УДК 517.5

О. В. Моторная (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко),
В. П. Моторный (Днепропетр. нац. ун-т)

ОБОБЩЕННЫЕ КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА И СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ – ЯКОБИ В ПРОСТРАНСТВАХ $L_{1,A,B}$

Generalized Lebesgue constants for the Fourier – Jacobi sums and the convergence of Fourier – Jacobi series in the $L_{1,A,B}$ spaces are investigated.

Досліджуються узагальнені константи Лебега для сум Фур'є – Якобі і збіжність рядов Фур'є – Якобі у просторах $L_{1,A,B}$.

Приведем определения и результаты, необходимые для дальнейшего изложения.

Пусть $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ — многочлены Якоби, ортогональные на сегменте $[-1;1]$ с весом $p(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, $\alpha>-1$, $\beta>-1$, и нормированные условием $P_n^{(\alpha,\beta)}(1)=\binom{n+\alpha}{n}$; $L_{p,A,B}$ — пространство измеримых на сегменте $[-1;1]$ функций, интегрируемых с весом $w(x)=(1-x)^{A}(1+x)^{B}$, A, $B>-1$; $\|f\|_{p,A,B}=\left\|fw^{1/p}\right\|_p=\left\{\int_{-1}^{1}|f(x)|^p\,w(x)dx\right\}^{1/p}$ — норма функции $f(x)$ в пространстве $L_{p,A,B}$.

Частную сумму порядка n ряда Фурье – Якоби функции $f\in L_{p,\alpha,\beta}$ будем обозначать через $S_n^{(\alpha,\beta)}(f)$. Частные суммы $S_n^{(\alpha,\beta)}(f)$ можно рассматривать как оператор, действующий в некотором подпространстве X пространства $L_{p,A,B}$. Норма этого оператора $\left\|S_n^{(\alpha,\beta)}\right\|_X=\sup_{\|f\|_X\le 1}\left\|S_n^{(\alpha,\beta)}(f)\right\|_X$ называется константой Лебега. В работе [1] найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы нормы $\left\|S_n^{(\alpha,\beta)}\right\|_{p,A,B}$ были ограничены, если $p>1$.

Для многочленов $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ имеют место [2] равенство

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(-x) \tag{1}$$

и оценка

$$\left|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right| \le Cn^{-1/2}(1-x+n^{-2})^{-\alpha/2-1/4}, \qquad 0\le x\le 1. \tag{2}$$

Частную сумму $S_n^{(\alpha,\beta)}(f)$ ряда Фурье – Якоби запишем в виде

$$S_n^{(\alpha,\beta)}(f;x) = \int_{-1}^{1} K_n^{(\alpha,\beta)}(x,y) f(y)(1-y)^{\alpha}(1+y)^{\beta} dy,$$

где ядро $K_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)$ можно представить в виде

$$K_n^{(\alpha,\beta)}(x,y) = \sum_{k=0}^{n} h_k P_k^{(\alpha,\beta)}(x) P_k^{(\alpha,\beta)}(y) = \tag{3}$$

$$= \lambda_n \frac{P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(y) - P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(y)}{x-y} = \tag{4}$$

$$= \frac{\eta_n^{(\alpha,\beta)}(P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha+1,\beta)}(y)(1-y) - P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(y)P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x)(1-x))}{x-y}. \tag{5}$$

Здесь $h_k = 2^{-\alpha-\beta}k + O(1)$, $\lambda_n = 2^{-\alpha-\beta-1}n + O(1)$, $\eta_n^{(\alpha,\beta)} = O(n)$.

Функцией Лебега называется функция $L_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sup_{\|f\|_\infty \le 1} S_n^{(\alpha,\beta)}(f;x)$:

$$L_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \int_{-1}^{1} \left| K_n^{(\alpha,\beta)}(x,y) \right| (1-y)^{\alpha}(1+y)^{\beta} dy.$$

Асимптотически точные оценки функций Лебега получены в [3, 4].

