УДК 517.9:519.46

**Т. А. Баранник** (Полтав. нац. пед. ун-т ім. В. Г. Короленка)

# УМОВНА СИМЕТРІЯ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ РЕАКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

The conditional symmetry of the system of nonlinear reaction-diffusion equations is investigated. It is shown that the operators of conditional symmetry exist for the systems of nonlinear reaction-diffusion equations with an arbitrary number of independent variables. Moreover, these operators are found in the explicit form.

Исследована условная симметрия системы нелинейных уравнений реакции-диффузии. Установлено, что для систем нелинейных уравнений реакции-диффузии с произвольным количеством независимых переменных существуют операторы условной симметрии, причем эти операторы найдены в явном виде.

**1. Вступ.** У даній роботі досліджується умовна симетрія системи нелінійних рівнянь реакції-дифузії

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A\Delta_m u = f(u), \tag{1}$$

де $u$ — стовпець $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $f$ — стовпець $(f^1, f^2, \ldots, f^n)$, кожна з компонент вектора $u$ є функцією від змінних $t$, $x_1, \ldots, x_m$, $f$ — вектор-функція від $u$, $A$ — невироджена квадратна матриця порядку $n$, $\Delta_m u = \sum_{i=1}^{m} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

Такі системи знаходять широке застосування в теорії тепломасопереносу, а також в математичній біології та хімії. Відмітимо, що важливими частинними випадками системи (1) для $n = 2$ є комплексне рівняння Ландау – Гінзбурга і нелінійне рівняння Шрьодінгера в $m$-вимірному просторі, які використовуються у нелінійній оптиці, а також нелінійній квантовій механіці. Тому симетрійний аналіз системи рівнянь (1) має прикладне значення і може бути використаний, наприклад, для побудови точних розв'язків широкого класу фізичних і біологічних систем. Перша спроба класифікувати систему (1) у випадку $n = 2$ належить Ю. А. Данилову [1], який обмежився випадком діагональної матриці $A$. Дослідження лієвських симетрій системи (1) для $n = 2$ з діагональною матрицею $A$ було проведено у роботах [2 – 4], а з матрицею дифузії $A$ загального вигляду — у роботах [5, 6]. Завершеного вигляду ця класифікація набрала у роботі [7 – 9]. У роботах А. Г. Нікітіна і Р. Вільтшире [5, 6] запропоновано ефективний підхід до дослідження класичної і умовної симетрій, який може бути застосований до рівняння (1) з довільними $n$ і $m$.

У роботі В. І. Фущича і М. І. Сєрова [10] було започатковано вивчення умовної симетрії одновимірного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u), \tag{2}$$

яке є частинним випадком рівняння (1) і відповідає значенням $n = m = 1$. Вони показали, що у випадку $f(u) = au^3 + bu^2 + c$ рівняння (2) умовно інваріантне відносно оператора

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2}{3}\sqrt{2a}u\frac{\partial}{\partial x} + \frac{3}{2}(au^3 + bu + c)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Вичерпний аналіз умовних симетрій рівняння (2) був виконаний П. Кларксоном і Е. Мансфелд [11]. Вони встановили, що рівняння (2) умовно інваріантне відносно таких операторів:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{3}{x}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{3}{x^2}u\frac{\partial}{\partial u}, \quad \text{якщо} \quad f(u) = au^3,$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial t} + 3\mu\tan(\mu x)\frac{\partial}{\partial x} - 3\mu^2\sec^2(\mu x)u\frac{\partial}{\partial u}, \quad \text{якщо} \quad f(u) = au^3 - 2\mu^2 u,$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial t} + 3\mu\coth(\mu x)\frac{\partial}{\partial x} - 3\mu^2\text{cosech}^2(\mu x)u\frac{\partial}{\partial u}, \quad \text{якщо} \quad f(u) = au^3 + 2\mu^2 u.$$

Ці симетрії дозволяють побудувати точні розв'язки рівняння (2), які виражаються через еліптичні функції Якобі.

У роботі [12] вивчалась умовна симетрія рівняння (1) для $n = 1$ і довільного $m$.

У даній роботі ми узагальнюємо результати робіт [11, 12] на векторне рівняння (1).

