УДК 517.5

С. Б. Вакарчук (Днепропетр. ун-т им. А. Нобеля)

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ДЖЕКСОНА ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ НА ВСЕЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ И ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СРЕДНИХ ν-ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_2(\mathbb{R})$

The exact values of constants for the Jackson-type inequalities are obtained in the space $L_2(\mathbb{R})$ for the special moduli of continuity of the k^{th} order defined by the Steklov operator $S_h(f)$ instead of the translation operator $T_h(f)$ in the case of approximation by entire functions of exponential type $\sigma \in (0, \infty)$. The exact values of the mean ν-widths (linear, Bernshtein, and Kolmogorov) are also obtained for the classes of functions defined by the indicated characteristics of smoothness.

У випадку апроксимації у просторі $L_2(\mathbb{R})$ цілими функціями експоненціального типу $\sigma \in (0, \infty)$ знайдено точні значення констант у нерівностях типу Джексона для спеціальних модулів неперервності k-го порядку, в яких замість оператора зсуву $T_h(f)$ використано оператор Стєклова $S_h(f)$. Для класів функцій, означених за допомогою вказаної характеристики гладкості, обчислено точні значення середніх ν-поперечників — лінійного, бернштейнівського, колмогоровського.

1. Начало исследованиям, связанным с аппроксимацией функций, заданных на всей вещественной оси, было положено в работах С. Н. Бернштейна (см., например, [1]). Средством приближения при этом служило пространство целых функций конечного экспоненциального типа. В дальнейшем исследования в указанном направлении были продолжены в работах Н. И. Ахиезера, А. Ф. Тимана, В. Ю. Попова, А. И. Степанца и других (см., например, [2 – 15]).

Несомненный интерес, с точки зрения автора, представляет тот факт, что многие окончательные в том или ином смысле результаты, полученные в случае полиномиальной аппроксимации 2π-периодических функций, нашли свое отражение и в случае приближения целыми функциями конечного экспоненциального типа на всей вещественной оси. Сравнительный анализ таких результатов, связанных с решением экстремальных задач теории аппроксимации функций, можно найти, например, в работах автора [16, 17]. Данная статья продолжает указанную тематику и посвящена распространению основных теорем из работ [18 – 20] на случай аппроксимации в среднем целыми функциями конечного экспоненциального типа на прямой $\mathbb{R} := \{x\colon -\infty < x < \infty\}$.

Предварительно напомним необходимые понятия и определения. Пусть $L_2(\mathbb{R})$ — пространство всех вещественных измеримых на $\mathbb{R}$ функций f, квадрат модуля которых интегрируем по Лебегу на любом конечном промежутке, а норма

$$\|f\| := \|f\|_{L_2(\mathbb{R})} = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} < \infty.$$

Под $L_2^r(\mathbb{R})$, где $r \in \mathbb{N}$, понимаем класс функций $f \in L_2(\mathbb{R})$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}$ $(f^{(0)} \equiv f)$ локально абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R})$. Отметим, что $L_2^r(\mathbb{R})$ является банаховым пространством с нормой $\|f\| + \|f^{(r)}\|$. Символом $\mathbb{B}_{\sigma,2}$, где $0 < \sigma < \infty$, обозначим сужение на $\mathbb{R}$ множества всех целых функций экспоненциального типа σ, принадлежащих пространству $L_2(\mathbb{R})$. Величину

$$\mathcal{A}_\sigma(f) := \inf\left\{\|f - g_\sigma\| \colon g_\sigma \in \mathbb{B}_{\sigma,2}\right\},$$

где $f \in L_2(\mathbb{R})$; $0 < \sigma < \infty$, называют наилучшим приближением функции f элементами подпространства $\mathbb{B}_{\sigma,2}$ в метрике пространства $L_2(\mathbb{R})$. Для класса $\mathfrak{M} \subset L_2(\mathbb{R})$ полагаем

$$\mathcal{A}_\sigma(\mathfrak{M}) := \sup\left\{\mathcal{A}_\sigma(f) \colon f \in \mathfrak{M}\right\}.$$

При решении некоторых задач теории аппроксимации функций действительного переменного часто используют различные модификации классического определения модуля непрерывности, когда вместо оператора сдвига $T_h f(x) := f(x+h)$ применяются различные усредняющие операторы. Один из таких подходов основан на использовании функции Стеклова S_h, $h > 0$ (см., например, [18 – 23]). Для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ записываем функцию Стеклова

$$S_h(f,x) := \frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h} f(\tau)d\tau,$$

положив при этом $S_{h,j}(f) := S_h(S_{h,j-1}(f))$, $j \in \mathbb{N}$ и $S_{h,0}(f) \equiv f$.

Обозначив через $\mathbb{I}$ единичный оператор в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, определим специальные конечные разности первого и высшего порядков в точке x с шагом h:

$$\widetilde{\Delta}_h^1(f,x) := S_h(f,x) - f(x) = (S_h - \mathbb{I})(f,x),$$

$$\widetilde{\Delta}_h^k(f,x) := \widetilde{\Delta}_h^1(\widetilde{\Delta}_h^{k-1}(f),x) = (S_h - \mathbb{I})^k(f,x) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}S_{h,j}(f,x), \qquad k = 2,3,\ldots\,.$$

Использовав указанные обозначения, рассмотрим специальный модуль непрерывности k-го порядка для функции $f \in L_2(\mathbb{R})$:

$$\widetilde{\Omega}_k(f,t) := \sup\left\{\left\|\widetilde{\Delta}_h^k(f)\right\| : 0 < h \leqslant t\right\}. \tag{1}$$

2. Для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ рассмотрим последовательность функций $\{\mathcal{F}_M(f)\}_{M\in\mathbb{N}}$ вида

$$\mathcal{F}_M(f,x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-M}^{M} f(t)e^{-ixt}dt.$$

В теории интеграла Фурье используется следующая фундаментальная теорема Планшереля (см., например, [24, с. 73]): *если $f \in L_2(\mathbb{R})$, то последовательность функций $\{\mathcal{F}_M(f)\}_{M\in\mathbb{N}}$ сходится в среднеквадратическом к некоторой функции $\mathcal{F}(f)$, интегрируемой в квадрате на всей вещественной оси $\mathbb{R}$, т. е.*

$$\lim_{M\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{F}_M(f,x) - \mathcal{F}(f,x)|^2dx = 0.$$

Функцию $\mathcal{F}(f)$ называют преобразованием Фурье функции f в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, где

$$\mathcal{F}(f,x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt. \tag{2}$$

При этом функция f может быть определена через ее преобразование Фурье следующим образом:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f,t)e^{ixt}dt. \tag{3}$$

Отметим, что в формулах (2), (3), называемых формулами обращения Фурье, интегралы понимаются сходящимися в среднеквадратическом. Также имеет место фундаментальная формула Парсеваля – Планшереля [24]

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(f,x)|^2 dx.$$

Поскольку в случае вещественной функции f модуль ее преобразования Фурье является четной функцией, отсюда имеем

$$\|f\|^2 = 2\int\limits_{0}^{\infty} |\mathcal{F}(f,x)|^2 dx. \tag{4}$$

Напомним (см., например, [2, с. 138]), что функцию Стеклова $S_h(f)$, где $f \in L_2(\mathbb{R})$, можно рассматривать как свертку функций f и g, где

$$g(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{2h}, & \text{если } -h \leqslant x \leqslant h, \\ 0, & \text{если } |x| > h, \end{cases}$$

т. е.

$$S_h(f,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(x-\tau)d\tau. \tag{5}$$

Всюду далее полагаем

$$\operatorname{sinc}(t) := \left\{ \frac{\sin t}{t}, \text{ если } t \neq 0; \;\; 1, \text{ если } t = 0 \right\}.$$

Поскольку преобразование Фурье функции g имеет вид

$$\mathcal{F}(g,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-h}^{h} \frac{1}{2h} e^{-ix\tau} d\tau = \frac{\operatorname{sinc}(hx)}{\sqrt{2\pi}}, \tag{6}$$

в силу теоремы о преобразовании Фурье свертки функций, для функции Стеклова (5) получаем

$$S_h(f,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(g,\tau)\mathcal{F}(f,\tau)e^{ix\tau}d\tau. \tag{7}$$

Из формул (3), (6) и (7) следует равенство

$$\mathcal{F}(S_h(f),x)=\sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}(g,x)\,\mathcal{F}(f,x)=\mathcal{F}(f,x)\,\mathrm{sinc}(hx). \tag{8}$$

Используя формулы (3) и (8), для функции Стеклова записываем

$$S_h(f,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}(f,\tau)\mathrm{sinc}(h\tau)e^{ix\tau}d\tau. \tag{9}$$

С учетом равенств (3) и (9) получаем

$$\widetilde{\Delta}_h^1(f,x)=S_h(f,x)-f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}(f,\tau)(\mathrm{sinc}(h\tau)-1)e^{ix\tau}d\tau. \tag{10}$$

Из формул (3) и (10) следует равенство

$$\mathcal{F}(\widetilde{\Delta}_h^1(f),x)=\mathcal{F}(f,x)(\mathrm{sinc}(hx)-1). \tag{11}$$

Для специальной конечной разности второго порядка в силу равенства (10) записываем

$$\widetilde{\Delta}_h^2(f,x)=\widetilde{\Delta}_h^1(\widetilde{\Delta}_h^1(f),x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}(\widetilde{\Delta}_h^1(f),\tau)(\mathrm{sinc}(h\tau)-1)e^{ix\tau}d\tau.$$

Отсюда с учетом формулы (11) имеем

$$\mathcal{F}(\widetilde{\Delta}_h^2(f),x)=\mathcal{F}(\widetilde{\Delta}_h^1(f),x)(\mathrm{sinc}(hx)-1)=\mathcal{F}(f,x)(\mathrm{sinc}(hx)-1)^2. \tag{12}$$

Используя метод математической индукции, нетрудно показать справедливость равенства

$$\mathcal{F}(\widetilde{\Delta}_h^k(f),x)=\mathcal{F}(f,x)(\mathrm{sinc}(hx)-1)^k \tag{13}$$

в общем случае $k\in\mathbb{N}$. Из формул (4) и (13) получаем

$$\|\widetilde{\Delta}_h^k(f)\|^2=2\int\limits_0^{\infty}|\mathcal{F}(\widetilde{\Delta}_h^k(f),\tau)|^2d\tau=2\int\limits_0^{\infty}|\mathcal{F}(f,\tau)|^2(1-\mathrm{sinc}(h\tau))^{2k}d\tau. \tag{14}$$

Тогда определение специального модуля непрерывности k-го порядка (1), с учетом равенства (14), примет вид

$$\widetilde{\Omega}_k(f,t)=\sup\left\{2\int\limits_0^{\infty}|\mathcal{F}(f,\tau)|^2(1-\mathrm{sinc}(h\tau))^{2k}d\tau\colon 0<h\leqslant t\right\}^{1/2}. \tag{15}$$

3. В работе автора [11] для произвольной функции $f\in L_2(\mathbb{R})$ рассматривалась характеристика гладкости

$$\Omega_m(f,t):=\left\{\frac{1}{t^m}\int\limits_0^t\ldots\int\limits_0^t\|\Delta_{\overline{h}}^m(f)\|^2dh_1\ldots dh_m\right\}^{1/2}, \tag{16}$$

где $m \in \mathbb{N}$, $0 < t < \infty$, $\overline{h} := (h_1, \ldots, h_m)$, $\Delta_{\overline{h}}^m := \Delta_{h_1}^1 \circ \ldots \circ \Delta_{h_m}^1$, $\Delta_{h_j}^1(f, t) := f(t + h_j) - f(t)$, $j = \overline{1, m}$, для которой справедливо представление

$$\Omega_m(f, t) = 2^{(m+1)/2} \left\{ \int\limits_0^\infty |\mathcal{F}(f, \tau)|^2 (1 - \mathrm{sinc}(t\tau))^m d\tau \right\}^{1/2}. \qquad (17)$$

Из формул (1) и (14)–(17) при $m := 2k$ для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ получаем следующее соотношение между характеристиками гладкости (1) и (16):

$$\Omega_{2k}(f, t) = 2^k \|\widetilde{\Delta}_t^k(f)\| \leqslant 2^k \widetilde{\Omega}_k(f, t). \qquad (18)$$

Известно (см., например, [25]), что если функция f и ее производная первого порядка $f^{(1)}$ принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R})$ и f является локально абсолютно непрерывной, то преобразование Фурье функции $f^{(1)}$ выражается через преобразование Фурье функции f по формуле

$$\mathcal{F}(f^{(1)}, x) = ix\mathcal{F}(f, x).$$

В случае, когда функция $f \in L_2^r(\mathbb{R})$, где $r \in \mathbb{N}$ и $r \geqslant 2$, согласно [26] (см. теорему 3 из § 4 гл. V) все ее промежуточные производные $f^{(r-\mu)}$, $\mu \in \mathbb{N}, 1 \leqslant \mu \leqslant r - 1$, также будут функциями, локально абсолютно непрерывными и принадлежащими пространству $L_2(\mathbb{R})$. При этом

$$\mathcal{F}(f^{(r-\mu)}, x) = (ix)^{(r-\mu)} \mathcal{F}(f, x), \qquad \mu = 0, \ldots, r - 1. \qquad (19)$$

В связи с указанным определенный интерес, по мнению автора, представляет изучение на классе $L_2^r(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$ и $r \geqslant 2$, поведения не только величины $\mathcal{A}_\sigma(f)$, но и величин $\mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)})$ — наилучших приближений подпространством $\mathbb{B}_{\sigma,2}$ промежуточных производных $f^{(r-\mu)}$, где $\mu \in \mathbb{N}$ и $1 \leqslant \mu \leqslant r - 1$.

