классе $\in BL^{n/2}$ была получена в монографии [1] при $n=3$. Мы приводим здесь полное доказательство этой оценки в случае произвольного $n\ge 2$, так как доказательство в [1] содержало неточности.

**Предложение 5.** *Пусть* $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ — *монотонное отображение, принадлежащее классу* $BL^{n/2}$, *точки* $x'$ *и* $x''\in D$ *удовлетворяют условию* $|x'-x''|<2$ *и, кроме того, шар* $B\left(\dfrac{x'+x''}{2},\sqrt{\dfrac{|x'-x''|}{2}}\right)$ *содержится в* $D$ *вместе со своим замыканием. Тогда*

$$|f(x')-f(x'')|\le(2M_nJ(f,D))^{1/n}\log^{-1/n}\frac{2}{|x'-x''|}, \tag{10}$$

*где* $J(f,D)$ *задается соотношением* (9), *а* $M_n$ — *некоторая постоянная, зависящая только от* $n$.

***Доказательство.*** Положим $x_0:=\dfrac{1}{2}(x'+x'')$, $r:=\dfrac{1}{2}|x'-x''|$, $r_0:=\sqrt{r}$ и рассмотрим сферу $S(x_0,t)$, $t\in[r,r_0]$. Поскольку $f$ непрерывно, а $S(x_0,t)$ — компакт в $\mathbb{R}^n$, найдутся точки $a,b\in S(x_0,t)$, для которых $\omega(S(x_0,t),f)=|f(a)-f(b)|$. Пусть $K_t$ — сферический круг радиуса $R\le\pi t/2$ такой, что $a$ и $b\in\overline{K_t}$. Тогда $\omega(S(x_0,t),f)=\omega(K_t,f)$ вследствие непрерывности $f$, и по предложению 4 для каждого $\varepsilon>0$ найдется $\overline{r}\in[r,r_0]$ такое, что

$$\omega(S(x_0,\overline{r}),f)\le[\alpha(\overline{r})(2(M_n+\varepsilon))J(f,D)]^{1/n}\cdot\log^{-1/n}\left(\frac{2}{|x'-x''|}\right), \tag{11}$$

где $M_n$ — некоторая постоянная. Поскольку отображение $f$ монотонно,

$$\omega(\overline{B(x_0,r)},f)\le\omega(B(x_0,\overline{r}),f)=\omega(S(x_0,\overline{r}),f). \tag{12}$$

Заметим, что $x'$, $x''\in\overline{B(x_0,r)}$ и поэтому

$$|f(x')-f(x'')|\le\omega(\overline{B(x_0,r)},f). \tag{13}$$

Таким образом, из соотношений (11) – (13) и произвольности $\varepsilon>0$ в (11) получаем неравенство (10).

Предложение 5 доказано.

Используемое ниже определение аппроксимативного дифференциала отображения $f$ можно найти, например, в разд. 3.1.2 [8]. Пусть $A$ — невырожденная $(n \times n)$-матрица. Тогда ее *присоединенная матрица* (обозначаемая символом $\mathrm{adj}\, A$) определяется из соотношения $A \cdot \mathrm{adj}\, A = I \det A$, т. е. $\mathrm{adj}\, A = A^{-1} \det A$.

Полагаем $l\,(f'(x)) = \min_{h \in \mathbb{R}^n,\ |h|=1} |f'(x)h|$. *Внутренней дилатацией* отображения $f$ в точке $x$ называется величина

$$K_I(x,f) \quad = \quad \frac{|J_f(x)|}{l\,(f'(x))^n}\,,$$

если $J_f(x) \neq 0$; $\quad K_I(x,f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_I(x,f) = \infty$ в остальных точках.

*Внешней дилатацией* отображения $f$ в точке $x$ называется величина

$$K_O(x,f) \quad = \quad \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x,f)|}\,,$$

если $J(x,f) \neq 0$; $\quad K_O(x,f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_O(x,f) = \infty$ в остальных точках.