Пусть $\sigma(n,\theta,\delta,x) = (\sqrt{1-x}+1/n)^{\theta}(\sqrt{1+x}+1/n)^{\delta}$, $\theta \ge 0$, $\delta \ge 0$. Величины

$$D_{n,p,\theta,\delta}^{\alpha,\beta,A,B} = \sup_{\|f/\sigma(n,\theta,\delta)\|_{p,A,B} \le 1} \left\| S_n^{\alpha,\beta}(f) \right\|_{p,A,B}$$

называются обобщенными константами Лебега сумм Фурье – Якоби. Они совпадают с классическими константами Лебега, если $\theta = \delta = 0$. Впервые, в случае $p > 1$, обобщенные константы Лебега для сумм Фурье – Лежандра рассматривались в работах [5, 6], а для сумм Фурье – Якоби константы $D_{n,p,\theta,\delta}^{\alpha,\beta,A,B}$ исследовались в [7 – 11]. Уклонения частных сумм Фурье – Якоби на некоторых классах функций можно оценивать по следующей схеме. Поскольку $S_n^{(\alpha,\beta)}(P_n;x) = P_n(x)$ для любого многочлена $P_n(x)$ степени не выше n, то

$$\left\| f - S_n^{(\alpha,\beta)}(f) \right\|_{p,A,B} \le \| f - P_n(x) \|_{p,A,B} + \left\| S_n^{(\alpha,\beta)}(f - P_n) \right\|_{p,A,B} \le$$

$$\le \| f(x) - P_n(x) \|_{p,A,B} + D_{n,p,\theta,\delta}^{\alpha,\beta,A,B} \left\| \frac{f - P_n}{\sigma(n,\theta,\delta)} \right\|_{p,A,B}. \tag{6}$$

Таким образом, задача сводится к тому, что необходимо выбрать многочлен $P_n(x)$, минимизирующий правую часть. В настоящей работе получена оценка обобщенных констант $D_{n,p,\theta,\delta}^{\alpha,\beta,A,B}$ для $p=1$.

Теорема 1. *Имеет место равенство*

$$D_{n,1,\theta,\delta}^{\alpha,\beta,A,B} = \sup_{-1\le x\le 1} \frac{\sigma(n,\theta,\delta,x)p(x)}{w(x)} \int_{-1}^{1} \left| K_n^{(\alpha,\beta)}(x,y) \right| w(y)\,dy,$$

где $\alpha \ge A$, $\beta \ge B$.

Доказательство. Имеем

$$D_{n,1,\theta,\delta}^{\alpha,\beta,A,B} = \sup_{\|f/\sigma(n,\theta,\delta)\|_{1,A,B}\le 1} \left\| S_n^{\alpha,\beta}(f) \right\|_{1,A,B} =$$

$$= \sup_{\|fw/\sigma(n,\theta,\delta)\|_1\le 1} \left\| S_n^{\alpha,\beta}(f)w \right\|_1 = \sup_{\|fw/\sigma(n,\theta,\delta)\|_1\le 1} \sup_{\|g\|_\infty\le 1} \int_{-1}^{1} S_n^{\alpha,\beta}(f,y)w(y)g(y)dy =$$

$$= \sup_{\|fw/\sigma(n,\theta,\delta)\|_1\le 1} \sup_{\|g\|_\infty\le 1} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x)K_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)\,p(x)\,dx\,w(y)\,g(y)\,dy =$$

$$= \sup_{\|fw/\sigma(n,\theta,\delta)\|_1\le 1} \sup_{\|g\|_\infty\le 1} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{g(y)w(y)}{p(y)} K_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)\,p(y)\,dy\,p(x)f(x)\,dx.$$

Обозначая частное $\dfrac{g(y)w(y)}{p(y)}$ через $G(y)$, получаем

$$D_{n,1,\theta,\delta}^{\alpha,\beta,A,B} = \sup_{\|fw/\sigma(n,\theta,\delta)\|_1\le 1} \sup_{\|g\|_\infty\le 1} \int_{-1}^{1} S_n^{\alpha,\beta}(G,x)f(x)p(x)dx =$$

$$= \sup_{\|Gp/w\|_\infty\le 1} \sup_{\|fw/\sigma(n,\theta,\delta)\|_1\le 1} \int_{-1}^{1} S_n^{\alpha,\beta}(G,x)\frac{f(x)w(x)}{\sigma(n,\theta,\delta,x)}\frac{\sigma(n,\theta,\delta,x)p(x)}{w(x)}dx =$$