Теорема 1. *Пусть* $0 < \sigma < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\mu = 0, \ldots, r$. *Тогда для произвольного числа* $0 < t \leqslant 3\pi/4$ *справедливо равенство*

$$\sup \left\{ \frac{\sigma^\mu \mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)})}{\widetilde{\Omega}_k(f^{(r)}, t/\sigma)} : f \in L_2^r(\mathbb{R}) \right\} = (1 - \mathrm{sinc}(t))^{-k}, \qquad (20)$$

где $L_2^0(\mathbb{R}) \equiv L_2(\mathbb{R})$; *при* $r = 0$ *верхняя грань в соотношении* (20) *вычисляется по всем функциям* $f \in L_2(\mathbb{R})$, *которые не эквивалентны нулю.*

Доказательство. Из теоремы 1, полученной автором в работе [11], следует, что для произвольной функции $f \in L_2^r(\mathbb{R})$ имеет место неравенство

$$\mathcal{A}_\sigma(f) \leqslant \{2(1 - \mathrm{sinc}(t))\}^{-m/2} \cdot \sigma^{-r} \Omega_m(f^{(r)}, t/\sigma),$$

где $m \in \mathbb{N}$ и $0 < t \leqslant 3\pi/4$. Отсюда, полагая $m := 2k$ и используя неравенство (18), получаем

$$\mathcal{A}_\sigma(f) \leqslant (1 - \mathrm{sinc}(t))^{-k} \cdot \sigma^{-r} \widetilde{\Omega}_k(f^{(r)}, t/\sigma). \qquad (21)$$

В случае $r = 0$ из формулы (21) имеем

$$\mathcal{A}_\sigma(f) \leqslant (1 - \mathrm{sinc}(t))^{-k} \widetilde{\Omega}_k(f, t/\sigma).$$

Заменяя в данном неравенстве функцию $f \in L_2^r(\mathbb{R}), r \in \mathbb{N}$, ее производной r-го порядка $f^{(r)} \in L_2(\mathbb{R})$, записываем

$$\mathcal{A}_\sigma(f^{(r)}) \leqslant (1 - \mathrm{sinc}(t))^{-k} \widetilde{\Omega}_k(f^{(r)}, t/\sigma). \tag{22}$$

Далее воспользуемся неравенством (см, например, [14])

$$\mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)}) \leqslant \mathcal{A}_\sigma^{1-\mu/r}(f^{(r)}) \mathcal{A}_\sigma^{\mu/r}(f). \tag{23}$$

Подставляя в правую часть неравенства (23) вместо $\mathcal{A}_\sigma(f^{(r)})$ и $\mathcal{A}_\sigma(f)$ соответствующие оценки сверху этих величин, полученные в неравенствах (22) и (21) соответственно, имеем

$$\mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)}) \leqslant (1 - \mathrm{sinc}(t))^{-k} \cdot \sigma^{-\mu} \widetilde{\Omega}_k(f^{(r)}, t/\sigma).$$

Отсюда следует оценка сверху

$$\sup \left\{ \frac{\sigma^\mu \mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)})}{\widetilde{\Omega}_k(f^{(r)}, t/\sigma)} : f \in L_2^r(\mathbb{R}) \right\} \leqslant (1 - \mathrm{sinc}(t))^{-k}. \tag{24}$$

Для получения оценки снизу экстремальной характеристики, содержащейся в левой части неравенства (24), рассмотрим, как и в работах [11, 14, 16], целую функцию q_ε экспоненциального типа $\sigma + \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < \sigma_* := \min(\sigma, 1)$ — произвольное число:

$$q_\varepsilon(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Big(\lambda_{\sigma+\varepsilon}(x) - \lambda_\sigma(x) \Big). \tag{25}$$

Здесь

$$\lambda_a(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ a, & \text{если } x = 0 \ \ (a > 0). \end{cases}$$

Поскольку преобразование Фурье функции λ_a имеет вид (см., например, [24])

$$\mathcal{F}(\lambda_a, x) := \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, & \text{если } |x| < a, \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, & \text{если } |x| = a, \\ 0, & \text{если } |x| > a, \end{cases}$$

для функции q_ε получаем

$$\mathcal{F}(q_\varepsilon, x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma < |x| < \sigma + \varepsilon, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{если } |x| = \sigma + \varepsilon \text{ или } |x| = \sigma, \\ 0, & \text{если } |x| > \sigma + \varepsilon \text{ или } |x| < \sigma. \end{cases} \tag{26}$$

Из формул (4), (19) и (26) очевидно, что $q_\varepsilon \in L_2^r(\mathbb{R})$.

Напомним (см., например, [6, 7]), что для произвольного элемента $f \in L_2(\mathbb{R})$ существует единственная целая функция $\Lambda_\sigma(f) \in \mathbb{B}_{\sigma,2}$, которая наименее уклоняется от f в метрике пространства $L_2(\mathbb{R})$ и имеет вид

$$\Lambda_\sigma(f,x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ix\tau} \widetilde{\chi}_\sigma(\tau) \mathcal{F}(f,\tau) d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e^{ix\tau} \mathcal{F}(f,\tau) d\tau,$$

где, как было отмечено выше, $\mathcal{F}(f)$ — преобразование Фурье функции f, $\widetilde{\chi}_\sigma$ — характеристическая функция множества $(-\sigma, \sigma)$. Для квадрата наилучшего среднеквадратического приближения функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ подпространством $\mathbb{B}_{\sigma,2}$ получаем

$$\mathcal{A}_\sigma^2(f) = \|f - \Lambda_\sigma(f)\|^2 = 2 \int\limits_{\sigma}^{\infty} |\mathcal{F}(f,\tau)|^2 d\tau. \tag{27}$$

Учитывая, что

$$\mathcal{F}(q_\varepsilon^{(r-\mu)}, x) = (ix)^{r-\mu} \mathcal{F}(q_\varepsilon, x), \tag{28}$$

на основании формулы (27) имеем

$$\mathcal{A}_\sigma(q_\varepsilon^{(r-\mu)}) = \left\{ 2 \int\limits_{\sigma}^{\infty} \tau^{2(r-\mu)} |\mathcal{F}(q_\varepsilon, \tau)|^2 d\tau \right\}^{1/2} \geqslant \sigma^{r-\mu} \sqrt{2\varepsilon}. \tag{29}$$

Отметим, что в случае $\mu := r$ в формуле (29) везде имеет место знак равенства.

Обозначим через t_* величину аргумента функции $\mathrm{sinc}(t)$, при котором она достигает на интервале $(0, \infty)$ своего наименьшего значения. Очевидно, что t_* является наименьшим положительным корнем уравнения $t = \mathrm{tg}(t)$ $(4,49 < t_* < 4,51)$. При этом

$$\inf\{\mathrm{sinc}(t) \colon 0 < t < t_*\} = \mathrm{sinc}(t_*)$$

и функция $\mathrm{sinc}(t)$ монотонно убывает на интервале $(0, t_*)$ (см., например, [27, с. 129, 132]). Пусть $t \in (0, t_*)$ — произвольное число. Полагая

$$\left(\frac{t_*}{t} - 1 \right)_{[0]} := \min \left\{ \frac{t_*}{t} - 1; 1 \right\}, \tag{30}$$

обозначаем

$$\widetilde{\sigma}(t) := \sigma_* \left(\frac{t_*}{t} - 1 \right)_{[0]}.$$

Отметим, что выбирая произвольным образом величину ε из интервала $(0, \widetilde{\sigma}(t))$ и используя определения величин $\sigma_* := \min(\sigma, 1)$ и (30), получаем соотношение

$$t\left(1 + \frac{\varepsilon}{\sigma}\right) < t\left(1 + \frac{\widetilde{\sigma}(t)}{\sigma}\right) = t\left(1 + \frac{\sigma_*}{\sigma}\left(\frac{t_*}{t} - 1\right)_{[0]}\right) \leqslant t_*. \tag{31}$$

Используя формулы (15), (26) и (28), где $\mu := 0$, а также учитывая поведение функции $\mathrm{sinc}(t)$ на интервале $(0, t_*)$ и соотношение (31), записываем оценку сверху для специального модуля непрерывности k-го порядка функции $q_\varepsilon^{(r)}$:

$$\widetilde{\Omega}_k(q_\varepsilon^{(r)}, t/\sigma) = \sup \left\{ 2 \int\limits_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon} \tau^{2r} \Big(1 - \mathrm{sinc}(h\tau)\Big)^{2k} d\tau : 0 < h \leqslant t/\sigma \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2\varepsilon}(\sigma+\varepsilon)^r \Big(1-\operatorname{sinc}(t(1+\varepsilon/\sigma))\Big)^k. \tag{32}$$

Здесь $\varepsilon \in (0, \widetilde{\sigma}(t))$ — любое число. Полагаем

$$\Xi_{r,k,t}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) := \left(1+\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)^r \Big(1-\operatorname{sinc}(t(1+\varepsilon/\sigma))\Big)^k. \tag{33}$$

Рассматривая величину (33) как функцию от $\varepsilon \in (0, \widetilde{\sigma}(t))$ при фиксированных значениях параметров r, k, t и σ, нетрудно убедиться в том, что данная функция является монотонно возрастающей по ε на указанном множестве. При этом

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \Xi_{r,k,t}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = \Xi_{r,k,t}(0). \tag{34}$$

Используя формулы (29), (32) и (33), записываем

$$\frac{\sigma^\mu \mathcal{A}_\sigma(q_\varepsilon^{(r-\mu)})}{\widetilde{\Omega}_k(q_\varepsilon^{(r)}, t/\sigma)} \geqslant \frac{1}{\Xi_{r,k,t}(\varepsilon/\sigma)}. \tag{35}$$

Поскольку $q_\varepsilon \in L_2^r(\mathbb{R})$, из неравенства (35) имеем

$$\sup\left\{\frac{\sigma^\mu \mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)})}{\widetilde{\Omega}_k(f^{(r)}, t/\sigma)} \colon f \in L_2^r(\mathbb{R})\right\} \geqslant \frac{1}{\Xi_{r,k,t}(\varepsilon/\sigma)}. \tag{36}$$

Левая часть неравенства (36) не зависит от $\varepsilon \in (0, \widetilde{\sigma}(t))$. Вычисляя верхнюю грань по ε от его правой части и учитывая равенство (34), записываем оценку снизу рассматриваемой экстремальной характеристики

$$\sup\left\{\frac{\sigma^\mu \mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)})}{\widetilde{\Omega}_k(f^{(r)}, t/\sigma)} \colon f \in L_2^r(\mathbb{R})\right\} \geqslant \frac{1}{\Xi_{r,k,t}(0)} = \Big(1-\operatorname{sinc}(t)\Big)^{-k}.$$

Сопоставляя данное неравенство с оценкой сверху (24) его левой части, получаем требуемое соотношение (20).

Теорема 1 доказана.

4. В случае аппроксимации 2π-периодических функций в метрике пространства $L_2([0,2\pi])$ подпространствами $\mathcal{T}_{n-1}, n \in \mathbb{N}$, состоящими из тригонометрических полиномов порядка, не превышающего $n-1$, Н. И. Черных отметил, что функционал

$$\left\{\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n} \omega_1^2(f,t)\sin(nt)dt\right\}^{1/2}$$

меньше джексоновского функционала $\omega_1(f, \pi/n)$, где $\omega_1(f)$ — модуль непрерывности функции $f \in L_2([0,2\pi])$ и, по-видимому, он более естествен для характеристики ее наилучших полиномиальных приближений

$$E_{n-1}(f)_{L_2([0,2\pi])} := \inf\left\{\|f-T_{n-1}\|_{L_2([0,2\pi])} \colon T_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}\right\},$$

чем функционал $\omega_1(f)$.