**2. Система визначальних рівнянь для знаходження операторів умовної симетрії.** Для довільної функції $f(u)$ рівняння (1) зберігає симетрію відносно групи $E(n)$, генератори якої мають форму

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad P_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad J_{ab} = x_a\frac{\partial}{\partial x_b} - x_b\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad a \neq b, \quad a, b = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Беручи до уваги симетрію рівняння (1) відносно групи обертань $O(n)$, генератори якої $J_{ab}$ наведено у (3), доцільно шукати розв'язок рівняння (1) у вигляді

$$u = u(t, x), \qquad x = (x_1^2 + \ldots + x_m^2)^{1/2}.$$

У підсумку приходимо до редукованого рівняння

$$u_t - Au_{xx} - A\frac{m-1}{x}u_x = f(u). \tag{4}$$

Дослідимо умовну симетрію рівняння (4). Головна ідея методу, запропонованого у [5, 6], полягає в тому, що оператор симетрії (лієвської або умовної) шукається у вигляді

$$Q = \eta\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} - \pi^a\frac{\partial}{\partial u^a},$$

де $\pi^a = \pi^{ab}u_b - \omega^a$ і функції $\pi^{ab}, \eta$ і $\xi$ залежать тільки від $t$ і $x$. Коефіцієнти $\eta, \xi, \pi^a$ визначаються з умови, що для оператора

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - A\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{m-1}{x}A\frac{\partial}{\partial x}$$

комутатор $[Q, L]$ допускає зображення

$$[Q, L] = \Lambda L + \varphi + \theta Q, \tag{5}$$

де $\Lambda,\ \varphi$ і $\theta$ — квадратні матриці порядку $n$, елементи яких є функціями від $(t, x)$.

В результаті отримуємо таку систему рівнянь:

$$2A\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\Lambda A - [A, \pi],$$

$$-\frac{\partial \xi}{\partial t} + 2A\frac{\partial \pi}{\partial x} + \xi\frac{m-1}{x^2}A + \frac{m-1}{x}\frac{\partial \xi}{\partial x}A + A\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \theta\xi - \frac{m-1}{x}\Lambda A, \tag{6}$$

$$\varphi + \theta\pi = A\frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} + \frac{m-1}{x}A\frac{\partial \pi}{\partial x} - \frac{\partial \pi}{\partial t}, \qquad \Lambda + \theta = 0,$$

де $\pi = (\pi^{ab})$ — квадратна матриця порядку $n$.

Якщо $Q$ є оператором умовної симетрії, то в рівності (5) $\theta \neq 0$.

Розв'язавши систему рівнянь (6) і визначивши відповідні матриці $\Lambda, \pi = (\pi^{ab}), \varphi$, ми можемо знайти всі нелінійності $f^k$, розв'язавши систему диференціальних рівнянь першого порядку

$$(\Lambda^{kb} - \pi^{kb})f^b + \varphi^{kb}u^b + L\omega^k + \theta^{kb}\omega^b = (-\pi^{ab}u_b + \omega^a)\frac{\partial f^k}{\partial u_a}. \tag{7}$$

**3. Умовна симетрія одновимірного векторного рівняння (1).** Ми узагальнюємо результати роботи [11] на векторне рівняння реакції-дифузії. Буде показано, що оператори умовної симетрії існують для будь-якої кількості $n$ залежних змінних. Для визначення функції $f(u)$ рівняння (1), що допускає оператор умовної симетрії, буде суттєво використано систему визначальних рівнянь (6), (7).

**Теорема 1.** *Рівняння* (4) *для* $m = 1$ *і*

$$A = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & 3I_{n-l} \end{pmatrix}, \quad I_l \text{ — одинична матриця порядку } \quad l,$$

*умовно інваріантне відносно оператора*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{3}{x}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{3}{x^2}\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + u_l\frac{\partial}{\partial u_l}\right), \quad 1 \leq l \leq n,$$

*тоді і тільки тоді, коли*

$$f^i = u_i^3\varphi_i, \quad i = 1, \ldots, l, \qquad f^j = u_1^2\varphi_j, \quad j = l+1, \ldots, n,$$

*де* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *— довільні функції від змінних* $\dfrac{u_2}{u_1}, \ldots, \dfrac{u_l}{u_1}, \ u_{l+1}, \ldots, u_n$.