$$= \sup_{\|Gp/w\|_\infty\le 1} \sup_{-1\le x\le 1} S_n^{\alpha,\beta}(G,x)\frac{\sigma(n,\theta,\delta,x)p(x)}{w(x)} =$$

$$= \sup_{-1\le x\le 1} \frac{\sigma(n,\theta,\delta,x)p(x)}{w(x)} \sup_{\|Gp/w\|_\infty\le 1} S_n^{\alpha,\beta}(G,x) =$$

$$= \sup_{-1\le x\le 1} \frac{\sigma(n,\theta,\delta,x)p(x)}{w(x)} \sup_{\|Gp/w\|_\infty\le 1} \int_{-1}^{1} G(y)K_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)p(y)dy =$$

$$= \sup_{-1\le x\le 1} \frac{\sigma(n,\theta,\delta,x)p(x)}{w(x)} \sup_{\|Gp/w\|_\infty \le 1} \int_{-1}^{1} \frac{G(y)p(y)}{w(y)} K_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)w(y)dy =$$

$$= \sup_{-1\le x\le 1} \frac{\sigma(n,\theta,\delta,x)p(x)}{w(x)} \int_{-1}^{1} \left| K_n^{(\alpha,\beta)}(x,y) \right| w(y)\,dy .$$

Теорема доказана.

Пусть $\mu = -\alpha + 2A + 1/2 \ge 0$, $\nu = -\beta + 2B + 1/2 \ge 0$.

Теорема 2. *Если* $\theta \ge \mu$, $\delta \ge \nu$, *то*

$$\frac{\sigma(n,\theta,\delta,x)p(x)}{w(x)} \int_{-1}^{1} \left| K_n^{(\alpha,\beta)}(x,y) \right| w(y)dy \le C_{\theta,\delta} \ln n .^{*}$$

Доказательство. Благодаря равенству (1) достаточно рассмотреть случай $x \in (0,1)$. Интеграл $\int_{-1}^{1} \left| K_n^{(\alpha,\beta)}(x,y) \right| w(y)\,dy$ представим в виде суммы четырех интегралов:

$$\left(\int_{-1}^{-1/2} + \int_{-1/2}^{x-1/n^2} + \int_{x-1/n^2}^{x+1/n^2} + \int_{x+1/n^2}^{1} \right) \left| K_n^{(\alpha,\beta)}(x,y) \right| w(y)\,dy = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 .$$

Оценим каждый из них. В силу представления (4), неравенства $(x-y)^{-1} < 2$ и оценки (2) для $x \in (0,1)$ и $y \in (-1,-1/2)$ получаем

$$\left| K_n^{(\alpha,\beta)}(x,y) \right| \le C(1 - x + 1/n^2)^{-\alpha/2-1/4}(1 + y + 1/n^2)^{-\beta/2-1/4} .$$

Следовательно,

$$J_1 < C(1 - x + 1/n^2)^{-\alpha/2-1/4} \int_{-1}^{-1/2} (1 + y + 1/n^2)^{-\beta/2-1/4}(1+y)^B dy .$$

Поскольку $-\beta/2 - 1/4 + B = \nu/2 - 1/2 \ge -1/2$, интеграл справа существует и ограничен. В то же время

$$\frac{\sigma(n,\theta,\delta,x)p(x)}{w(x)} \le C(1 - x + 1/n^2)^{\alpha-A}(1 - x + 1/n^2)^{\theta/2} .$$

Поэтому

---

[*] Через $C_{\theta,\delta}$, $C_{r,\gamma}$, C_r обозначены величины, зависящие от указанных параметров, а через C, L — абсолютные константы. Эти величины различны в разных формулах.

$$\frac{\sigma(n,\theta,\delta,x)p(x)}{w(x)} J_1 \le C\left(1-x+1/n^2\right)^{\alpha-A+\theta/2}\left(1-x+1/n^2\right)^{-\alpha/2-1/4}.$$

Так как показатель степени положителен

$$\alpha - A + \theta/2 - \alpha/2 - 1/4 \ge \alpha/2 - A - \alpha/2 + 1/4 + A - 1/4 = 0,$$