Одним из главных результатов настоящего пункта является следующая теорема.

**Теорема 4.** *Пусть $f\colon D \to D'$ — гомеоморфизм класса Орлича – Соболева $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ с условием Кальдерона* (4) *такой, что $K_O(x,f) \in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}$. Тогда отображение $g := f^{-1}$ принадлежит классу $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$ и*

$$\int\limits_{D'} \|g'(y)\|^n dm(y) = \int\limits_{D} K_I(x,f) dm(x)\,. \tag{14}$$

***Доказательство.*** По теореме 1.2 в [20] отображение $f$ обладает $(N^{-1})$-свойством. Поскольку по теореме 1 настоящей статьи отображение $f$ дифференцируемо почти всюду, по теореме 1 в [21] $J_f(x) \neq 0$ при почти всех $x \in D$. Заметим, что в каждой точке $x_0$ дифференцируемости отображения $f$ с $J_f(x_0) \neq 0$ выполнено неравенство

$$\|\mathrm{adj}\, f'(x_0)\| \leq \|f'(x_0)\|^{n-1} \tag{15}$$

(см. п. 2.1 § 1 гл. I в [2, с. 21]). Далее, по неравенству Гельдера

$$\|\partial_i f\|_{L_{n-1}(C)} \leq \|K_f\|^{1/n}_{L^{n-1}(C)} \left(m(f(C))\right)^{1/n} < \infty\,, \tag{16}$$

где $C$ — произвольный компакт в области $D$. Из (15) и (16) следует, что $\|\mathrm{adj}\, f'(x)\| \in L^1_{\mathrm{loc}}$. Кроме того, согласно следствию 2 отображение $f$ обладает $(N)$-свойством на почти всех гиперплоскостях. Следовательно, $f^{-1} \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(f(D))$ по теореме 1 в [19]. Теперь для того, чтобы показать включение $f^{-1} \in W^{1,n}(D')$, достаточно проверить, что $\|g'(y)\|^n \in L^1(D)$, т. е. $\int_{D'} \|g'(y)\|^n \, dm(y) < \infty$, где $g := f^{-1}$ (см. теорему 2 из разд. 1.1.3 в [10]).

Поскольку, как было установлено, $g \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(D')$, при почти всех $y \in D'$ отображение $g$ имеет обычные частные производные (см. теорему 1 из разд. 1.1.3 в [10]), вследствие чего $g$

почти всюду аппроксимативно дифференцируемо (см. теорему 3.1.4 в [8]). Так как $g$ является отображением с конечным искажением (см. теорему 1 в [19]), якобиева матрица $g'(y)$ нулевая при почти всех $y$ таких, что $J_g(y)=0$; таким образом, $\|g'(y)\|^n = K_g(y)\cdot J_g(y)$ при почти всех $y\in D'$ (согласно теории интеграла $0\cdot\infty=0$, см. § 3 гл. I в [13]).

Обозначим через $B$ (борелево) множество всех точек $y\in D'$, где отображение $g$ имеет обычные частные производные и $J_g(y)=\det g'(y)\neq 0$. По теореме 3.1.8 из [8] множество $B$ может быть разбито на не более чем счетное число борелевских множеств $B_l$, $l=1,2,\ldots$, таких, что отображение $g_l = g|_{B_l}$ является липшицевым. По теореме Кирсбрауна (см. теорему 2.10.43 в [8]) каждое отображение $g_l$ может быть продолжено до липшицевого отображения $\widetilde{g_l}\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, при этом по теореме Радемахера – Степанова $\widetilde{g_l}$ дифференцируемо почти всюду в $\mathbb{R}^n$ (см. теорему 3.1.6 в [8]), и в силу единственности аппроксимативного дифференциала (см. разд. 3.1.2 в [8]) можно считать, что при всех $y\in B_l$ выполнено равенство $\widetilde{g_l}'(y)=g'(y)$. Также можно считать, что $\widetilde{g_l}$ — однолистные (взаимно однозначные) на $B_l$ (см., например, лемму 3.2.2 в [8]) и множества $B_l$ попарно не пересекаются.