Аналогичная ситуация имеет место и в рассматриваемом нами случае. Пусть φ — неотрицательная измеримая суммируемая на конечном отрезке $[0,t]$ функция, которая не эквивалентна нулю. Если, например, $\int_0^t \varphi(\tau)d\tau \leqslant 1$, то очевидно, что функционал

$$\left\{\int\limits_0^t \widetilde{\Omega}_k^p(f,\tau)\varphi(\tau)d\tau\right\}^{1/p},$$

где $p\in(0,\infty)$, меньше величины $\widetilde{\Omega}_k(f,t)$ для не эквивалентной нулю функции $f\in L_2(\mathbb{R})$.

В связи с изложенным рассмотрим экстремальную характеристику на классе $L_2^r(\mathbb{R})$:

$$\chi_{\sigma,k,r,\mu,p,s}(\varphi,t) := \sup\left\{\frac{\mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)})}{\left(\int_0^t \widetilde{\Omega}_k^p(f^{(r)},\tau)\varphi(\tau)d\tau\right)^s} : f\in L_2^r(\mathbb{R})\right\}, \tag{37}$$

где $\mu,\ r\in\mathbb{Z}_+$ и $\mu\leqslant r,\ \ k\in\mathbb{N},\ p,\ s$ — конечные положительные числа, $0<t,\ \ \sigma<\infty.$ Напомним, что в случае $r:=0$ верхняя грань в соотношении (37) вычисляется по всем функциям $f\in L_2(\mathbb{R})$, которые не эквивалентны нулю. Всюду далее полагаем

$$\Big(1-\operatorname{sinc}(t)\Big)_* := \begin{cases} 1-\operatorname{sinc}(t), & \text{если } 0<t\leqslant t_*,\\ 1-\operatorname{sinc}(t_*), & \text{если } t\geqslant t_*,\end{cases} \tag{38}$$

$$\alpha_{x,k,\mu,p}(\varphi,t) := x^\mu\left\{\int\limits_0^t \Big(1-\operatorname{sinc}(x\tau)\Big)_*^{kp}\varphi(\tau)d\tau\right\}^{1/p}. \tag{39}$$

Теорема 2. *Пусть* $k\in\mathbb{N},\ 0<\sigma<\infty,\ 0<t<t_*/\sigma,\ r,\ \mu\in\mathbb{Z}_+$ *и* $\mu\leqslant r,\ 0<p\leqslant 2,$ $s:=1/p$. *Тогда имеет место двойное неравенство*

$$\frac{1}{\alpha_{\sigma,k,\mu,p}(\varphi,t)} \leqslant \chi_{\sigma,k,r,\mu,p,1/p}(\varphi,t) \leqslant \frac{1}{\inf\{\alpha_{x,k,\mu,p}(\varphi,t)\colon \sigma\leqslant x<\infty\}}. \tag{40}$$

Доказательство. Рассуждения проведем в два этапа, на первом из которых рассмотрим случай $r=\mu\in\mathbb{Z}_+$, а на втором — случай $r\in\mathbb{N}$ и $\mu<r$, где $\mu\in\mathbb{Z}_+$.

Пусть $r=\mu\in\mathbb{Z}_+$ и $f\in L_2^r(\mathbb{R})$ — произвольная функция, не эквивалентная нулю в случае $r:=0$. Используя формулы (13) и (19), где $\mu:=0$, получаем

$$\mathcal{F}(\widetilde{\Delta}_\tau^k(f^{(r)}),x) = \mathcal{F}(f,x)(ix)^r\Big(\operatorname{sinc}(\tau x)-1\Big)^k. \tag{41}$$

Поскольку, по теореме Парсеваля – Планшереля, $\widetilde{\Delta}_\tau^k(f^{(r)})\in L_2(\mathbb{R})$, то $\mathcal{F}(\widetilde{\Delta}_\tau^k(f^{(r)}))\in L_2(\mathbb{R})$ и эти функции имеют одинаковые нормы. Поэтому, используя равенства (4) и (41), получаем

$$\|\widetilde{\Delta}_\tau^k(f^{(r)})\|^2 = 2\int\limits_0^\infty |\mathcal{F}(f,x)|^2x^{2r}\Big(1-\operatorname{sinc}(\tau x)\Big)^{2k}dx. \tag{42}$$

В силу определения специального модуля непрерывности $\widetilde{\Omega}_k$ и равенства (42) записываем

$$\widetilde{\Omega}_k(f^{(r)},\tau) \geqslant \|\widetilde{\Delta}_\tau^k(f^{(r)})\| \geqslant \left\{2\int\limits_\sigma^\infty |\mathcal{F}(f,x)|^2 x^{2r}\Big(1-\operatorname{sinc}(\tau x)\Big)^{2k} dx\right\}^{1/2}. \tag{43}$$

Полагая

$$V(f;x,\tau) := 2^{p/2}|\mathcal{F}(f,x)|^p x^{rp}\Big(1-\operatorname{sinc}(\tau x)\Big)^{kp}\varphi(\tau),$$

а также используя соотношение (43), обозначение (39) и обобщенное неравенство Минковского (см., например, [4], гл. 1, п. 1.3), получаем

$$\left\{\int\limits_0^t \widetilde{\Omega}_k^p(f^{(r)},\tau)\varphi(\tau)d\tau\right\}^{1/p} \geqslant \left\{\int\limits_0^t \left[2\int\limits_\sigma^\infty |\mathcal{F}(f,x)|^2 x^{2r}\Big(1-\operatorname{sinc}(\tau x)\Big)^{2k} dx\right]^{p/2} \varphi(\tau)d\tau\right\}^{1/p} =$$

$$= \left\{\int\limits_0^t \left[\int\limits_\sigma^\infty V^{2/p}(f;x,\tau)dx\right]^{p/2} d\tau\right\}^{1/p} \geqslant \left\{\int\limits_\sigma^\infty \left[\int\limits_0^t V(f;x,\tau)d\tau\right]^{2/p} dx\right\}^{\frac{p}{2}\cdot\frac{1}{p}} =$$

$$= \left\{2\int\limits_\sigma^\infty |\mathcal{F}(f,x)|^2 \left[x^{rp}\int\limits_0^t \Big(1-\operatorname{sinc}(\tau x)\Big)^{kp}\varphi(\tau)d\tau\right]^{2/p} dx\right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{2\int\limits_\sigma^\infty |\mathcal{F}(f,x)|^2 \alpha_{x,k,r,p}\,(\varphi,t)dx\right\}^{1/2}.$$

Отсюда, используя равенство (27), имеем

$$\left\{\int\limits_0^t \widetilde{\Omega}_k^p(f^{(r)},\tau)\varphi(\tau)d\tau\right\}^{1/p} \geqslant \mathcal{A}_\sigma(f)\,\inf\big\{\alpha_{x,k,r,p}(\varphi,t)\colon \sigma\leqslant x<\infty\big\}.$$

Из данного неравенства и формулы (37) получаем оценку сверху

$$\chi_{\sigma,k,r,r,p,1/p}(\varphi,t) \leqslant \frac{1}{\inf\{\alpha_{x,k,r,p}(\varphi,t)\colon \sigma\leqslant x<\infty\}}. \tag{44}$$

Для получения оценки снизу экстремальной характеристики (37) при $\mu := r$ и $s := 1/p$ рассмотрим целую функцию q_ε экспоненциального типа $\sigma+\varepsilon$, где $\varepsilon\in(0,\sigma_*)$, определенную формулой (25). Из соотношения (27) и формулы (26) следует равенство

$$\mathcal{A}_\sigma(q_\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon}.$$

Из формул (15), (26), (38) и (19), где $r := \mu$, следует неравенство

$$\widetilde{\Omega}_k(q_\varepsilon^{(r)},\tau)=\sup\left\{2\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon}u^{2r}\Big(1-\operatorname{sinc}(hu)\Big)^{2k}du\colon 0<h\leqslant\tau\right\}^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{2\varepsilon}(\sigma+\varepsilon)^r\Big(1-\operatorname{sinc}(\tau(\sigma+\varepsilon))\Big)_*^k. \tag{45}$$

Возводя обе части неравенства (45) в степень $p\in(0,2]$, а затем умножая их на весовую функцию φ и интегрируя по переменной τ в пределах от 0 до t, получаем

$$\int\limits_0^t\widetilde{\Omega}_k^p(q_\varepsilon^{(r)},\tau)\varphi(\tau)d\tau\leqslant(2\varepsilon)^{p/2}(\sigma+\varepsilon)^{rp}\int\limits_0^t\Big(1-\operatorname{sinc}(\tau(\sigma+\varepsilon))\Big)_*^{kp}\varphi(\tau)d\tau. \tag{46}$$

Полагая

$$\alpha_{x,k,\mu,p}^*(\varphi,t):=x^\mu\left\{\int\limits_0^t\Big(1-\operatorname{sinc}(x\tau)\Big)_*^{kp}\varphi(\tau)d\tau\right\}^{1/p}, \tag{47}$$

записываем

$$\frac{\mathcal{A}_\sigma(q_\varepsilon)}{\left\{\int_0^t\widetilde{\Omega}_k^p(q_\varepsilon^{(r)},\tau)\varphi(\tau)d\tau\right\}^{1/p}}\geqslant\frac{1}{\alpha_{\sigma+\varepsilon,k,r,p}^*(\varphi,t)}.$$

Учитывая, что функция q_ε принадлежит классу $L_2^r(\mathbb{R})$, а также используя последнее неравенство и формулу (37), получаем

$$\chi_{\sigma,k,r,r,p,1/p}(\varphi,t)\geqslant\frac{1}{\alpha_{\sigma+\varepsilon,k,r,p}^*(\varphi,t)}. \tag{48}$$

Очевидно, что величина $\alpha_{\sigma+\varepsilon,k,r,p}^*(\varphi,t)$ монотонно убывает, когда $\varepsilon\to0+0$, при постоянных значениях остальных параметров, входящих в выражение (47). При этом

$$\lim_{\varepsilon\to0+0}\alpha_{\sigma+\varepsilon,k,r,p}^*(\varphi,t)=\alpha_{\sigma,k,r,p}(\varphi,t). \tag{49}$$

В силу равенства (49) очевидно, что для любого сколь угодно малого числа $\delta>0$ существует такое число $\widetilde{\varepsilon}:=\varepsilon(\delta)\in(0,\delta)$, для которого

$$\frac{1}{\alpha_{\sigma+\widetilde{\varepsilon},k,r,p}^*(\varphi,t)}>\frac{1}{\alpha_{\sigma,k,r,p}(\varphi,t)}-\delta. \tag{50}$$

Используя определение верхней грани числового множества, из неравенства (50) получаем

$$\sup\left\{\frac{1}{\alpha_{\sigma+\varepsilon,k,r,p}^*(\varphi,t)}\colon\varepsilon\in(0,\sigma_*)\right\}=\frac{1}{\alpha_{\sigma,k,r,p}(\varphi,t)}. \tag{51}$$

Поскольку левая часть неравенства (48) не зависит от ε, вычисляя верхнюю грань по $\varepsilon\in(0,\sigma_*)$ от его правой части и учитывая равенство (51), имеем

$$\chi_{\sigma,k,r,r,p,1/p}(\varphi,t)\geqslant\frac{1}{\alpha_{\sigma,k,r,p}(\varphi,t)}. \tag{52}$$

Сопоставляя оценку сверху (44) и оценку снизу (52), получаем требуемое двойное неравенство для рассматриваемого случая $r = \mu \in \mathbb{Z}_+$:

$$\frac{1}{\alpha_{\sigma,k,r,p}(\varphi,t)} \leqslant \chi_{\sigma,k,r,r,p,1/p}(\varphi,t) \leqslant \frac{1}{\inf\{\alpha_{x,k,r,p}(\varphi,t) : \sigma \leqslant x < \infty\}}. \tag{53}$$

Переходя ко второму этапу доказательства, полагаем, что $r \in \mathbb{N}$ и $\mu < r$, $\mu \in \mathbb{Z}_+$. Очевидно, что функцию $f^{(r-\mu)}$, где $f \in L_2^r(\mathbb{R})$, можно рассматривать как элемент класса $L_2^\mu(\mathbb{R})$. Используя формулу (37) и правую часть неравенства (53), получаем оценку сверху в рассматриваемом случае:

$$\chi_{\sigma,k,r,\mu,p,1/p}(\varphi,t) := \sup\left\{\frac{\mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)})}{\left(\int_0^t \widetilde{\Omega}_k^p(f^{(r)},\tau)\varphi(\tau)d\tau\right)^{1/p}} : f \in L_2^r(\mathbb{R})\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup\left\{\frac{\mathcal{A}_\sigma(F)}{\left(\int_0^t \widetilde{\Omega}_k^p(F^{(\mu)},\tau)\varphi(\tau)d\tau\right)^{1/p}} : F \in L_2^\mu(\mathbb{R})\right\} = \chi_{\sigma,k,\mu,\mu,p,1/p}(\varphi,t) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\inf\{\alpha_{x,k,\mu,p}(\varphi,t) \colon \sigma \leqslant x < \infty\}}. \tag{54}$$

