УДК 512.552.12

Б. В. Забавський (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка)

ЧІТКА ОБЛАСТЬ БЕЗУ Є КІЛЬЦЕМ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ

We prove that a sharp Bezout domain is an elementary divisor ring.

Доказано, что коммутативная четкая область Безу является кольцом элементарных делителей.

У даній статті всі кільця будемо вважати комутативними з одиницею, відмінною від нуля. Нехай R — область цілісності та K — її поле дробів. Під *надкільцем* кільця R будемо розуміти довільну область цілісності, що лежить між R та K. *Кільцем дробів* області R будемо називати надкільце області цілісності R вигляду R_S, де S — деяка мультиплікативно замкнена множина з $R \setminus \{0\}$. Скажемо, що R_S є *первинним кільцем дробів* області R, якщо $S = R \setminus P$ для деякого власного простого ідеалу P кільця R, та, використавши позначення з [7, с. 228], в цьому випадку будемо писати $R_P = R_S$. Також через $\operatorname{mspec} R$ будемо позначати множину всіх максимальних ідеалів області цілісності R.

В [1] Гілмером було введено поняття чіткої області за допомогою „властивості $(\#)$”. Будемо казати, що R має *властивість* $(\#)$, якщо для довільних двох різних підмножин M і N із $\operatorname{mspec} R$ виконується

$$\bigcap_{P\in M} R_P \neq \bigcap_{P\in N} R_P.$$

Будемо говорити, що R має *QR-властивість*, якщо кожне надкільце області R є деяким кільцем дробів для R [2]. Якщо кожен скінченнопороджений ідеал області R є головним, то таку область називатимемо *областю Безу* . Наступний результат характеризує області Безу з властивістю $(\#)$.

Теорема 1 [2]. *Для області Безу R вказані властивості є рівносильними*:

1) *R має властивість* $(\#)$;

2) *для кожного $M \in \operatorname{mspec} R$ існує такий головний ідеал aR, що M є єдиним максимальним ідеалом, що містить ідеал aR.*

Очевидно [1], що довільна область Безу із скінченним числом максимальних ідеалів має властивість $(\#)$. Розглянемо питання про те, коли кожне надкільце області R також має властивість $(\#)$.

Скажемо, що область R є *чіткою*, якщо кожне її надкільце має властивість $(\#)$. Наступний результат характеризує чіткі області Безу.

Теорема 2 [2]. *Наведені нижче властивості області R є рівносильними*:

1) *R є чіткою областю Безу*;

2) *для кожного простого ідеалу P в R існує такий головний ідеал $aR \subseteq P$, що кожен максимальний ідеал, який містить aR, містить і P.*

Ненульовий елемент a області R назвемо *адекватним*, якщо для кожного елемента $b \in R$ знайдуться такі елементи $r, s \in R$, що:

1) $a = rs$,

2) $rR + bR = R$,

3) для довільного $s' \in R$ з того, що $sR \subset s'R \neq R$, випливає, що $s'R + bR$ є власним ідеалом.

Будемо казати, що область Безу є *адекватним кільцем*, якщо кожен її ненульовий елемент є адекватним [4].

Теорема 3. *Множина всіх адекватних елементів комутативної області Безу є насиченою мультиплікативно замкненою множиною.*

Доведення. Нехай a та d — адекватні елементи комутативної області Безу R. Покажемо, що добуток ad є теж адекватним елементом.

Нехай k — довільний елемент із R. Тоді знайдуться такі елементи $r, m, t, l \in R$, що

$$a = rm, \quad d = tl,$$

де $rR + kR = R$, $tR + kR = R$, та для довільних елементів m', l' з того, що $mR \subset m'R \neq R$, $lR \subset l'R \neq R$, випливає $m'R + kR \neq R$, $l'R + kR \neq R$.

Таким чином, $rtR + kR = R$ та для довільного $n' \in R$ з того, що $mlR \subset n'R \neq R$, маємо

$$n'R + kR \subseteq (mR + kR)(lR + kR) \neq R.$$

Тому $n'R + kR \neq R$. Отже, ad є адекватним елементом в R.

Тепер доведемо, що множина адекватних елементів є ще й насиченою. Нехай a — адекватний елемент із R та $a = dx$ для деяких елементів $x \in R$, $d \in R$. Розглянемо довільний елемент $c \in R$. Згідно з означенням елемента a існують такі елементи $r, s \in R$, що $a = rs$, причому $rR + cR = R$, та якщо $sR \subset s'R \neq R$, то $s'R + cR \neq R$.