Применяя теорему 3.2.5 из [8] на $B_l$, $l=1,2,\ldots$, суммируя по всем $B_l$ и учитывая $(N^{-1})$-свойство отображения $f$, получаем

$$\int\limits_{D'}\|g'(y)\|^n\,dm(y)=\int\limits_{D'}K_g(y)\cdot J_g(y)\,dm(y)=$$

$$=\int\limits_{D'}K_g(g^{-1}(g(y)))\cdot J_g(y)\,dm(y)=\int\limits_{f^{-1}(D')}K_g\left(g^{-1}(x)\right)\,dm(x)\,. \tag{17}$$

Отметим, что согласно введенным обозначениям $g'(g^{-1}(x))=g'(f(x))$ и по теореме 4 из гл. VIII § 3 в [22] $g'(f(x))=(f'(x))^{-1}$ в каждой точке $x$ дифференцируемости и невырожденности отображения $f$. Значит, при почти всех $x\in D$

$$\|g'\left(f(x)\right)\|=\frac{1}{l\left(f'(x)\right)}\,,\qquad J_g\left(f(x)\right)=\frac{1}{J_f(x)} \tag{18}$$

(см. теорему 2.1 и соотношения (2.4) – (2.7) из п. 2.1 § 1 гл. I [2]). Таким образом, из (17) и (18) получаем (14).

Теорема 4 доказана.

***Следствие* 4.** *При условиях теоремы* 4

$$\int\limits_{D'}\|g'(y)\|^n dm(y)\leq\int\limits_{D}K_O^{n-1}(x,f)dm(x)\,. \tag{19}$$

***Доказательство*** вытекает из теоремы 4 и известного неравенства $K_I(x,f)\leq K_O^{n-1}(x,f)$ в произвольной точке $x\in D$ дифференцируемости отображения $f$ с $J_f(x)\neq 0$ (см. п. 2.1 гл. I в [2]).

***Следствие* 5.** *В частности, равенство* (14) *и неравенство* (19) *имеют место, если* $f\in$ $\in W^{1,p}_{\rm loc}$ *при* $p>n-1$.

***Доказательство.*** Достаточно выбрать в теореме 4 и следствии 4 функцию $\varphi = t^p, p > n-1$.

Для произвольных областей $D \subset \mathbb{R}^n$ и $D' \subset \mathbb{R}^n$ обозначим символом $\mathcal{O}_Q^{\varphi}(D, D')$ семейство всех гомеоморфизмов $f\colon D \to D'$, $f(D) = D'$, с конечным искажением класса Орлича – Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ таких, что и $K_O^{n-1}(x, f) \le Q(x)$ почти всюду.

Заметим, что при почти всех $x \in D$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}\right)^2\right]^{n/2} \le n^{n/2}\,\|g'(y)\|^n\,, \tag{20}$$

поэтому из (19) вытекает следующее утверждение.

***Следствие* 6.** *Пусть $f \in \mathcal{O}_Q^{\varphi}(D, D')$ — гомеоморфизм с конечным искажением, при этом выполнено условие Кальдерона* (4) *и, кроме того, $Q \in L^1(D)$. Тогда отображение $g := f^{-1}$ принадлежит классу $BL^{n/2}$ в $D'$ и*

$$\int\limits_{D'}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(y)\right)^2\right]^{n/2} dm(y) \le C(D, Q, n) < \infty\,,$$