Для получения оценки снизу экстремальной характеристики, содержащейся в левой части цепочки неравенств (54), также рассмотрим целую функцию $q_\varepsilon \in L_2^r(\mathbb{R})$, заданную формулой (25). Применяя формулы (29) и (46), (47), имеем

$$\frac{\mathcal{A}_\sigma(q_\varepsilon^{(r-\mu)})}{\left(\int_0^t \widetilde{\Omega}_k^p(q_\varepsilon^{(r)},\tau)\varphi(\tau)d\tau\right)^{1/p}} \geqslant \left(\frac{\sigma}{\sigma+\varepsilon}\right)^r \frac{1}{\sigma^\mu \left\{\int_0^t \left(1 - \operatorname{sinc}(t(\sigma+\varepsilon))\right)_*^{kp} \varphi(\tau)d\tau\right\}^{1/p}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{(1+\varepsilon/\sigma)^r\, \alpha^*_{\sigma+\varepsilon,k,\mu,p}(\varphi,t)}. \tag{55}$$

Учитывая формулу (47), получаем, что величина

$$(1+\varepsilon/\sigma)^r\, \alpha^*_{\sigma+\varepsilon,k,\mu,p}(\varphi,t)$$

монотонно убывает в случае, когда $\varepsilon \to 0+0$, а все остальные параметры в данной формуле являются некоторыми постоянными. При этом

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} (1+\varepsilon/\sigma)^r \cdot \alpha^*_{\sigma+\varepsilon,k,\mu,p}(\varphi,t) = \alpha_{\sigma,k,\mu,p}(\varphi,t).$$

Поскольку

$$\chi_{\sigma,k,r,\mu,p,1/p}(\varphi,t) \geqslant \frac{\mathcal{A}_\sigma(q_\varepsilon^{(r-\mu)})}{\left(\int_0^t \widetilde{\Omega}_k^p(q_\varepsilon^{(r)},\tau)\varphi(\tau)d\tau\right)^{1/p}}$$

и

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\sigma_*)}\left\{\frac{1}{(1+\varepsilon/\sigma)^r\,\alpha^*_{\sigma+\varepsilon,k,\mu,p}(\varphi,t)}:\varepsilon\in(0,\sigma_*)\right\}=\frac{1}{\alpha_{\sigma,k,\mu,p}(\varphi,t)},$$

используя неравенство (55) и рассуждения, имевшие место при доказательстве первого этапа данной теоремы (случай $r=\mu\in\mathbb{Z}_+$), получаем оценку снизу

$$\chi_{\sigma,k,r,\mu,p,1/p}(\varphi,t)\geqslant\frac{1}{\alpha_{\sigma,k,\mu,p}(\varphi,t)}. \tag{56}$$

Сопоставляя оценки сверху (54) и снизу (56), получаем требуемое двойное неравенство для величины $\chi_{\sigma,k,r,\mu,p,1/p}(\varphi,t)$ в случае $r\in\mathbb{N}$ и $\mu<r;\mu\in\mathbb{Z}_+$:

$$\frac{1}{\alpha_{\sigma,k,\mu,p}(\varphi,t)}\leqslant\chi_{\sigma,k,r,\mu,p,1/p}(\varphi,t)\leqslant\frac{1}{\inf\{\alpha_{x,k,\mu,p}(\varphi,t)\colon\sigma\leqslant x<\infty\}}. \tag{57}$$

Объединяя (53) и (57), получаем необходимые соотношения (40).

Теорема 2 доказана.

5. Рассмотрим далее ряд следствий, вытекающих из теоремы 2 и касающихся вычисления точных значений экстремальной характеристики (37).

***Следствие* 1.** *Пусть* $0<t\leqslant 3\pi/(4\sigma)$ *и выполнены все условия теоремы* 2. *Тогда справедливо равенство*

$$\chi_{\sigma,k,r,\mu,p,1/p}(\varphi,t)=\frac{1}{\alpha_{\sigma,k,\mu,p}(\varphi,t)}. \tag{58}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\operatorname{sinc}(\tau)$, где $0<\tau\leqslant t\leqslant 3\pi/(4\sigma)$. Для нее при любых фиксированных значениях $\sigma\in(0,\infty)$ и $x\in[\sigma,\infty)$ имеет место неравенство $\operatorname{sinc}(\sigma\tau)\geqslant$ $\geqslant\operatorname{sinc}(x\tau)$ (см., например, [27, с. 129, 132]), т. е.

$$1-\operatorname{sinc}(x\tau)\geqslant 1-\operatorname{sinc}(\sigma\tau).$$

Учитывая данное неравенство и используя формулу (39) для определения величины $\alpha_{x,k,\mu,p}(\varphi,t)$, при всех $\sigma\leqslant x<\infty$ получаем $\alpha_{x,k,\mu,p}(\varphi,t)\geqslant\alpha_{\sigma,k,\mu,p}(\varphi,t)$, т. е.

$$\inf\{\alpha_{x,k,\mu,p}(\varphi,t)\colon\sigma\leqslant x<\infty\}=\alpha_{\sigma,k,\mu,p}(\varphi,t). \tag{59}$$

Требуемое равенство (58) следует из двойного неравенства (40) и соотношения (59), что и завершает доказательство следствия 1.

***Следствие* 2.** *Пусть* $\varphi\equiv 1,\ \mu,\ k,\ r\in\mathbb{N}$ *и* $\mu\leqslant r,\ 1/\mu\leqslant p\leqslant 2,\ 0<\sigma<\infty,\ 0<t\leqslant t_*/\sigma$. *Тогда имеет место равенство*

$$\chi_{\sigma,k,r,\mu,p,1/p}(1,t)=\frac{1}{\alpha_{\sigma,k,\mu,p}(1,t)}. \tag{60}$$

Доказательство. Учитывая вид величины $\alpha_{x,k,\mu,p}(1,t)$, определенной формулой (39), для доказательства равенства (60) достаточно показать, что функция

$$\gamma(x):=x^{\mu p}\int\limits_0^t\Big(1-\operatorname{sinc}(x\tau)\Big)^{kp}d\tau$$

будет неубывающей при $x \geqslant \sigma$. Очевидно, что ее производная первого порядка имеет вид

$$\gamma'(x) = \mu p x^{\mu p-1} \int\limits_0^t \Big(1-\operatorname{sinc}(x\tau)\Big)^{kp} d\tau + x^{\mu p} \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial x}\Big(1-\operatorname{sinc}(x\tau)\Big)^{kp} d\tau. \tag{61}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости равенства

$$\frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial x}\Big(1-\operatorname{sinc}(x\tau)\Big)^{kp} = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial \tau}\Big(1-\operatorname{sinc}(x\tau)\Big)^{kp}, \tag{62}$$

где величины x и τ отличны от нуля. Из формулы (61) с учетом равенства (62) получаем

$$\gamma'(x) = x^{\mu p-1}\left\{\mu p \int\limits_0^t \Big(1-\operatorname{sinc}(x\tau)\Big)^{kp} d\tau + \int\limits_0^t \tau\frac{\partial}{\partial \tau}\Big(1-\operatorname{sinc}(x\tau)\Big)^{kp} d\tau\right\}. \tag{63}$$

Используя процедуру интегрирования по частям при вычислении второго интеграла в формуле (63), записываем

$$\gamma'(x) = x^{\mu p-1}\left\{t\Big(1-\operatorname{sinc}(x\tau)\Big)^{kp} + (\mu p-1)\int\limits_0^t \Big(1-\operatorname{sinc}(x\tau)\Big)^{kp} d\tau\right\}. \tag{64}$$

Учитывая, что $\operatorname{sinc}(xt) \leqslant 1$ для любого $x \in \mathbb{R}$ и $p \geqslant 1/\mu$, из равенства (64) получаем $\gamma'(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant \sigma$. Следовательно, $\inf\{\gamma(x)\colon \sigma \leqslant x < \infty\} = \gamma(\sigma)$, т. е.

$$\inf\{\alpha_{x,k,\mu,p}(1,t) : \sigma \leqslant x < \infty\} = \alpha_{\sigma,k,\mu,p}(1,t). \tag{65}$$

Требуемое равенство (60) получаем из соотношений (40) и (65).

Следствие 2 доказано.

Следствие 3. *Пусть $\varphi \equiv 1$, $k \in \mathbb{N}$, $p = 1/k$, $0 < \sigma < \infty$, $0 < t \leqslant t_*/\sigma$, μ, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $\mu \leqslant r$. Тогда справедливо равенство*

$$\chi_{\sigma,k,r,\mu,1/k,k}(1,t) = \frac{1}{\alpha_{\sigma,k,\mu,1/k}(1,t)}. \tag{66}$$

Доказательство. Использовав формулу (39), в данном случае рассмотрим величину α как функцию от x при фиксированных значениях остальных параметров, входящих в выражение для α:

$$\alpha_{x,k,\mu,1/k}(1,t) = x^{\mu}\left\{\int\limits_0^t \Big(1-\operatorname{sinc}(x\tau)\Big)d\tau\right\}^k = x^{\mu}\left(t - \frac{\operatorname{Si}(xt)}{x}\right)^k, \tag{67}$$

где $\operatorname{Si}(x) := \displaystyle\int_0^x \operatorname{sinc}(\tau)d\tau$ — интегральный синус, $\sigma \leqslant x < \infty$. Введем с помощью соотношения (67) функцию, зависящую от x:

$$G(x) := \frac{\alpha_{x,k,\mu,1/k}(1,t)}{\alpha_{\sigma,k,\mu,1/k}(1,t)} = \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\mu}\left\{\frac{1-\operatorname{Si}(xt)/(xt)}{1-\operatorname{Si}(\sigma t)/(\sigma t)}\right\}^k. \tag{68}$$

Поскольку функция $\eta(x) := \mathrm{Si}(x)/x$ является положительной невозрастающей на интервале $0 < x < \infty$ и такой, что $\lim\{\eta(x)\colon x \to 0\} = 1$ и $\lim\{\eta(x)\colon x \to \infty\} = 0$ (см., например, [29]), из равенства (68) получаем $G(x) \geqslant 1$ для любого $x \in [\sigma, \infty)$. Следовательно,

$$\inf\left\{\alpha_{x,k,\mu,1/k}(1,t)\colon \sigma \leqslant x < \infty\right\} = \alpha_{\sigma,k,\mu,1/k}(1,t).$$

С учетом данного равенства и соотношения (40) получаем требуемое равенство (66), что и завершает доказательство следствия 3.

Полагая, например, в формуле (66) $t := \pi/\sigma$ и учитывая соотношение (67), имеем

$$\sup\left\{\frac{\sigma^{\mu-k}\mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)})}{\left(\displaystyle\int_0^{\pi/\sigma}\widetilde{\Omega}_k^{1/k}(f^{(r)},\tau)d\tau\right)^k}\colon f \in L_2^r(\mathbb{R})\right\} = \frac{1}{(\pi - \mathrm{Si}(\pi))^k}.$$

***Следствие* 4.** *Пусть* $\widetilde{\varphi}(x) \equiv x$, $k \in \mathbb{N}$, $p = 1/k$, $0 < \sigma < \infty$, $0 < t \leqslant t_*/\sigma$, μ, $r \in \mathbb{Z}_+$ *и* $\mu \leqslant r$. *Тогда имеет место равенство*

$$\chi_{\sigma,k,r,\mu,1/k,k}(\widetilde{\varphi},t) = \frac{1}{\alpha_{\sigma,k,\mu,1/k}(\widetilde{\varphi},t)}. \tag{69}$$

Доказательство. Используя формулу (39), в рассматриваемом случае получаем

$$\alpha_{x,k,\mu,1/k}(\widetilde{\varphi},t) = x^\mu\left\{\int\limits_0^t\Big(1 - \mathrm{sinc}(x\tau)\Big)\tau d\tau\right\}^k = x^\mu\left\{\frac{t^2}{2} - \frac{2}{x^2}\sin^2\left(\frac{xt}{2}\right)\right\}^k, \quad \sigma \leqslant x < \infty.$$

Рассмотрим следующую функцию от x при фиксированных значениях остальных параметров, входящих в выражение (39) для величины α:

$$\mathfrak{M}(x) := \frac{\alpha_{x,k,\mu,1/k}(\widetilde{\varphi},t)}{\alpha_{\sigma,k,\mu,1/k}(\widetilde{\varphi},t)} = \left(\frac{x}{\sigma}\right)^\mu\left\{\frac{1 - \mathrm{sinc}^2(xt/2)}{1 - \mathrm{sinc}^2(\sigma t/2)}\right\}^k. \tag{70}$$

Поскольку $t_* \in (4,49; 4,51)$, для произвольного $t \in (0, t_*/\sigma]$ имеем $\sigma t/2 \leqslant t_*/2 < 3\pi/4$. Учитывая поведение функции $\mathrm{sinc}(\cdot)$ [27], для любых $0 < y \leqslant 3\pi/4$ и $1 \leqslant z < \infty$ имеем $\mathrm{sinc}(y) \geqslant \mathrm{sinc}(zy)$. Отсюда, полагая $y := \sigma t/2$ и $z := x/\sigma$, где $\sigma \leqslant x < \infty$, получаем $\mathrm{sinc}(\sigma t/2) \geqslant \mathrm{sinc}(xt/2)$. Тогда в силу соотношения (70) при $\sigma \leqslant x < \infty$ имеем $\mathfrak{M} \geqslant 1$. Следовательно,

$$\inf\left\{\alpha_{x,k,\mu,1/k}(\widetilde{\varphi},t)\colon \sigma \leqslant x < \infty\right\} = \alpha_{\sigma,k,\mu,1/k}(\widetilde{\varphi},t). \tag{71}$$

Требуемое равенство (69) получаем из сопоставления соотношений (40) и (71).