***Доведення.*** *Необхідність*. Нехай $X_1$ — оператор умовної симетрії рівняння (4) для $m = 1$. У даному випадку

$$\xi = -\frac{3}{x}, \qquad \pi = \frac{3}{x^2}\begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & O_{n-l} \end{pmatrix},$$

$O_{n-l}$ — нульова матриця порядку $n - l$, якщо $n - l > 0$, і $\pi = \dfrac{3}{x^2}I_n$, якщо $l = n$. З першого рівняння системи (6) знаходимо $\Lambda = -\dfrac{6}{x^2}I_n$. Із третього і четвертого рівнянь системи (6) випливає, що $\varphi = 0$. Тому система рівнянь для визначення функцій $f^1, \ldots, f^n$ має вигляд

$$-3f^i + u_1\frac{\partial f^i}{\partial u_1} + \ldots + u_l\frac{\partial f^i}{\partial u_l} = 0, \quad i = 1, \ldots, l,$$
$$-2f^j + u_1\frac{\partial f^j}{\partial u_1} + \ldots + u_l\frac{\partial f^j}{\partial u_l} = 0, \quad j = l+1, \ldots, n. \tag{8}$$

Введемо допоміжну змінну $\tau$:

$$\frac{\partial u_i}{\partial \tau} = u_i, \quad i = 1, \ldots, l,$$
$$\frac{\partial u_j}{\partial \tau} = 0, \quad j = l+1, \ldots, n. \tag{9}$$

Тоді з використанням змінної $\tau$ система (8) набирає вигляду

$$-3f^i + \frac{\partial f^i}{\partial \tau} = 0, \quad i = 1, \ldots, l,$$

$$-2f^j + \frac{\partial f^j}{\partial \tau} = 0, \quad j = l+1, \ldots, n.$$

Розв'язуючи її, знаходимо

$$f^i = C_i e^{3\tau}, \quad i = 1, \ldots, l,$$

$$f^j = C_j e^{2\tau}, \quad j = l+1, \ldots, n,$$

де $C_1, \ldots, C_n$ — довільні сталі.

Визначимо перші інтеграли системи (9):

$$\frac{u_2}{u_1} = \bar{C}_2, \ldots, \frac{u_l}{u_1} = \bar{C}_l, u_{l+1} = \bar{C}_{l+1}, \ldots, u_n = \bar{C}_n.$$

Тому загальний розв'язок системи (8) має вигляд

$$f^i = u_i^3\varphi_i, \quad i = 1, \ldots, l, \qquad f^j = u_1^2\varphi_j, \quad j = l+1, \ldots, n,$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $\dfrac{u_2}{u_1}, \ldots, \dfrac{u_l}{u_1}, u_{l+1}, \ldots, u_n$. Необхідність доведено.

*Достатність* випливає з того, що функції $\xi$, $\pi$, $\Lambda$, $\varphi = 0$, $\theta = -\Lambda$ , а також функції $f^1, \ldots, f^n$, наведені вище, задовольняють систему визначальних рівнянь (6), (7).

**Теорема 2.** *Рівняння* (4) *для* $m = 1$ *і*

$$A = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & 3I_{n-l} \end{pmatrix}$$

*умовно інваріантне відносно оператора*

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial t} + 3\mu\tan(\mu x)\frac{\partial}{\partial x} - 3\mu^2\mathrm{sec}^2(\mu x)\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + u_l\frac{\partial}{\partial u_l}\right), \quad 1 \le l \le n,$$

*тоді і тільки тоді, коли*

$$f^i = u_i^3\varphi_i - 2\mu^2 u_i, \quad i = 1, \ldots, l, \qquad f^j = u_1^2\varphi_j, \quad j = l+1, \ldots, n,$$

*де* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *— довільні функції від змінних* $\dfrac{u_2}{u_1}, \ldots, \dfrac{u_l}{u_1}$, $u_{l+1}, \ldots, u_n$.