то

$$\frac{\sigma(n,\theta,\delta,x)p(x)}{w(x)} J_1 \le C. \tag{7}$$

Представляя $K_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)$ в виде (5) и используя оценку (2), имеем

$$J_2 \le C\left(1-x+1/n^2\right)^{-\alpha/2-1/4} \int_{-1/2}^{x-1/n^2} \frac{1}{x-y}(1-y)^{-\alpha/2-3/4}(1-y)^{1+A}dy +$$

$$+ C\left(1-x+1/n^2\right)^{-\alpha/2-3/4}(1-x) \int_{-1/2}^{x-1/n^2} \frac{1}{x-y}(1-y)^{-\alpha/2-1/4}(1-y)^{A}dy \le$$

$$\le C\left(1-x+1/n^2\right)^{-\alpha/2-1/4} \int_{-1/2}^{x-1/n^2} \frac{1}{x-y}(1-y)^{-\alpha/2+1/4+A}dy +$$

$$+ \left(1-x+1/n^2\right)^{-\alpha/2+1/4} \int_{-1/2}^{x-1/n^2} \frac{1}{x-y}(1-y)^{-\alpha/2-1/4+A}dy.$$

В силу условия $-\alpha/2+1/4+A \ge 0$ интеграл в первом слагаемом не превышает $2\ln n$, а во втором — $2\ln n$, если $-\alpha/2-1/4+A \ge 0$, и $2\left(1-x+1/n^2\right)^{-\alpha/2-1/4+A}\ln n$, если $-\alpha/2-1/4+A<0$, так как $1-y \ge 1-x+1/n^2$. Поэтому

$$J_2 \le C\left(1-x+1/n^2\right)^{-\alpha/2-1/4}\ln n +$$

$$+ C\begin{cases}\left(1-x+1/n^2\right)^{-\alpha/2+1/4}\ln n, & \text{если } -\alpha/2-1/4+A \ge 0,\\ \left(1-x+1/n^2\right)^{-\alpha+A}\ln n, & \text{если } -\alpha/2-1/4+A<0.\end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{\sigma(n,\theta,\delta,x)p(x)}{w(x)} J_2 \le C\left(1-x+1/n^2\right)^{\alpha-A+\theta/2} J_2 <$$

$$< C\left(1-x+1/n^2\right)^{\alpha/2-A-1/4+\theta/2}\ln n +$$

$$+\begin{cases}(1-x+1/n^2)^{\alpha/2-A+1/4+\theta/2}\ln n, & \text{если } -\alpha-1/4+A\ge 0,\\ (1-x+1/n^2)^{\theta/2}\ln n, & \text{если } -\alpha-1/4+A<0.\end{cases}$$

В силу условий, которым удовлетворяет θ, $\alpha/2-A-1/4+\theta/2\ge 0$. Следовательно,

$$\frac{\sigma(n,\theta,\delta,x)p(x)}{w(x)}J_2 \;\le\; C\ln n\,. \tag{8}$$

Прежде чем перейти к оценке оставшихся интегралов, заметим, что если $1\ge x\ge 1-2/n^2$, то

$$J_3+J_4 \;\le\; \int\limits_{1-3/n^2}^{1}\left|K_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)\right|w(y)dy \;=\; J_0\,.$$

Оценим интеграл J_0. Для этого воспользуемся представлением (3) для ядра $K_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)$ и неравенством (2):

$$\left|K_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)\right| \;\le\; Cn^{\alpha+3/2}(1-y+1/n^2)^{-\alpha/2-1/4}\,,$$

$$J_0 \;\le\; Cn^{\alpha+3/2}\int\limits_{1-3/n^2}^{1}(1-y+1/n^2)^{-\alpha/2-1/4}(1-y)^A dy \;\le$$

$$\le Cn^{\alpha+3/2}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{-\alpha/2+3/4+A} \;=\; Cn^{2\alpha-2A}\,.$$

Поскольку для $1>x>1-2/n^2$ функция $\dfrac{p(x)}{w(x)} \;\le\; Cn^{2A-2\alpha}$, то и в этом случае

$$\frac{\sigma(n,\theta,\delta,x)p(x)}{w(x)}J_0 \;\le\; C\sigma(n,\theta,\delta,x) \;\le\; C\,. \tag{9}$$