Следствие 4 доказано.

Полагая, например, в формуле (69) $t := \pi/\sigma$, получаем

$$\sup\left\{\frac{\sigma^{\mu-2k}\mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)})}{\left(\displaystyle\int_0^{\pi/\sigma}\tau\widetilde{\Omega}_k^{1/k}(f^{(r)},\tau)d\tau\right)^k}\colon f \in L_2^r(\mathbb{R})\right\} = \left(\frac{2}{\pi^2 - 4}\right)^k.$$

Пусть $t := \beta/\sigma$, где $0 < \beta \leqslant t_*$, и $\widehat{\varphi}(x) := \psi(\sigma x)$, где $0 \leqslant x \leqslant t$, а ψ — неотрицательная суммируемая на отрезке $[0, \beta]$ функция, не эквивалентная нулю. Тогда с учетом формулы (39) имеем

$$\alpha_{x,k,\mu,p}\left(\widehat{\varphi}, \frac{\beta}{\sigma}\right) = \left\{ x^{\mu p} \int\limits_0^{\beta/\sigma} \Big(1 - \operatorname{sinc}(x\tau)\Big)^{kp} \psi(\sigma\tau) d\tau \right\}^{1/p} =$$

$$= \sigma^{\mu - 1/p} \left\{ \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\mu p} \int\limits_0^{\beta} \left(1 - \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{\sigma}\tau\right)\right)^{kp} \psi(\tau) d\tau \right\}^{1/p}. \qquad (72)$$

Из формулы (72) получаем

$$\inf\left\{ \alpha_{x,k,\mu,p}\left(\widehat{\varphi}, \frac{\beta}{\sigma}\right) : \sigma \leqslant x < \infty \right\} \geqslant$$

$$\geqslant \sigma^{\mu - 1/p} \inf\left\{ x^{\mu} \left(\int\limits_0^{\beta} \Big(1 - \operatorname{sinc}(x\tau)\Big)^{kp} \psi(\tau) d\tau \right)^{1/p} : 1 \leqslant x < \infty \right\}. \qquad (73)$$

Обозначим

$$\xi_{k,\mu,p}(\psi, \beta; x) := x^{\mu} \left\{ \int\limits_0^{\beta} \Big(1 - \operatorname{sinc}(x\tau)\Big)^{kp} \psi(\tau) d\tau \right\}^{1/p}.$$

Тогда, используя введенные обозначения и формулы (37), (39), (72) и (73), из теоремы 2 получаем такое следствие.

Следствие 5. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, μ, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $\mu \leqslant r$, $0 < p \leqslant 2$, $0 < \sigma < \infty$, $0 < \beta \leqslant t_*$, ψ — неотрицательная суммируемая на отрезке $[0, \beta]$ функция, не эквивалентная нулю. Тогда выполняется двойное неравенство*

$$\frac{1}{\xi_{k,\mu,p}(\psi, \beta; 1)} \leqslant \sup\left\{ \frac{\sigma^{\mu} \mathcal{A}_{\sigma}(f^{(r-\mu)})}{\left(\int_0^{\beta} \widetilde{\Omega}_k^p(f^{(r)}, \tau/\sigma) \psi(\tau) d\tau \right)^{1/p}} : f \in L_2^r(\mathbb{R}) \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\inf\left\{ \xi_{k,\mu,p}(\psi, \beta; x) \colon 1 \leqslant x < \infty \right\}},$$

в котором в случае $r = 0$ верхняя грань вычисляется по всем функциям $f \in L_2(\mathbb{R})$, не эквивалентным нулю. Если при этом функция ψ такова, что

$$\inf\left\{ \xi_{k,\mu,p}(\psi, \beta; x) \colon 1 \leqslant x < \infty \right\} = \xi_{k,\mu,p}(\psi, \beta; 1),$$

то справедливо равенство

$$\sup\left\{\frac{\sigma^{\mu}\mathcal{A}_{\sigma}(f^{(r-\mu)})}{\left(\int_0^{\beta}\widetilde{\Omega}_k^p(f^{(r)},\tau/\sigma)\psi(\tau)d\tau\right)^{1/p}}\colon f\in L_2^r(\mathbb{R})\right\}=\frac{1}{\xi_{k,\mu,p}(\psi,\beta;1)}.$$

Следствие 6. *Пусть $k,\ r,\ \mu\in\mathbb{N}$ и $\mu\leqslant r,\ 0<\sigma<\infty,\ 0<\beta\leqslant t_*$. Если при некотором значении $p_0\in(0,2]$ весовая функция $\widehat{\psi}$ имеет вид $\widehat{\psi}(x):=x^{\mu p_0-1}\psi_1(x)$, где ψ_1 не возрастает и является неотрицательной суммируемой на отрезке $[0,\beta]$ и не эквивалентной нулю функцией, то выполняется равенство*

$$\inf\left\{\xi_{k,\mu,p_0}(\widehat{\psi},\beta;x)\colon 1\leqslant x<\infty\right\}=\xi_{k,\mu,p_0}(\widehat{\psi},\beta;1) \tag{74}$$

и имеет место соотношение

$$\sup\left\{\frac{\sigma^{\mu}\mathcal{A}_{\sigma}(f^{(r-\mu)})}{\left(\int_0^{\beta}\widetilde{\Omega}_k^{p_0}(f^{(r)},\tau/\sigma)\tau^{\mu p_0-1}\psi_1(\tau)d\tau\right)^{1/p_0}}\colon f\in L_2^r(\mathbb{R})\right\}=\frac{1}{\xi_{k,\mu,p_0}(\widehat{\psi},\beta;1)}. \tag{75}$$

Доказательство. Покажем справедливость равенства (74), поскольку тогда, в силу следствия 5, получаем требуемое равенство (75). Рассмотрим вспомогательную функцию $\psi_2(x):=$ $:=\{\psi_1(x)$, если $0\leqslant x\leqslant t_*$; $\psi_1(t_*)$, если $t_*\leqslant x<\infty\}$. Тогда для любого $x\in[1,\infty]$ получаем

$$\xi_{k,\mu,p_0}(\widehat{\psi},\beta;x)=x^{\mu}\left\{\int\limits_0^{\beta}\Big(1-\operatorname{sinc}(x\tau)\Big)^{kp_0}\tau^{\mu p_0-1}\psi_1(\tau)d\tau\right\}^{1/p_0}=$$

$$=\left\{\int\limits_0^{\beta x}\Big(1-\operatorname{sinc}(\tau)\Big)^{kp_0}\tau^{\mu p_0-1}\psi_1\left(\frac{\tau}{x}\right)d\tau\right\}^{1/p_0}\geqslant\left\{\int\limits_0^{\beta x}\Big(1-\operatorname{sinc}(\tau)\Big)^{kp_0}\tau^{\mu p_0-1}\psi_2(\tau)d\tau\right\}^{1/p_0}\geqslant$$

$$\geqslant\left\{\int\limits_0^{\beta}\Big(1-\operatorname{sinc}(\tau)\Big)^{kp_0}\tau^{\mu p_0-1}\psi_1(\tau)d\tau\right\}^{1/p_0}=\xi_{k,\mu,p_0}(\widehat{\psi},\beta;1).$$

Следовательно, равенство (74) имеет место, что и завершает доказательство следствия 6.

6. Введение Г. Г. Магарил-Ильяевым определения средней размерности (см., например, [30, 31]), которое является определенной модификацией соответствующего понятия, данного ранее В. М. Тихомировым [32], позволило определить асимптотические характеристики подпространств, подобные поперечникам, где в качестве размерности использовалась средняя размерность. В результате этого оказалось возможным сравнивать аппроксимативные свойства подпространства $\mathbb{B}_{\sigma,2}$ с аналогичными характеристиками иных подпространств из $L_2(\mathbb{R})$ той же средней размерности и решать в $L_2(\mathbb{R})$ экстремальные задачи теории аппроксимации оптимизационного содержания.

Прежде чем ввести необходимые экстремальные характеристики, приведем ряд понятий и определений из работ [30, 31]. Пусть $BL_2(\mathbb{R})$ — единичный шар в $L_2(\mathbb{R})$; $\operatorname{Lin}(L_2(\mathbb{R}))$ —

совокупность всех линейных подпространств в $L_2(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{Lin}_n(L_2(\mathbb{R})) := \{\mathcal{L} \in \mathrm{Lin}(L_2(\mathbb{R}))\colon \dim\mathcal{L} \leqslant n\}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$

$$d(Q, A, L_2(\mathbb{R})) := \sup\{\inf\{\|x-y\|\colon y \in A\}\colon x \in Q\}$$

— наилучшее приближение множества $Q \subset L_2(\mathbb{R})$ множеством $A \subset L_2(\mathbb{R})$. Под A_T, $T > 0$, понимаем сужение множества $A \subset L_2(\mathbb{R})$ на отрезок $[-T, T]$, а через $\mathrm{Lin}_C L_2(\mathbb{R})$ обозначим совокупность таких подпространств $\mathcal{L} \in \mathrm{Lin}(L_2(\mathbb{R}))$, для которых множество $(\mathcal{L} \cap BL_2(\mathbb{R}))_T$ предкомпактно в $L_2([-T, T])$ при любом $T > 0$.

Если $\mathcal{L} \in \mathrm{Lin}_C(L_2(\mathbb{R}))$ и T, $\varepsilon > 0$, то существуют такие $n \in \mathbb{Z}_+$ и $\mathcal{M} \in \mathrm{Lin}_n(L_2(\mathbb{R}))$, для которых

$$d\left((\mathcal{L} \cap BL_2(\mathbb{R}))_T, \mathcal{M}, L_2([-T, T])\right) < \varepsilon.$$

Пусть

$$D_\varepsilon(T, \mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})) := \min\{n \in \mathbb{Z}_+\colon \exists \mathcal{M} \in \mathrm{Lin}_n(L_2([-T, T])),$$

$$d((\mathcal{L} \cap BL_2(\mathbb{R}))_T, \mathcal{M}, L_2([-T, T])) < \varepsilon\}.$$

Данная функция не убывает по T и не возрастает по ε. Величину

$$\overline{\dim}(\mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})) := \lim\left\{\liminf\{D_\varepsilon(T, \mathcal{L}, L_2(\mathbb{R}))/(2T)\colon T \to \infty\}\colon \varepsilon \to 0\right\},$$

где $\mathcal{L} \in \mathrm{Lin}_C(L_2(\mathbb{R}))$, называют средней размерностью подпространства $\mathcal{L}$ в $L_2(\mathbb{R})$. В [30] было показано, что

$$\overline{\dim}(\mathbb{B}_{\sigma,2}; L_2(\mathbb{R})) = \frac{\sigma}{\pi}. \tag{76}$$

Пусть Q — центрально-симметричное подмножество из $L_2(\mathbb{R})$ и $\nu > 0$ — произвольное число. Тогда под средним ν-поперечником по Колмогорову множества Q в $L_2(\mathbb{R})$ понимают величину

$$\overline{d}_\nu(Q, L_2(\mathbb{R})) := \inf\{\sup\{\inf\{\|f-\varphi\|\colon \varphi \in \mathcal{L}\}\colon f \in Q\}\colon$$

$$\mathcal{L} \in \mathrm{Lin}_C(L_2(\mathbb{R})), \overline{\dim}(\mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})) \leqslant \nu\}.$$

Подпространство, на котором достигается внешняя нижняя грань, называется экстремальным.