*где постоянная $C(D, Q, n)$ зависит только от размерности пространства $n$ и $L^1$-нормы функции $Q$ в $D$. Более того, для любой точки $y_0 \in D'$ найдется $\delta > 0$, $\delta < \operatorname{dist}(y_0, D')$, такое, что для всех $x'$, $x'' \in B(y_0, \delta)$ и отображений $g$ таких, что $g^{-1} = f \in \mathcal{O}_Q^{\varphi}(D, D')$, выполнено неравенство*

$$|g(x') - g(x'')| \le C_0(D, Q, n)\log^{-1/n}\frac{2}{|x' - x''|}\,, \tag{21}$$

*где постоянная $C_0(D, Q, n)$ зависит только от $n$ и $L^1$-нормы $Q$ в $D$.*

***Доказательство.*** Из неравенств (19) и (20) следует, что

$$\int\limits_{D'}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}\right)^2\right]^{n/2} dm(y) \le n^{n/2}\int\limits_{D} Q(x)\,dm(x) < \infty\,. \tag{22}$$

Значит, $g := f^{-1} \in BL^{n/2}(D')$. Соотношение (21), выполненное с некоторой постоянной $C_0(D, Q, n) < \infty$ (зависящей только от размерности пространства $n$ и $L^1$-нормы функции $Q$ в $D$), следует из (22) на основе предложения 5.

Из оценки (21) вытекает следующее важное следствие.

***Следствие* 7.** *В условиях следствия* 6 *семейство всех отображений $g = f^{-1}$ таких, что $f \in \mathcal{O}_Q^{\varphi}(D, D')$, образует равностепенно непрерывное, а следовательно, и нормальное семейство отображений.*

1. *Суворов Г. Д.* Обобщенный принцип длины и площади в теории отображений. – Киев: Наук. думка, 1985. – 280 с.

2. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982. – 286 с.
3. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Пространства Соболева и специальные классы отображений. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1981. – 72 с.
4. *Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. – Новосибирск: Наука, 1983. – 284 с.
5. *Водопьянов С. К.* Отображения с ограниченным искажением и с конечным искажением на группах Карно // Сиб. мат. журн. – 1999. – **40**, № 4. – С. 764 – 804.
6. *Iwaniec T., Sverák V.* On mappings with integrable dilatation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1993. – **118.** – P. 181 – 188.
7. *Iwaniec T., Martin G.* Geometrical function theory and non-linear analysis. – Oxford: Clarendon Press, 2001. – 552 p.
8. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987. – 760 с.
9. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. – М.: Физматгиз, 1958. – 271 с.
10. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. – Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1985. – 416 с.
11. *Hurewicz W., Wallman H.* Dimension theory. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1948. – 165 p.
12. *Calderon A. P.* On the differentiability of absolutely continuous functions // Riv. mat. Univ. Parma. – 1951. – **2.** – P. 203 – 213.
13. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – 494 с.
14. *Fadell A. G.* A note on a theorem of Gehring and Lehto // Proc. Amer. Math. Soc. – 1975. – **49.** – P. 195 – 198.
15. *Gehring F. W., Lehto O.* On the total differentiability of functions of a complex variable // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1959. – **272.** – P. 3 – 8.
16. *Menchoff D.* Sur les differencelles totales des fonctions univalentes // Math. Ann. – 1931. – **105.** – P. 75 – 85.
17. *Väisälä J.* Two new characterizations for quasiconformality // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1965. – **362.** – P. 1 – 12.
18. *Александров П. С., Маркушевич А. И., Хинчин А. Я.* Энциклопедия элементарной математики. Книга четвертая. Геометрия. – М.: Физматгиз, 1963. – 568 с.
19. *Водопьянов С. К.* Отображения с конечным коискажением и классы функций Соболева // Докл. АН. – 2008. – **440**, № 3. – С. 301 – 305.
20. *Koskela P., Maly J.* Mappings of finite distortion: The zero set of Jacobian // J. Eur. Math. Soc. – 2003. – **5**, № 2. – P. 95 – 105.
21. *Пономарев С. П.* $N^{-1}$-свойство отображений и условие $(N)$ Лузина // Мат. заметки. – 1995. – **58**, вып. 3. – С. 411 – 418.
22. *Зорич В. А.* Математический анализ. – М.: Наука, 1981. – Ч. I. – 544 с.

Получено 26.06.12