Нехай $dR + rR = hR$. Тоді для деяких елементів $d_0, s_0 \in R$ справджуються такі рівності:

$$d = hd_0, \quad r = hr_0, \quad d_0R + r_0R = R.$$

З цього випливає, що $d_0u + r_0v = 1$ для деяких елементів $u, v \in R$. Тоді $a = hd_0x = hr_0s$. Звідси $d_0x = r_0s$ та $sd_0u + sr_0v = s$. Таким чином, ми переконалися, що $d_0(su + xv) = s$, тобто має місце включення $sR \subset d_0R$. Якщо $d_0R \subseteq d_0'R \neq R$, то d_0 можна використати в якості s' та $d_0R + cR \neq R$. Враховуючи, що $R = rR + cR \subset hR + cR$, бачимо, що розклад $d = d_0h$ задовольняє всі умови означення адекватного елемента.

Теорему доведено.

Дотримуючись Капланського [3], назвемо кільце R кільцем елементарних дільників, якщо кожна матриця над R є еквівалентною діагональній матриці.

Нехай R — область Безу. Позначимо через $S = S(R)$ множину всіх її адекватних елементів. Оскільки $1 \in R$, то множина S є непорожньою. Оскільки S — насичена мультиплікативна замкнена множина, то можна розглянути локалізацію R за множиною S (знаменники дробів будуть елементами з S), тобто кільце дробів R_S.

Теорема 4. *Область Безу є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли R_S є кільцем елементарних дільників.*

Доведення. Згідно з [4], достатньо довести твердження у випадку матриць

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix},$$

де $aR+bR+cR=R$. Припустимо, що R_S — кільце елементарних дільників. Тоді для елементів $a,b,c\in R_S\cap R$ можемо знайти такі елементи ps^{-1}, $qs^{-1}\in R_S$, $s\in S$, що

$$(aps^{-1}+bqs^{-1})R_S+cqs^{-1}R_S=R_S.$$

Тепер знайдуться такі елементи $r,t,k,l\in R$, що

$$(ak+bl)k+clt=s.$$

Отже, для матриці A існує еквівалентна матриця B вигляду

$$B=\begin{pmatrix} z & 0\\ x & y\end{pmatrix},$$

де z є дільником s та $z\in S$, згідно з теоремою 3, а також $xR+yR+zR=R$.

Оскільки z — адекватний елемент, то неважно переконатись, що матриця B має діагональну редукцію. Справді, згідно з тим, що елемент z є адекватним, існують такі елементи $r,s\in R$, що $z=rs$, де $rR+yR=R$ та $s'R+yR\neq R$ для довільного незворотного дільника s' елемента $s\in R$. Покажемо, що $(y+rx)R+rzR=R$. Від супротивного, якщо $(y+rx)R+rzR=hR\neq R$, то $rzR\subset hR$. Якщо $hR+rR=\delta R\neq R$, то $(y+rx)R\subset\delta R$, а отже, $yR\subset\delta R$, що неможливо, бо $rR\subset\delta R$ та $rR+yR=R$.

Тому $sR\subset hR$. Звідси, згідно з означенням s, маємо $hR+yR=\delta R\neq R$. Тоді $(z+rx)R\subset$ $\subset\delta R$ та $zR\subset\delta R$. Оскільки $\delta R+rR=rR$, то $xR\subset\delta R$, що є неможливим, бо $xR+yR+zR=R$ та $\delta R\neq R$. Тоді

$$\begin{pmatrix} z & 0\\ x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} zr & z\\ xr+y & x\end{pmatrix}=C.$$

Оскільки $rzR+(xr+y)R=R$ та R є областю Безу, то матриця C, а отже, і матриця B мають діагональну редукцію. Таким чином, R є кільцем елементарних дільників.

Навпаки, припустимо, що R — кільце елементарних дільників. Необхідно показати, що R_S також є кільцем елементарних дільників. Нехай маємо довільні елементи as^{-1}, bs^{-1}, cs^{-1} із R_S, причому

$$as^{-1}R_S+bs^{-1}R_S+cs^{-1}R_S=R_S.$$

Тоді $aR+bR+cR=dR$ для деякого елемента $d\in S$. Нехай $a=a_1d$, $b=b_1d$, $c=c_1d$ для деяких елементів $a_1,b_1,c_1\in R$ таких, що $a_1R+b_1R+c_1R=R$. Оскільки R є кільцем елементарних дільників [3], то існують такі елементи $u,v,p,q\in R$, що

$$(a_1p+b_1q)u+c_1qv=1.$$

Тоді

$$(aps^{-1}+bqs^{-1})R_S+cqs^{-1}R_S=R_S.$$

Згідно з [3, 4], R_S є кільцем елементарних дільників.

Теорему доведено.