**Теорема 3.** *Рівняння* (4) *для* $m = 1$ *і*

$$A = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & 3I_{n-l} \end{pmatrix}$$

*умовно інваріантне відносно оператора*

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial t} - 3\mu \coth(\mu x)\frac{\partial}{\partial x} - 3\mu^2 \mathrm{cosech}^2(\mu x)\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + u_l\frac{\partial}{\partial u_l}\right), \quad 1 \le l \le n,$$

*тоді і тільки тоді, коли*

$$f^i = u_i^3\varphi_i + 2\mu^2 u_i, \quad i = 1, \ldots, l, \qquad f^j = u_1^2\varphi_j, \quad j = l+1, \ldots, n,$$

*де* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *— довільні функції від змінних* $\dfrac{u_2}{u_1}, \ldots, \dfrac{u_l}{u_1}, u_{l+1}, \ldots, u_n$.

Теореми 2 і 3 доводяться за тією ж схемою, що і теорема 1.

**4. Умовна симетрія багатовимірного векторного рівняння (1).** Ми узагальнюємо результати робіт [11, 12] на багатовимірне рівняння реакції-дифузії шляхом редукції його до одновимірного рівняння (4).

**Теорема 4.** *Рівняння* (4) *для* $m \ne 2$, $m \ne 4$ *і*

$$A = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & -\dfrac{m-4}{m} I_{n-l} \end{pmatrix}$$

*умовно інваріантне відносно оператора*

$$Y = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{m-4}{x}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{(m-2)(m-4)}{x^2}\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + u_l\frac{\partial}{\partial u_l}\right), \quad 1 \le l \le n,$$

*тоді і тільки тоді, коли*

$$f^i = u_i^{\frac{m-4}{m-2}}\varphi_i, \quad i = 1, \ \ldots, l, \qquad f^j = u_1^{-\frac{2}{m-2}}\varphi_j, \quad j = l+1, \ldots, n,$$

*де* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *— довільні функції від змінних* $\dfrac{u_2}{u_1}, \ldots, \dfrac{u_l}{u_1}, u_{l+1}, \ldots, u_n$.

**Теорема 5.** *Рівняння* (4) *для* $m = 3$ *і* $A = I_n$ *умовно інваріантне відносно оператора*

$$Y = \frac{\partial}{\partial t} + \left(k - \frac{1}{x}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{x^2}\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + u_n\frac{\partial}{\partial u_n}\right), \quad k \ne 0,$$

*тоді і тільки тоді, коли*

$$f^i = u_i^{-1}\varphi_i, \quad i = 1, \ \ldots, n,$$

*де* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *— довільні функції від змінних* $\dfrac{u_2}{u_1}, \ldots, \dfrac{u_n}{u_1}$.

Теореми 4 і 5 доводяться за тією ж схемою, що і теорема 1.

**Теорема 6.** *Рівняння* (4) *для* $m = 2$ *і* $A = aI_n$ *умовно інваріантне відносно оператора*

$$Y = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{2a}{x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{x^2}\left(b_1\frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + b_n\frac{\partial}{\partial u_n}\right), \quad b_i \neq 0,$$

*для* $i = 1, \ldots, n$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$f^i = \exp\left(-\frac{4a}{b_i}u_i\right)\varphi_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

*де* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *— довільні функції від змінних* $b_1u_2 - b_2u_1, b_1u_3 - b_3u_1, \ldots, b_1u_n - b_nu_1$.

***Доведення.*** У даному випадку $\xi = -\dfrac{2a}{x}$, $\pi = 0$. З першого рівняння системи (6) знаходимо

$$\Lambda = -2\frac{\partial\xi}{\partial x}I_n = -\frac{4a}{x^2}I_n.$$

З третього і четвертого рівнянь системи (6) випливає, що $\varphi = 0$, $\theta = -\Lambda = \dfrac{4a}{x^2}I_n$. Враховуючи, що $\omega_k = \dfrac{b_k}{x^2}$ для $k = 1, \ldots, n$ і

$$L\omega_k + \theta^{kk}\omega_k = \left(-a\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{a}{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{b_k}{x^2} + \frac{4ab_k}{x^4} = 0,$$

отримуємо систему рівнянь для визначення функцій $f^1, \ldots, f^n$:

$$-4af^k = b_1\frac{\partial f^k}{\partial u_1} + \ldots + b_n\frac{\partial f^k}{\partial u_n}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