Оценим J_3 при $0\le x\le 1-2/n^2$. Воспользуемся представлением (3) для ядра $K_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)$ и неравенством (2):

$$\left|K_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)\right| \;\le\; Cn(1-x)^{-\alpha/2-1/4}(1-y+1/n^2)^{-\alpha/2-1/4}\,,$$

$$J_3 \;\le\; Cn(1-x)^{-\alpha/2-1/4}\int\limits_{x-1/n^2}^{x+1/n^2}(1-y+1/n^2)^{-\alpha/2-1/4}(1-y)^A dy\,. \tag{10}$$

Из условия $0\le x\le 1-2/n^2$ и неравенств $x-1/n^2\le y\le x+1/n^2$ следуют оценки

$$(1-y)^A \le \begin{cases} (1-x+1/n^2)^A \le 2^A(1-x)^A, & \text{если } A \ge 0, \\ (1-x-1/n^2)^A \le 2^{-A}(1-x)^A, & \text{если } A < 0, \end{cases} \tag{11}$$

$$(1-y+1/n^2)^{-\alpha/2} \le \begin{cases} 2^{-\alpha/2}(1-x)^{-\alpha/2}, & \text{если } \alpha \le 0, \\ (1-x)^{-\alpha/2}, & \text{если } \alpha > 0. \end{cases} \tag{12}$$

Аналогично, так как $1-x \ge 1-y-1/n^2$, то

$$(1-x)^{-1/4} \le (1-y-1/n^2)^{-1/4}. \tag{13}$$

Из неравенств (10) – (13) получаем

$$J_3 \le Cn(1-x)^{-\alpha+A}\int_{x-1/n^2}^{x+1/n^2}(1-y-1/n^2)^{-1/2}dy \le C(1-x)^{-\alpha+A}.$$

Следовательно,

$$\frac{\sigma(n,\theta,\delta,x)p(x)}{w(x)}J_3 \le C\sigma(n,\theta,\delta,x) \le C. \tag{14}$$

Оценим J_4 для $0 \le x \le 1-2/n^2$. Для этого снова воспользуемся представлением (5) для ядра $K_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)$ и неравенством (2):

$$J_4 \le (1-x+1/n^2)^{-\alpha/2-1/4}\int_{x+1/n^2}^{1}\frac{1}{y-x}(1-y)^{-\alpha/2-3/4}(1-y)^{1+A}dy +$$

$$+ (1-x+1/n^2)^{-\alpha/2-3/4}(1-x)\int_{x+1/n^2}^{1}\frac{1}{y-x}(1-y)^{-\alpha/2-1/4}(1-y)^A dy \le$$

$$\le (1-x+1/n^2)^{-\alpha/2-1/4}\int_{x+1/n^2}^{1}\frac{1}{y-x}(1-y)^{-\alpha/2+1/4+A}dy +$$

$$+ (1-x+1/n^2)^{-\alpha/2-3/4}(1-x)\int_{x+1/n^2}^{1}\frac{1}{y-x}(1-y)^{-\alpha/2-1/4+A}dy. \tag{15}$$

Поскольку $-\alpha/2+A+1/4 \ge 0$, то интеграл в первом слагаемом не превышает $C\ln n$. Тогда произведение первого слагаемого на $\dfrac{\sigma(n,\theta,\delta,x)p(x)}{w(x)}$ меньше

$$C(1-x+1/n^2)^{-\alpha/2-1/4}(1-x)^{\alpha-A}(1-x+1/n^2)^{-\alpha/2+1/4+A}\ln n \;\le\; C\ln n\,. \qquad (16)$$

Интеграл во втором слагаемом представим в виде

$$I \;=\; \int\limits_{x+1/n^2}^{1}\frac{(1-y)^{-\alpha/2-1/4+A}}{y-x}\,dy \;=\; \left(\;\int\limits_{x+1/n^2}^{(1+x)/2}+\int\limits_{(1+x)/2}^{1}\right)\frac{(1-y)^{-\alpha/2-1/4+A}}{y-x}\,dy \;=\; I_1+I_2\,.$$

Если $-\alpha/2-1/4+A\ge 0$, то в силу неравенства $1-y<1-x$ интеграл I_1 не превышает

$$I_1 \;\le\; (1-x)^{-\alpha/2-1/4+A}\int\limits_{x+1/n^2}^{(1+x)/2}\frac{dy}{y-x} \;\le\; C(1-x)^{-\alpha/2-1/4+A}\ln n\,. \qquad (17)$$