Нехай R — комутатативна область Безу та $S = S(R)$ — множина всіх її адекватних елементів. Оскільки $S = S(R)$ є насиченою мультиплікативно замкненою множиною, то побудуємо за трансфінітною індукцією ланцюг

$$\{R^\alpha \mid \alpha - \text{ординал}\}$$

насичених мультиплікативно замкнених множин в області R таким чином. Покладемо $R^0 = S(R)$. Нехай α — ненульовий ординал та припустимо, що R^β — вже побудовані та насичені мультиплікативно замкнені множини в R для $\beta < \alpha$ та $K_\beta = R_{R^\beta}$. Тоді K_β — область Безу і $S(K_\beta)$ — насичена мультиплікативна замкнена множина згідно з теоремою 3. Визначимо R^α як $R^\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} R^\beta$, якщо α — граничний ординал, $R^\alpha = S(K_{\alpha-1}) \cap R$, якщо α не є граничним ординалом. Очевидно, що R^α є насиченою мультиплікативно замкненою множиною. Якщо α, β — такі ординали, що $\alpha \leq \beta$, то $R^\alpha \subset R^\beta \subset R$. Крім того, $R^\alpha = R^{\alpha+1}$ для деякого ординалу α. У випадку, коли $R^\alpha = R^{\alpha+1}$, для кожного ординалу α маємо

$$\operatorname{card}(R^\alpha) > \operatorname{card}(\alpha)$$

для кожного ординалу α. Вибираючи β так, що $\operatorname{card}(\beta) > \operatorname{card}(R)$ отримуємо

$$\operatorname{card}(\beta) > \operatorname{card}(R) > \operatorname{card}(R^\beta),$$

що є суперечністю. Нехай тепер α_0 — найменший ординал з властивістю $R^{\alpha_0} = R^{\alpha_0+1}$. Скажемо, що

$$\{R^\alpha \mid 0 \leq \alpha \leq \alpha_0\}$$

є *правим D-ланцюгом* в R. У даному випадку R^{-1} буде позначати групу одиниць кільця R.

З огляду на теорему 4, використовуючи D-ланцюг області Безу, робимо висновок, що питання про те, чи є комутативна область Безу кільцем елементарних дільників, еквівалентне випадку області із тривіальними адекватними елементами.

Теорема 5. *Чітка область Безу R є областю елементарних дільників.*

Доведення. Нехай R — чітка область Безу та $M \in \operatorname{mspec} R$. Згідно з теоремою 1, існує такий головний ідеал aR, що M — єдиний максимальний ідеал, що містить ідеал aR. Нехай $b \in R$. Якщо $b \notin M$, то $aR + bR = R$. Якщо $b \in M$, то $a = 1a$ та для кожного $s = a$ з того, що $aR \subset s'R$, маємо $s'R + bR \neq R$. Тоді a — адекватний елемент в R. Оскільки у чіткій області Безу існує нетривіальний D-ланцюг та область Безу має QR-властивість [2], можемо зробити висновок, що R є областю елементарних дільників.

Теорему доведено.

Теорема 6. *Чітка область Безу R є адекватною областю тоді і лише тоді, коли кожен ненульовий простий ідеал в R міститься в єдиному максимальному ідеалі області R.*

Доведення. Згідно з [5], чітка область Безу, де кожен ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному, є напівлокальною областю Безу та, згідно з [4], адекватною областю. Оскільки кожен ненульовий простий ідеал адекватного кільця міститься в єдиному максимальному, то теорему доведено.

Розглянемо приклад, пов'язаний з наведеними вище результатами.

Приклад. Символом $\mathbb{Z}$ позначатимемо кільце цілих чисел, а символом $\mathbb{Q}$ — поле раціональних чисел. Нехай $K = \mathbb{Q}[[x]]$ є кільцем формальних степеневих рядів від однієї змінної x над $\mathbb{Q}$. Якщо позначити R як підмножину всіх формальних степеневих рядів від однієї змінної з K із цілим вільним членом, то R буде двовимірною чіткою областю Безу [2] з нетривіальним D-ланцюгом.

В [2, с. 300] наведено приклад області Безу D, яка має лише скінченну кількість мінімальних ідеалів над кожним головним ідеалом, але не має властивості $(\#)$.

Це приклад області Безу [6], яка є областю елементарних дільників, але не має властивості $(\#)$.

1. *Gilmer R.* Overrings of Prufer domains // J. Algebra. – 1966. – **4**. – P. 331 – 340.
2. *Gilmer R., Heinzer W.* Overrings of Prufer domains II // J. Algebra. – 1967. – **7**. – P. 281 – 302.
3. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66**. – P. 464 – 491.
4. *Larsen M., Levis W., Shores T.* Elementary divisor rings and finitely presented modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – **187**, № 1. – P. 231 – 248.
5. *Olberding B.* Globalizing local properties of Prufer domains // J. Algebra. – 1998. – **20**. – P. 480 – 504.
6. *Zabavsky B.* Fractionally regular Bezout ring // Mat. Stud. – 2009. – **32**. – P. 70 – 80.
7. *Zariski O., Samuel P.* Commutative algebra. – Princeton, New Jersey: Van Nostrand, 1958. – Vol. 1.

Одержано 18.02.13