Введемо допоміжну змінну $\tau$:

$$\frac{\partial u_i}{\partial\tau} = b_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Тоді з використанням змінної $\tau$ система (10) набирає вигляду

$$-4af^k = \frac{\partial f^k}{\partial\tau}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Розв'язуючи її, знаходимо

$$f^k = C_k\exp(-4a\tau), \quad k = 1, \ldots, n,$$

де $C_1, \ldots, C_n$ — довільні сталі. Визначимо перші інтеграли системи (11) :

$$b_1u_i - b_iu_1 = \bar{C}_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тому загальний розв'язок системи (10) має вигляд

$$f^k = \exp\left(-\frac{4a}{b_k}u_k\right)\varphi_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $b_1u_i - b_iu_1$, $i = 1, \ldots, n$.

**5. Висновки.** Анзаци, що відповідають умовним симетріям рівняння (1), редукують це рівняння до системи звичайних диференціальних рівнянь. Так, система рівнянь

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = u_1^3 \varphi_1, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = u_2^3 \varphi_2, \tag{12}$$

де $\varphi_1, \varphi_2$ — довільні функції від змінних $\dfrac{u_2}{u_1}$, на підставі теореми 1 умовно інваріантна відносно оператора

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{3}{x}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{3}{x^2}\left(u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Анзац, який відповідає операторові $X_1$, має вигляд

$$u_1 = 2x\omega_1(z), \qquad u_2 = 2x\omega_2(z),$$

де $z = 6t + x^2$, і редукує (12) до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\omega_1'' + \omega_1^3 \varphi_1 = 0, \qquad \omega_2'' + \omega_2^3 \varphi_2 = 0, \tag{13}$$

де $\varphi_1, \varphi_2$ — довільні функції від $\dfrac{\omega_2}{\omega_1}$. Для деяких функцій $\varphi_1, \varphi_2$ ця система може бути проінтегрована в квадратурах. Системи рівнянь (12) і (13) детально розглянуто в [13].

1. *Danilov Yu. A.* Group analysis of the Turing systems and of its analogues. – (Preprint / Kurchatov Inst. Atom. Energy; IAE 3287/1).
2. *Cherniha R., King I. R.* Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems: I // J. Phys. A: Math. and Gen. – 2000. – **33**. – P. 267 – 282.
3. *Cherniha R., King I. R.* Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems: I. Addendum // J. Phys. A: Math. and Gen. – 2000. – **33**. – P. 7839 – 7841.
4. *Cherniha R., King I. R.* Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems: II // J. Phys. A: Math. and Gen. – 2002. – **36**. – P. 405 – 425.
5. *Nikitin A. G., Wiltshire R.* Symmetries of systems of nonlinear reaction-diffusion equations // Proc. Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine. – 2000. – **30**, Pt 1. – P. 47 – 59.
6. *Nikitin A. G., Wiltshire R. J.* Systems of reaction-diffusion equations and their symmetry properties // J. Math. Phys. – 2001. – **42**, № 4. – P. 1667 – 1688.
7. *Nikitin A. G.* Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. I. Generalized Ginsburg – Landau equations // J. Math. Anal. and Appl. – 2006. – **324**, № 1. – P. 615 – 628.
8. *Nikitin A. G.* Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. II. Generalized Turing systems // J. Math. Anal. and Appl. – 2007. – **332**, № 1. – P. 666 – 690.
9. *Nikitin A. G.* Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with triangular diffusion matrix // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, № 3. – P. 395 – 441.
10. *Фущич В. И., Серов Н. И.* Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. – 1990. – № 7. – С. 24 – 28.
11. *Clarkson P., Mansfield E.* Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations // Physica D. – 1993. – **70**. – P. 250 – 288.
12. *Баранник Т. А.* Умовна симетрія і точні розв'язки багатовимірного рівняння реакції-дифузії // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 10. – С. 1416 – 1420.
13. *Barannyk T. A., Nikitin A. G.* Solitary wave solutions for heat equations // Proc. Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine. – 2004. – **50**, Pt 1. – P. 34 – 39.

Одержано 12.02.15