В случае $-\alpha/2-1/4+A<0$, используя неравенство $1-y>(1-x)/2$, получаем аналогичную оценку для I_1. Інтеграл I_2 оценим, воспользовавшись неравенством $y-x>(1-x)/2$:

$$I_2 \;\le\; 2(1-x)^{-1}\int\limits_{(1+x)/2}^{1}(1-y)^{-\alpha/2-1/4+A}dy \;\le\; C(1-x)^{-\alpha/2-1/4+A}\,. \qquad (18)$$

Из (17), (18) получаем

$$\frac{\sigma(n,\theta,\delta,x)p(x)}{w(x)}(1-x+1/n^2)^{-\alpha/2-3/4}(1-x)I \;\le$$

$$\le C(1-x)^{\alpha-A}(1-x+1/n^2)^{-\alpha/2-3/4+\theta/2}(1-x)^{-\alpha/2+3/4+A}\ln n \;\le\; C\ln n\,. \qquad (19)$$

Соотношения (15), (16), (18) влекут оценку

$$\frac{\sigma(n,\theta,\delta,x)p(x)}{w(x)}J_4 \;\le\; C\ln n\,. \qquad (20)$$

Из неравенств (7), (8), (14), (20) следует утверждение теоремы 2.

Пусть $H_1^{r+\gamma}$ — класс функций, заданных на отрезке $[-1,1]$, r-я производная которых интегрируема и удовлетворяет условию

$$\int\limits_{-1}^{1-h}\left|f^{(r)}(x+h)-f^{(r)}(x)\right|dx \;\le\; Lh^{\gamma}\,, \qquad 1\ge h>0\,, \qquad 0<\gamma\le 1\,, \qquad L>0\,.$$

Теорема 3 [12]. *Для любой функции* $f\in H_1^{r+\gamma}$ *существует последовательность алгебраических многочленов* $P_n(x)$ *степени не выше* $n\ge 2$ *таких, что*

$$\left\| \frac{f(x)-P_n(x)}{\left(\sqrt{1-x^2}+1/n\right)^{r+\gamma}} \right\|_1 \le \frac{C_r \ln n}{n^{r+\gamma}}. \tag{21}$$

Если при этом под знаком нормы заменить $r+\gamma$ *на меньшее число, то в правой части неравенства* (21) $\ln n$ *можно опустить.*

Теорема 4 [13]. *Пусть выполняются условия теоремы* 3. *Тогда многочлены* $P_n(x)$ *можно выбрать так, что в знаменателе дроби, содержащейся в левой части неравенства* (21), *слагаемое* $1/n$ *можно опустить.*

Теорема 5. *Пусть* $\alpha=\beta$, $A=B$, $\theta=\delta\ge-\alpha+2A+1/2$ *и* $f\in H_1^{r+\gamma}$, *где* $r+\gamma\ge-2A$ *при* $A<0$. *Тогда имеют место неравенства*

$$\left\| f-S_n^{(\alpha,\alpha)} \right\|_{1,A,A} \le \begin{cases} C_{r,\gamma}\dfrac{\ln n}{n^{r+\gamma}}, & r+\gamma>\theta-2A, \\ C_r\dfrac{\ln^2 n}{n^{r+\gamma}}, & r+\gamma=\theta-2A, \\ \dfrac{C_{r,\gamma}\ln^2 n}{n^{2(r+\gamma)-\theta+2A}}, & \theta/2-A<r+\gamma<\theta-2A. \end{cases}$$

Доказательство. Оценим $\left\| f-S_n^{(\alpha,\alpha)} \right\|_{1,A,A}$, использовав теоремы 3, 4.