Средним линейным ν-поперечником множества Q в $L_2(\mathbb{R})$ называют величину

$$\overline{\delta}_\nu(Q, L_2(\mathbb{R})) := \inf\{\sup\{\|f - V(f)\|\colon f \in Q\}\colon (X, V)\},$$

где нижняя грань берется по всем парам (X, V) таким, что X — нормированное пространство, непосредственно вложенное в $L_2(\mathbb{R})$, а $V\colon X \to L_2(\mathbb{R})$ — непрерывный линейный оператор, для которого $\mathrm{Im}V \in \mathrm{Lin}_C(L_2(\mathbb{R}))$ и $\overline{\dim}(\mathrm{Im}V, L_2(\mathbb{R})) \leqslant \nu$; $Q \subset X$. Здесь $\mathrm{Im}V$ — образ оператора V. Пару, на которой достигается нижняя грань, называют экстремальной.

Величину

$$\overline{b}_\nu(Q, L_2(\mathbb{R})) := \sup\{\sup\{\rho > 0\colon \mathcal{L} \cap \rho BL_2(\mathbb{R}) \subset Q\}\colon$$

$$\mathcal{L} \in \mathrm{Lin}_C(L_2(\mathbb{R})), \overline{\dim}(\mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})) > \nu, \overline{d}_\nu(\mathcal{L} \cap BL_2(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})) = 1\}$$

называют средним ν-поперечником по Бернштейну множества Q в $L_2(\mathbb{R})$. Последнее условие, налагаемое на $\mathcal{L}$ при вычислении внешней верхней грани, означает, что рассматриваются только те подпространства, для которых справедлив аналог теоремы В. М. Тихомирова о поперечнике шара. Этому требованию удовлетворяет, например, подпространство $\mathbb{B}_{\sigma,2}$, если $\sigma > \nu\pi$, т. е. $\overline{d}_\nu(\mathbb{B}_{\sigma,2} \cap BL_2(\mathbb{R}),\, L_2(\mathbb{R})) = 1$.

Между перечисленными экстремальными характеристиками множества $Q \subset L_2(\mathbb{R})$ имеют место неравенства

$$\overline{b}_\nu(Q, L_2(\mathbb{R})) \leqslant \overline{d}_\nu(Q, L_2(\mathbb{R})) \leqslant \overline{\delta}_\nu(Q, L_2(\mathbb{R})). \tag{77}$$

Отметим, что в работе автора [17] в хронологическом порядке приведен достаточно полный перечень результатов, связанных с вычислением точных значений колмогоровских поперечников классов функций, заданных на отрезке, и их распространения — средних ν-поперечников — на случай решения в определенном смысле аналогичных экстремальных задач теории аппроксимации функций на всей вещественной оси.

7. Непрерывную неубывающую на полусегменте $[0, \infty)$ функцию Φ такую, что $\Phi(0) = 0$, назовем мажорантой. Символом $\mathcal{W}^r(\widetilde{\Omega}_k, \Phi)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$, обозначим класс функций $f \in L_2^r(\mathbb{R})$, для каждой из которых при любом $t \in (0, \infty)$ выполняется неравенство $\widetilde{\Omega}_k(f^{(r)}, t) \leqslant \Phi(t)$. Для произвольного класса $\mathfrak{M} \subset L_2(\mathbb{R})$ полагаем $\mathcal{A}_\sigma(\mathfrak{M}) := \sup\{\mathcal{A}_\sigma(f)\colon f \in \mathfrak{M}\}$.

Теорема 3. *Пусть мажоранта Φ для любого $\sigma > \nu\pi$, где ν — произвольное фиксированное положительное число, удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi(\pi/(2\sigma))} \geqslant \left(\frac{\pi}{\pi - 2}\right)^k \left(1 - \mathrm{sinc}(\sigma t)\right)_*^k. \tag{78}$$

Тогда имеют место равенства

$$\overline{\Pi}_\nu(\mathcal{W}^r(\widetilde{\Omega}_k, \Phi); L_2(\mathbb{R})) = \mathcal{A}_{\nu\pi}(\mathcal{W}^r(\widetilde{\Omega}_k, \Phi)) = \frac{\pi^{k-r}}{(\pi - 2)^k}\nu^{-r}\Phi\left(\frac{1}{2\nu}\right), \tag{79}$$

где $\overline{\Pi}(\cdot)$ — любой из средних ν-поперечников: бернштейновский $\overline{b}_\nu(\cdot)$, колмогоровский $\overline{d}_\nu(\cdot)$, линейный $\overline{\delta}_\nu(\cdot)$. При этом пара $(L_2^r(\mathbb{R}), \Lambda_{\nu\pi})$, где линейный оператор $\Lambda_{\nu\pi}$ определяется из условия $\mathcal{F}(\Lambda_{\nu\pi}, \cdot) = \chi_{\nu\pi}(\cdot)\mathcal{F}(f, \cdot)$ $\big($здесь $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$, а $\chi_{\nu\pi}(\cdot)$ — характеристическая функция множества $(-\nu\pi, \nu\pi)\big)$, будет экстремальной для среднего линейного ν-поперечника $\overline{\delta}_\nu(\mathcal{W}^r(\widetilde{\Omega}_k, \Phi); L_2(\mathbb{R}))$, а подпространство $\mathbb{B}_{\nu\pi,2}$ является экстремальным для среднего ν-поперечника по Колмогорову $\overline{d}_\nu(\mathcal{W}^r(\widetilde{\Omega}_k, \Phi); L_2(\mathbb{R}))$. При этом множество мажорант, удовлетворяющих условию (78), *не пусто.*

Доказательство. Используя формулу (76), вычисляем среднюю размерность подпространства целых функций $\mathbb{B}_{\nu\pi,2}$, а именно, $\overline{\dim}(\mathbb{B}_{\nu\pi,2}; L_2(\mathbb{R})) = \nu$. Полагая в связи с этим в формуле (21) $\sigma := \nu\pi$, $t := \pi/2$ и используя определение средних ν-поперечников, соотношение (77) и определение класса $\mathcal{W}^r(\widetilde{\Omega}_k, \Phi)$, записываем

$$\overline{\Pi}_\nu(\mathcal{W}^r(\widetilde{\Omega}_k, \Phi); L_2(\mathbb{R})) \leqslant \overline{\delta}_\nu(\mathcal{W}^r(\widetilde{\Omega}_k, \Phi); L_2(\mathbb{R})) \leqslant \sup\{\|f - \Lambda_{\nu\pi}(f)\|\colon f \in \mathcal{W}^r(\widetilde{\Omega}_k, \Phi)\} =$$

$$= \mathcal{A}_{\nu\pi}(\mathcal{W}^r(\widetilde{\Omega}_k, \Phi)) \leqslant \frac{\pi^{k-r}}{(\pi-2)^k}\nu^{-r}\Phi\left(\frac{1}{2\nu}\right), \tag{80}$$

где

$$\Lambda_{\nu\pi}(f,x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\nu\pi}^{\nu\pi} e^{ix\tau}\mathcal{F}(f,\tau)d\tau.$$

Перейдем к получению оценок снизу рассматриваемых средних ν-поперечников. Из результатов, приведенных в пункте 6, следует, что подпространство целых функций $\mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2}$, где $\widehat{\sigma} := \nu\pi(1+\varepsilon), \varepsilon \in (0,\sigma_*)$ — произвольное бесконечно малое положительное число, удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к подпространствам, входящим в определение среднего ν-поперечника по Бернштейну. Отметим, что в соответствии с равенством (76) средняя размерность $\overline{\dim}(\mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2}; L_2(\mathbb{R})) = \nu(1+\varepsilon)$, и, согласно результатам работ [30, 31], имеем $\overline{d}_\nu(\mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2} \cap BL_2(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})) = 1$.

Рассмотрим далее множество $\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho)$, являющееся результатом пересечения подпространства $\mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2}$ целых функций экспоненциального типа $\widehat{\sigma}$ с шаром $\rho BL_2(\mathbb{R})$ радиуса

$$\rho := \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^k (\widehat{\sigma})^{-r}\Phi\left(\frac{\pi}{2\widehat{\sigma}}\right), \tag{81}$$

т. е.

$$\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho) := \mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2} \cap \rho BL_2(\mathbb{R}) = \left\{g \in \mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2} \colon \|g\| \leqslant \rho\right\},$$

и покажем принадлежность $\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho)$ классу $\mathcal{W}^r(\widetilde{\Omega}_k, \Phi)$. В силу теоремы Винера – Пэли (см., например, [3, с. 211, 212]) целую функцию $g \in \mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2}$ можно записать в виде

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} u(\tau)e^{ix\tau}d\tau,$$

где u — некоторая функция с интегрируемым по Лебегу квадратом модуля на отрезке $[-\widehat{\sigma}, \widehat{\sigma}]$. При этом

$$\|g\| = \left\{\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} |u(\tau)|^2 d\tau\right\}^{1/2}. \tag{82}$$

Используя формулы (9), (10) и метод математической индукции, можно показать справедливость равенства

$$\widetilde{\Delta}_h^k(g,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} \Big(1 - \operatorname{sinc}(h\tau)\Big)^k u(\tau)e^{ix\tau}d\tau. \tag{83}$$

С учетом формул (82), (83), обозначения (38) и поведения функции $\operatorname{sinc}(\cdot)$ получаем

$$\left\|\widetilde{\Delta}_h^k(g)\right\| = \left\{\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} \Big(1 - \operatorname{sinc}(h\tau)\Big)^{2k} |u(\tau)|^2 d\tau\right\}^{1/2} \leqslant \Big(1 - \operatorname{sinc}(h\widehat{\sigma})\Big)_*^k \|g\|. \tag{84}$$

Используя неравенство С. Н. Бернштейна для целых функций $g \in \mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2}$ [3]

$$\|g^{(r)}\| \leqslant (\widehat{\sigma})^r \|g\|$$

и соотношение (84), имеем

$$\left\|\widetilde{\Delta}_h^k(g^{(r)})\right\| \leqslant (\widehat{\sigma})^r \bigg(1 - \operatorname{sinc}(h\widehat{\sigma})\bigg)_*^k \|g\|. \tag{85}$$

Из определения специального модуля непрерывности k-го порядка $\widetilde{\Omega}_k$ и неравенства (85) следует оценка сверху

$$\widetilde{\Omega}_k(g^{(r)}, t) \leqslant (\widehat{\sigma})^r \bigg(1 - \operatorname{sinc}(h\widehat{\sigma})\bigg)_*^k \|g\|. \tag{86}$$

Используя неравенство (86) и ограничение (78) на мажоранту Φ, для произвольного элемента $g \in \mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho)$ получаем

$$\widetilde{\Omega}_k(g^{(r)}, t) \leqslant \left(\frac{\pi}{\pi - 2}\right)^k \bigg(1 - \operatorname{sinc}(\widehat{\sigma} t)\bigg)_*^k \Phi\left(\frac{\pi}{2\widehat{\sigma}}\right) \leqslant \Phi(t),$$

где $t \in (0, \infty)$ — любое число. Следовательно, $\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho) \subset \mathcal{W}^r(\widetilde{\Omega}_k, \Phi)$.

Обозначим

$$\widetilde{\widetilde{\Xi}}_{r,\nu}(\Phi, \varepsilon) := \frac{1}{(1+\varepsilon)^r}\, \Phi\left(\frac{1}{2(1+\varepsilon)\nu}\right),$$

где $\varepsilon \in (0, \sigma_*)$ — произвольное бесконечно малое число. Из определения среднего бернштейновского ν-поперечника и формулы (81) имеем

$$\overline{b}_\nu(\mathcal{W}^r(\widetilde{\Omega}_k, \Phi); L_2(\mathbb{R})) \geqslant \overline{b}_\nu(\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho), L_2(\mathbb{R})) \geqslant \frac{\pi^{k-r}}{(\pi - 2)^k}\, \nu^{-r}\, \widetilde{\widetilde{\Xi}}_{r,\nu}(\Phi, \varepsilon). \tag{87}$$

Очевидно, что величина $\widetilde{\widetilde{\Xi}}_{r,\nu}(\Phi, \varepsilon)$ является монотонно убывающей функцией от $\varepsilon \in (0, \sigma_*)$ при фиксированных значениях остальных параметров, входящих в выражение для $\widetilde{\widetilde{\Xi}}$, и

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \widetilde{\widetilde{\Xi}}_{r,\nu}(\Phi, \varepsilon) = \Phi\left(\frac{1}{2\nu}\right).$$

Следовательно,

$$\sup\left\{\widetilde{\widetilde{\Xi}}_{r,\nu}(\Phi, \varepsilon) : 0 < \varepsilon < \sigma_*\right\} = \Phi\left(\frac{1}{2\nu}\right). \tag{88}$$

Из соотношений (77) и (87) получаем

$$\overline{\Pi}_\nu(\mathcal{W}^r(\widetilde{\Omega}_k, \Phi); L_2(\mathbb{R})) \geqslant \frac{\pi^{k-r}}{(\pi - 2)^k}\, \nu^{-r} \widetilde{\widetilde{\Xi}}_{r,\nu}(\Phi, \varepsilon),$$

где $\overline{\Pi}_\nu(\cdot)$ — любой из средних ν-поперечников, рассмотренных в пункте 6. Вычисляя верхнюю грань по $\varepsilon \in (0, \sigma_*)$ от правой части последнего неравенства и учитывая формулу (88), записываем оценки снизу изучаемых средних ν-поперечников:

$$\overline{\Pi}_\nu(\mathcal{W}^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi);L_2(\mathbb{R}))\geqslant\frac{\pi^{k-r}}{(\pi-2)^k}\,\nu^{-r}\Phi\left(\frac{1}{2\nu}\right).$$

Сопоставляя их с оценками сверху (80), получаем требуемые равенства (79).

В заключение доказательства отметим, что мажорантой, удовлетворяющей условию (78), может служить, например, функция $\widetilde{\Phi}(t):=t^{2k/(\pi-2)}$ [20].

Теорема 3 доказана.

Определенный интерес, по мнению автора, представляет изучение поведения величин наилучших приближений $\mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)})$, $r\in\mathbb{N}$, $\mu=0,\ldots,r-1$, на классах $\mathcal{W}^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi)$. Справедливо такое следствие.

Следствие 7. *Пусть выполнены все условия теоремы* 3 *и* $r\in\mathbb{N}$, $\mu=0,\ldots,r-1$, $\nu\in(0,\infty)$ *— произвольные фиксированные числа. Тогда имеет место равенство*

$$\sup\left\{\mathcal{A}_{\nu\pi}(f^{(r-\mu)})\colon f\in\mathcal{W}^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi)\right\}=\frac{\pi^{k-\mu}}{(\pi-2)^k}\,\nu^{-\mu}\Phi\left(\frac{1}{2\nu}\right).\tag{89}$$

Доказательство. Из равенства (20), в котором полагаем $t:=\pi/2$ и $\sigma:=\nu\pi$, для произвольной функции $f\in L_2^r(\mathbb{R})$ записываем оценку сверху наилучшего приближения ее производной $f^{(r-\mu)}$ элементами подпространства $\mathbb{B}_{\nu\pi,2}$:

$$\mathcal{A}_{\nu\pi}(f^{(r-\mu)})\leqslant\frac{\pi^{k-\mu}}{(\pi-2)^k}\,\nu^{-\mu}\,\widetilde{\Omega}_k\left(f^{(r)},\frac{1}{2\nu}\right).$$

Отсюда, используя определение класса $\mathcal{W}^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi)$, получаем оценку сверху

$$\sup\left\{\mathcal{A}_{\nu\pi}(f^{(r-\mu)})\colon f\in\mathcal{W}^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi)\right\}\leqslant\frac{\pi^{k-\mu}}{(\pi-2)^k}\,\nu^{-\mu}\Phi\left(\frac{1}{2\nu}\right).\tag{90}$$

Для получения оценки снизу экстремальной характеристики, содержащейся в левой части неравенства (90), рассмотрим целую функцию $q_{\widetilde{\varepsilon}}$ экспоненциального типа $\sigma+\widetilde{\varepsilon}$, где $\widetilde{\varepsilon}$ — произвольное бесконечно малое положительное число, заданную формулой (25). Полагая, например, $\varepsilon:=\widetilde{\varepsilon}/(\nu\pi)$, имеем

$$\sigma+\widetilde{\varepsilon}=\nu\pi(1+\varepsilon)=\widehat{\sigma}.\tag{91}$$

Поскольку в силу равенства (26)

$$\|q_{\widetilde{\varepsilon}}\|=\left\{2\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\widetilde{\varepsilon}}|\mathcal{F}(q_{\widetilde{\varepsilon}},\tau)|^2d\tau\right\}^{1/2}=\sqrt{2\widetilde{\varepsilon}},\tag{92}$$

на основании формул (81), (91) и (92) целая функция

$$\widehat{q}_{\widetilde{\varepsilon}}(x):=\frac{\rho}{\sqrt{2\widetilde{\varepsilon}}}\,q_{\widetilde{\varepsilon}}(x)$$

является элементом рассмотренного в ходе доказательства теоремы 3 множества $\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho)$, которое принадлежит классу $\mathcal{W}^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi)$. Используя неравенство (29), в котором полагаем $\sigma:=\nu\pi$, а также применяя соотношения (81) и (91), для функции $\widehat{q}_{\widetilde{\varepsilon}}$ записываем

$$\mathcal{A}_{\nu\pi}\left((\widehat{q}_{\widetilde{\varepsilon}})^{(r-\mu)}\right)\geqslant(\nu\pi)^{r-\mu}\,\rho=\frac{\pi^{k-\mu}}{(\pi-2)^k}\,\nu^{-\mu}\,\widetilde{\Xi}_{r,\nu}(\Phi,\varepsilon),$$

где величина $\widetilde{\Xi}_{r,\nu}\,(\Phi,\varepsilon)$ была введена при доказательства теоремы 3. Поскольку $\widehat{q_{\widetilde{\varepsilon}}} \in W^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi)$, с учетом последнего неравенства получаем

$$\sup\left\{\mathcal{A}_{\nu\pi}(f^{(r-\mu)})\colon f\in\mathcal{W}^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi)\right\}\geqslant\frac{\pi^{k-\mu}}{(\pi-2)^k}\;\nu^{-\mu}\;\widetilde{\Xi}_{r,\nu}(\Phi,\varepsilon).$$

Вычисляя верхнюю грань по $\varepsilon\in(0,\sigma_*)$ от правой части данного неравенства, имеем

$$\sup\left\{\mathcal{A}_{\nu\pi}(f^{(r-\mu)})\colon f\in\mathcal{W}^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi)\right\}\geqslant\frac{\pi^{k-\mu}}{(\pi-2)^k}\;\nu^{-\mu}\;\Phi\left(\frac{1}{2\nu}\right).$$

Сравнивая оценку снизу рассматриваемой экстремальной характеристики с ее оценкой сверху (90), получаем требуемое равенство (89), что и завершает доказательство следствия 7.

8. Символом $W_p^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi)$, где $0<p\leqslant 2$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $k\in\mathbb{N}$, Φ — некоторая мажоранта, обозначим класс функций $f\in L_2^r(\mathbb{R})$, для которых при любом $t\in(0,\infty)$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t\widetilde{\Omega}_k^p(f^{(r)},\tau)d\tau\leqslant\Phi^p(t). \tag{93}$$

Теорема 4. *Пусть $r,\ k\in\mathbb{N}$, $p\in[1/r,2]$ и мажоранта Φ при любом $\sigma>\nu\pi$, где ν — произвольное фиксированное положительное число, удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{\Phi(t)}{\Phi(\pi/\sigma)}\right)^p\geqslant\frac{\pi\displaystyle\int_0^{\sigma t}\left(1-\mathrm{sinc}(\tau)\right)_*^{kp}d\tau}{\sigma t\displaystyle\int_0^{\pi}\left(1-\mathrm{sinc}(\tau)\right)^{kp}d\tau}. \tag{94}$$

Тогда имеют место равенства

$$\overline{\Pi}_\nu(W_p^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi);L_2(\mathbb{R}))=\mathcal{A}_{\nu\pi}(W_p^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi))=$$

$$=\pi^{1/p-r}\left\{\int\limits_0^\pi\left(1-\mathrm{sinc}(\tau)\right)^{kp}d\tau\right\}^{-1/p}\nu^{-r}\Phi\left(\frac{1}{\nu}\right), \tag{95}$$

где $\overline{\Pi}(\cdot)$ — любой из средних ν-поперечников: бернштейновский $\overline{b}_\nu(\cdot)$, колмогоровский $\overline{d}_\nu(\cdot)$, линейный $\overline{\delta}_\nu(\cdot)$. При этом пара $(L_2^r(\mathbb{R}),\Lambda_{\nu\pi})$ и подпространство $\mathbb{B}_{\nu\pi,2}$ являются экстремальными для средних линейного и колмогоровского ν-поперечников класса $W_p^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi)$ соответственно, а множество мажорант, удовлетворяющих условию (94), *не пусто.*

Доказательство. Используя соотношение (60), в котором полагаем $t:=\pi/\sigma$ и $\mu:=r$, для произвольной функции $f\in L_2^r(\mathbb{R})$ записываем

$$\mathcal{A}_\sigma(f)\leqslant\sigma^{-r}\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi\left(1-\mathrm{sinc}(\tau)\right)^{kp}d\tau\right\}^{-1/p}\left\{\frac{\sigma}{\pi}\int\limits_0^{\pi/\sigma}\widetilde{\Omega}_k^p(f^{(r)},\tau)d\tau\right\}^{1/p}.$$

Из данного неравенства при $\sigma:=\nu\pi$, определения класса $W_p^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi)$ и соотношений (76), (77) получаем оценку сверху рассматриваемых средних ν-поперечников:

$$\overline{\Pi}_\nu(W_p^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi);L_2(\mathbb{R}))\leqslant\overline{\delta}_\nu(W_p^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi);L_2(\mathbb{R}))\leqslant\sup\Big\{\|f-\Lambda_{\nu\pi}(f)\|\colon f\in W_p^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi)\Big\}=$$

$$=\mathcal{A}_{\nu\pi}(W_p^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi))\leqslant\pi^{1/p-r}\left\{\int\limits_0^\pi\Big(1-\operatorname{sinc}(\tau)\Big)^{kp}d\tau\right\}^{-1/p}\nu^{-r}\ \Phi\left(\frac{1}{\nu}\right). \tag{96}$$

Для получения оценок снизу средних ν-поперечников класса $W_p^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi)$, в силу формулы (77), рассмотрим его средний бернштейновский ν-поперечник. Предварительно обозначим через $\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_1)$, где величина $\widehat{\sigma}$ определяется формулой (91), а величина ρ_1 — формулой

$$\rho_1:=\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi\Big(1-\operatorname{sinc}(\tau)\Big)^{kp}d\tau\right\}^{-1/p}(\widehat{\sigma})^{-r}\ \Phi\left(\frac{\pi}{\widehat{\widehat{\sigma}}}\right), \tag{97}$$

множество целых функций, образованное пересечением подпространства $\mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2}$ с шаром радиуса ρ_1 в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, т. е.

$$\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_1):=\mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2}\cap\rho_1BL_2(\mathbb{R})=\{g\in\mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2}\colon\|g\|\leqslant\rho_1\},$$

и покажем принадлежность $\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_1)$ классу $W_p^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi)$.

Из неравенства (86) для произвольной функции $g\in\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_1)$ имеем

$$\widetilde{\Omega}_k^p(g^{(r)},\tau)\leqslant(\widehat{\sigma})^{rp}\Big(1-\operatorname{sinc}(\widehat{\sigma}\tau)\Big)_*^{kp}\|g\|^p.$$

Интегрируя обе части данного неравенства по переменной τ в пределах от 0 до t, где $t\in(0,\infty)$, а затем умножая их на величину $1/t$ и используя условие (94), записываем

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t\widetilde{\Omega}_k^p(g^{(r)},\tau)d\tau\leqslant(\widehat{\sigma})^{rp}\|g\|^p\frac{1}{t}\int\limits_0^t\Big(1-\operatorname{sinc}(\widehat{\sigma}\tau)\Big)_*^{kp}d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\frac{1}{\widehat{\sigma}t}\int\limits_0^{\widehat{\sigma}t}\Big(1-\operatorname{sinc}(\widehat{\sigma}\tau)\Big)_*^{kp}d\tau\right\}\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi\Big(1-\operatorname{sinc}(\widehat{\sigma}\tau)\Big)^{kp}d\tau\right\}^{-1}\Phi^p\left(\frac{\pi}{\widehat{\widehat{\sigma}}}\right)\leqslant\Phi^p(t).$$

Учитывая неравенство (93), имеем $\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_1)\subset W_p^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi)$. Отсюда, используя определение среднего ν-поперечника по Бернштейну, а также формулы (91) и (97), получаем

$$\overline{b}_\nu(W_p^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi);L_2(\mathbb{R}))\geqslant\overline{b}_\nu(\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_1),L_2(\mathbb{R}))\geqslant$$

$$\geqslant\pi^{1/p-r}\left\{\int\limits_0^\pi\Big(1-\operatorname{sinc}(\tau)\Big)^{kp}d\tau\right\}^{-1/p}\nu^{-r}\ \widetilde{\widetilde{\Xi}}_{r,\nu/2}(\Phi,\varepsilon),$$

где величина $\widetilde{\widetilde{\Xi}}_{r,\nu/2}(\Phi,\varepsilon)$ определена в ходе доказательства теоремы 3. Из соотношения (77) и последнего неравенства имеем

$$\overline{\Pi}_\nu(W_p^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi);L_2(\mathbb{R}))\geqslant\pi^{1/p-r}\left\{\int\limits_0^\pi\left(1-\operatorname{sinc}(\tau)\right)^{kp}d\tau\right\}^{-1/p}\nu^{-r}\,\widetilde{\Xi}_{r,\nu/2}(\Phi,\varepsilon),$$

где $\overline{\Pi}_\nu(\cdot)$ — любой из средних ν-поперечников, рассмотренных в пункте 6. Вычисляя верхнюю грань по $\varepsilon\in(0,\sigma_*)$ от правой части последнего неравенства и используя формулу (88), записываем оценки снизу

$$\overline{\Pi}_\nu(W_p^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi);L_2(\mathbb{R}))\geqslant\pi^{1/p-r}\left\{\int\limits_0^\pi\left(1-\operatorname{sinc}(\tau)\right)^{kp}d\tau\right\}^{-1/p}\nu^{-r}\,\Phi\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

Сопоставляя данное неравенство с оценкой сверху (96), получаем требуемые равенства (95).