Пусть $P_n(x)$ — последовательность алгебраических многочленов, для которых имеет место неравенство (20). Тогда, используя (6), получаем

$$\left\| f-S_n^{(\alpha,\alpha)} \right\|_{1,A,A} \le \| f-P_n \|_{1,A,A} + D_{n,1,\theta,\theta}^{\alpha,\alpha,A,A} \left\| \frac{f-P_n}{\sigma(n,\theta,\theta)} \right\|_{1,A,A}. \tag{22}$$

Если $A\ge 0$, то в силу (21)

$$\| f-P_n \|_{1,A,A} \le \| f-P_n \|_1 \le \frac{C_r}{n^{r+\gamma}}.$$

Благодаря условию $r+\gamma\ge-2A$ при $A<0$ и теореме 4 имеем

$$\| f-P_n \|_{1,A,A} \le \left\| \frac{f-P_n}{(1-x^2)^A} \right\|_1 \le \begin{cases} C_{r,\gamma}/n^{r+\gamma}, & r+\gamma>-2A, \\ C_r \ln n/n^{r+\gamma}, & r+\gamma=-2A. \end{cases} \tag{23}$$

Оценим сначала второе слагаемое в (22) для $A\ge 0$. В силу теорем 1 – 3

$$D_{n,1,\theta,\theta}^{\alpha,\alpha,A,A}\left\|\frac{f-P_n}{\sigma(n,\theta,\theta)}\right\|_{1,A,A} \le C_{\theta,\theta}\ln n\left\|\frac{(f(x)-P_n(x))(1-x^2)^A}{\left(\sqrt{1-x^2}+1/n\right)^{\theta}}\right\|_1 \le$$

$$\le C_{\theta,\theta}\ln n\left\|\frac{f(x)-P_n(x)}{\left(\sqrt{1-x^2}+1/n\right)^{\theta-2A}}\right\|_1 \le \begin{cases} C_{r,\gamma}\dfrac{\ln n}{n^{r+\gamma}}, & r+\gamma>\theta-2A, \\ C_r\dfrac{\ln^2 n}{n^{r+\gamma}}, & r+\gamma=\theta-2A, \\ \dfrac{C_{r,\gamma}\ln^2 n}{n^{2(r+\gamma)-\theta+2A}}, & \theta/2-A<r+\gamma<\theta-2A. \end{cases} \tag{24}$$

Случай $A<0$ аналогичен, только вместо теоремы 3 необходимо применить теорему 4. Из неравенств (22) – (24) следует теорема 5.

1. *Muckehoupt B.* Mean convergence of Jacobi series // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – **23**, № 2. – P. 306 –310.
2. *Сеге Г.* Ортогональные ряды. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 500 с.
3. *Агаханов С. А., Натансон Г. И.* Функции Лебега сумм Фурье – Якоби // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат. – 1968. – **1**, № 1. – С. 11 – 23.
4. *Бадков В. М.* Оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье – Якоби // Сиб. мат. журн. – 1968. – **9**, № 6. – С. 1264 – 1283.
5. *Моторный В. П.* О сходимости в среднем рядов Фурье по многочленам Лежандра // Докл. АН СССР. – 1972. – **204**, № 4. – С. 788 –790.
6. *Моторный В. П.* О сходимости в среднем рядов Фурье по многочленам Лежандра // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1973. – **37**, № 1. – С. 135 – 147.
7. *Гончаров С. В., Моторный В. П.* Оценки обобщенных констант Лебега частных сумм Фурье – Якоби // Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту. Математика. – 2007. – Вип. 12. – С. 70 – 83.
8. *Гончаров С. В., Моторный В. П.* О сходимости рядов Фурье – Якоби в среднем // Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту. Математика. – 2008. – Вип. 13. – С. 49 – 55.
9. *Моторная О. В., Моторный В. П.* Свойства обобщенных констант Лебега частных сумм Фурье – Якоби // Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту. Математика. – 2009. – Вип. 14. – С. 91 – 98.
10. *Моторный В. П., Гончаров С. В., Нитиема П. К.* О сходимости в среднем рядов Фурье – Якоби // Доп. НАН України. – 2010. – № 3. – С. 35 – 40.
11. *Моторный В. П., Гончаров С. В., Нитиема П. К.* О сходимости в среднем рядов Фурье – Якоби // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 6. – С. 814 – 828.
12. *Моторный В. П.* Приближение функций алгебраическими многочленами в метрике L_p // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1971. – **35**, № 4. – С. 874 – 899.
13. *Ходак Л. Б.* Сходимость рядов Фурье по многочленам Якоби в среднем // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 8. – С. 28 – 31.

Получено 03.06.13