В заключение отметим, что условию (94) удовлетворяет, например, мажоранта $\widehat{\Phi}(t):=t^{a/p}$, где

$$a:=\frac{\pi}{\int_0^\pi\left(1-\operatorname{sinc}(\tau)\right)^{kp}d\tau}-1$$

(см., например, [19]).

Теорема 4 доказана.

Следствие 8. *Пусть выполнены все условия теоремы* 4 *и* $r\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$, $\mu\in\mathbb{N}$ *и* $\mu=1,\ldots,r-1$, $p\in[1/\mu;2]$, $\nu\in(0,\infty)$ — *произвольные фиксированные числа. Тогда справедливо равенство*

$$\sup\Big\{\mathcal{A}_{\nu\pi}(f^{(r-\mu)})\colon f\in W_p^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi)\Big\}=\pi^{1/p-\mu}\left\{\int\limits_0^\pi\left(1-\operatorname{sinc}(\tau)\right)^{kp}d\tau\right\}^{-1/p}\nu^{-\mu}\Phi\left(\frac{1}{\nu}\right).\quad(98)$$

Доказательство. Используя равенство (60), для произвольной функции $f\in L_2^r(\mathbb{R})$ записываем оценку сверху величины наилучшего приближения ее промежуточной производной $f^{(r-\mu)}$ элементами подпространства $\mathbb{B}_{\sigma,2}$:

$$\mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)})\leqslant\left\{\int\limits_0^t\left(1-\operatorname{sinc}(\sigma\tau)\right)^{kp}d\tau\right\}^{-1/p}\sigma^{-\mu}\left\{\int\limits_0^t\widetilde{\Omega}_k^p(f^{(r)},\tau)d\tau\right\}^{1/p}.$$

Полагая в данном неравенстве $\sigma:=\nu\pi$ и $t:=\pi/\sigma=1/\nu$, получаем

$$\mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)})\leqslant\pi^{1/p-\mu}\left\{\int\limits_0^\pi\left(1-\operatorname{sinc}(\tau)\right)^{kp}d\tau\right\}^{-1/p}\nu^{-\mu}\left\{\nu\int\limits_0^{1/\nu}\widetilde{\Omega}_k^p(f^{(r)},\tau)d\tau\right\}^{1/p}.$$

Отсюда, используя определение класса $W_p^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi)$, имеем оценку сверху рассматриваемой экстремальной характеристики

$$\sup\Big\{\mathcal{A}_{\nu\pi}(f^{(r-\mu)})\colon f\in W_P^r(\widetilde{\Omega}_k,\Phi)\Big\}\leqslant\pi^{1/p-\mu}\left\{\int\limits_0^\pi\left(1-\operatorname{sinc}(\tau)\right)^{kp}d\tau\right\}^{-1/p}\nu^{-\mu}\Phi\left(\frac{1}{\nu}\right).\quad(99)$$

Для получения оценки снизу рассмотрим, как и при доказательстве следствия 7, целую функцию $q_{\widetilde{\varepsilon}}$ экспоненциального типа $\sigma + \widetilde{\varepsilon}$, где $\widetilde{\varepsilon}$ — произвольное бесконечно малое число. Также полагаем $\varepsilon := \widetilde{\varepsilon}/(\nu\pi)$. В силу формул (91), (92) и (97) целая функция

$$\widetilde{q}_{\widetilde{\varepsilon}}(x) := \frac{\rho_1}{\sqrt{2\widetilde{\varepsilon}}}\, q_{\widetilde{\varepsilon}}(x)$$

принадлежит рассмотренному в теореме 4 множеству $\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_1)$, а значит, и классу $W_p^r(\widetilde{\Omega}_k, \Phi)$. Из неравенства (29), в котором полагаем $\sigma := \nu\pi$, и из соотношений (97), (91) для функции $\widetilde{q}_{\widetilde{\varepsilon}}$ получаем

$$\mathcal{A}_{\nu\pi}(\widetilde{q}_{\widetilde{\varepsilon}}^{(r-\mu)}) \geqslant \pi^{1/p-\mu} \left\{ \int\limits_0^\pi \Big(1 - \operatorname{sinc}(\tau)\Big)^{kp} d\tau \right\}^{-1/p} \nu^{-\mu}\, \widetilde{\Xi}_{r,\nu/2}(\Phi, \varepsilon).$$

Учитывая, что $\widetilde{q}_{\widetilde{\varepsilon}} \in W_p^r(\widetilde{\Omega}_k, \Phi)$, из данного неравенства имеем

$$\sup\Big\{\mathcal{A}_{\nu\pi}(f^{(r-\mu)}) : f \in W_p^r(\widetilde{\Omega}_k, \Phi)\Big\} \geqslant \pi^{1/p-\mu} \left\{ \int\limits_0^\pi \Big(1 - \operatorname{sinc}(\tau)\Big)^{kp} d\tau \right\}^{-1/p} \nu^{-\mu}\, \widetilde{\Xi}_{r,\nu/2}(\Phi, \varepsilon).$$

Вычисляя верхнюю грань по $\varepsilon \in (0, \sigma_*)$ от правой части последнего неравенства, записываем оценку снизу

$$\sup\Big\{\mathcal{A}_{\nu\pi}(f^{(r-\mu)})\colon f \in W_p^r(\widetilde{\Omega}_k, \Phi)\Big\} \geqslant \pi^{1/p-\mu} \left\{ \int\limits_0^\pi \Big(1 - \operatorname{sinc}(\tau)\Big)^{kp} d\tau \right\}^{-1/p} \nu^{-\mu}\Phi\left(\frac{1}{\nu}\right). \tag{100}$$

Требуемое равенство (98) получаем из неравенств (99), (100).

Следствие 8 доказано.

В заключение отметим, что теоремы 1, 2 являются своеобразным распространением результатов работ [18 – 20] на случай наилучшего приближения функций, заданных на всей вещественной оси, подпространствами $\mathbb{B}_{\sigma,2}$ целых функций экспоненциального типа $\sigma \in (0,\infty)$. Теоремы 3, 4 также можно рассматривать как своеобразное распространение на случай $L_2(\mathbb{R})$ тех результатов из указанных работ, которые связаны с вычислением точных значений n-поперечников классов 2π-периодических функций, определенных с помощью специальных модулей непрерывности k-го порядка в $L_2([0, 2\pi])$.

1. *Бернштейн С. Н.* О наилучшем приближении непрерывных функций на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени. – 1912. – Собр. соч. Т. 2. – М.: АН СССР, 1952. – С. 371 – 375.
2. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.; Л.: Гостехиздат, 1947. – 324 с.
3. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
4. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
5. *Ибрагимов И. И.* Теория приближения целыми функциями. – Баку: Элм, 1979. – 486 с.
6. *Ибрагимов И. И., Насибов Ф. Г.* Об оценке наилучшего приближения суммируемой функции на вещественной оси посредством целых функций конечной степени // Докл. АН СССР. – 1970. – **194**, № 5. – С. 1013 – 1016.
7. *Насибов Ф. Г.* О приближении в L_2 целыми функциями // Докл. АН АзербССР. – 1986. – **42**, № 4. – С. 3 – 6.
8. *Попов В. Ю.* О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа // Изв. вузов. Математика. – 1972. – № 6. – С. 65 – 73.

9. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближения целыми функциями. I // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 1. – С. 102 – 112.
10. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближения целыми функциями. II // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 2. – С. 210 – 222.
11. *Vakarchuk S. B.* Exact constant in an inequality of Jackson type for L_2-approximation on the line and exact values of mean widths of functional classes // East J. Approxim. – 2004. – **10**, № 1-2. – P. 27 – 39.
12. *Лигун А. А., Доронин В. Г.* Точные константы в неравенствах типа Джексона для L_2-аппроксимации на прямой // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 1. – С. 92 – 98.
13. *Вакарчук С. Б., Вакарчук М. Б.* О наилучшем среднеквадратическом приближении целыми функциями конечной степени на прямой // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. мат. – 2009. – **17**, № 6/1. – С. 36 – 41.
14. *Вакарчук С. Б., Доронин В. Г.* Наилучшие среднеквадратические приближения целыми функциями конечной степени на прямой и точные значения средних поперечников функциональных классов // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 8. – С. 1032 – 1043.
15. *Янченко С. Я.* Наближення класів функцій багатьох змінних цілими функціями спеціального вигляду // Укр. мат. журн. – 2000. – **62**, № 8. – С. 1124 – 1138.
16. *Вакарчук С. Б.* О некоторых экстремальных задачах теории аппроксимации функций на вещественной оси. I // Укр. мат. вісн. – 2012. – **9**, № 3. – С. 401 – 429.
17. *Вакарчук С. Б.* О некоторых экстремальных задачах теории аппроксимации функций на вещественной оси. II // Укр. мат. вісн. – 2012. – **9**, № 4. – С. 578 – 602.
18. *Вакарчук С. Б., Забутная В. И.* Точное неравенство типа Джексона – Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов // Мат. заметки. – 2009. – **86**, № 3. – С. 328 – 336.
19. *Вакарчук С. Б., Забутная В. И.* Неравенства типа Джексона – Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Мат. заметки. – 2012. – **92**, № 4. – С. 497 – 514.
20. *Вакарчук С. Б., Забутная В. И.* О наилучшем полиномиальном приближении в пространстве L_2 и поперечниках некоторых классов функций // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 8. – С. 1025 – 1032.
21. *Абилов В. А., Абилова Ф. В.* Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Мат. заметки. – 2004. – **76**, № 6. – С. 803 – 811.
22. *Kokilashvili V., Yildirir Y. E.* On the approximation in weighted Lebesque space // Proc. A. Razmadze Math. Inst. – 2007. – **143**. – P. 103 – 113.
23. *Akgün R.* Sharp Jackson and converse theorem of trigonometric approximation in weighted Lebesque spaces // Proc. A. Razmadze Math. Inst. – 2010. – **152**. – P. 1 – 18.
24. *Хургин Я. И., Яковлев В. П.* Финитные функции в физике и технике. – М.: Наука, 1971. – 408 с.
25. *Титчмарш Э.* Введение в теорию интегралов Фурье. – М.: КомКнига, 2005. – 480 с.
26. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. – М.: Мир, 1965. – 276 с.
27. *Рыбасенко В. Д., Рыбасенко И. Д.* Элементарные функции. Формулы, таблицы, графики. – М.: Наука, 1987. – 416 с.
28. *Черных Н. И.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки. — 1967. – **2**, № 5. – С. 513 – 522.
29. *Вакарчук С. Б., Забутная В. И.* Некоторые вопросы теории аппроксимации 2π-периодических функций в пространствах $L_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$ // Проблеми теорії наближення функцій і суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2004. – **1**, № 1. – С. 25 – 41.
30. *Магарил-Ильяев Г. Г.* Средняя размерность, поперечники и оптимальное восстановление соболевских классов функций на прямой // Мат. сб. – 1991. – **182**, № 11. – С. 1635 – 1656.
31. *Магарил-Ильяев Г. Г.* Средняя размерность и поперечники классов функций на прямой // Докл. АН СССР. – 1991. – **318**, № 1. – С. 35 – 38.
32. *Тихомиров В. М.* Об аппроксимативных характеристиках гладких функций многих переменных // Теория кубатурных формул и вычислительная математика. – Наука: Новосибирск, 1980. – С. 183 – 188.

Получено 31.03.13