УДК 519.544

Ф. Н. Лиман, Т. Д. Лукашова (Сум. гос. пед. ун-т им. А. С. Макаренко)

О НОРМЕ РАЗЛОЖИМЫХ ПОДГРУПП В НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУППАХ

We study the relations between the properties of nonperiodic groups and their norms of decomposable subgroups. In particular, we analyze the influence of restrictions imposed on the norm of decomposable subgroups on the properties of the group provided that this norm is non-Dedekind. We also describe the structure of nonperiodic locally nilpotent groups for which the indicated norm is non-Dedekind. Furthermore, some relations between the norm of noncyclic Abelian subgroups and the norm of decomposable subgroups are established.

Розглядаються взаємозв'язки між властивостями неперіодичних груп та їх норм розкладних підгруп. Зокрема, досліджено вплив обмежень, які задовольняє норма розкладних підгруп, на властивості самої групи за умови, що така норма недедекіндова. Описано будову неперіодичних локально нільпотентних груп, у яких вказана норма є недедекіндовою. Окрім того, встановлено деякі зв'язки між нормою абелевих нециклічних та нормою розкладних підгруп.

Введение. Пусть Σ — система всех подгрупп группы, которые имеют определенное теоретико-групповое свойство. Напомним, что Σ-нормой группы G называется пересечение нормализаторов всех подгрупп группы G, входящих в систему Σ. В частности, если Σ состоит из всех подгрупп групп G, то соответствующая Σ-норма называется нормой группы [1].

Авторы продолжают исследование взаимосвязей между свойствами группы и свойствами ее Σ-норм для различных систем подгрупп Σ. В настоящей статье рассматриваются свойства норм разложимых подгрупп в непериодических локально разрешимых группах и влияние таких норм на свойства самой группы. Заметим, что аналогичные исследования в классе локально конечных групп были проведены в работе [2], а отдельные результаты настоящей статьи анонсированы в [3].

Напомним, что *разложимой* называется подгруппа группы G, которую можно представить в виде прямого произведения двух нетривиальных множителей [4]. Соответственно, пересечение нормализаторов всех разложимых подгрупп группы G будем называть нормой разложимых подгрупп и обозначать ее N_G^d. Заметим, что для групп, не содержащих разложимых подгрупп, будем считать $G = N_G^d$.

Из определения нормы N_G^d следует, что в случае $N_G^d = G$ в группе G разложимые подгруппы либо являются нормальными, либо не существуют. Неабелевы группы с таким свойством были изучены в работе [4] и названы там di-группами. Далее в работе будем использовать следующие два предложения, описывающие строение di-групп.

Предложение 1 [4]. *Неабелевы локально конечные и непериодические локально разрешимые di-группы, у которых все подгруппы неразложимы, исчерпываются группами следующих типов*:

1) *кватернионная* 2*-группа* (*конечная или бесконечная*);

2) *группа Фробениуса* $G = A \leftthreetimes B$, *где* A — *локально циклическая* p*-группа,* B — *циклическая* q*-группа,* p *и* q — *простые числа и* $(p-1, q) = q$;

3) *группа Фробениуса* $G = A \leftthreetimes B$, *где* A — *абелева группа без кручения ранга* 1, B — *бесконечная циклическая группа или группа порядка* 2.

Группой Фробениуса (см. [5]) будем называть полупрямое произведение $G = A \leftthreetimes B$ двух нетривиальных групп A и B, где $B \cap g^{-1}Bg = E$ для любого элемента $g \in G\backslash B$ и $A\backslash E = G\backslash \bigcup_{g\in G} \left(g^{-1}Bg\right)$.

Предложение 2 [4]. *Непериодические di-группы, каждая из которых имеет разложимую подгруппу, являются группами одного из следующих видов*:

1) $G = A \leftthreetimes \langle b\rangle$, *где A — непериодическая абелева группа без инволюций, содержащая разложимую подгруппу,* $|b| = 2$ *и* $b^{-1}ab = a^{-1}$ *для любого элемента* $a \in A$;

2) $G = A\langle b\rangle$, *где A — непериодическая абелева группа с единственной инволюцией b^2 и* $b^{-1}ab = a^{-1}$ *для любого элемента* $a \in A$;

3) $G = \left(\left\langle b^2\right\rangle \times C\right)\langle b\rangle$, *где $|b| = 8$, C — абелева группа без кручения ранга 1, а фактор-группа $G/\left\langle b^4\right\rangle$ содержит бесконечные абелевы подгруппы и все они нормальны в $G/\left\langle b^4\right\rangle$;*

4) $G = Q \times B$, *где Q — группа кватернионов, B — абелева группа без кручения ранга* 1;

5) $G = \langle a\rangle \leftthreetimes B$, $|a| = p^n$, *— простое число* $(n > 1$ *при* $p = 2)$, *B — неполная абелева группа без кручения ранга 1 и коммутант группы G имеет простой порядок.*

Таким образом, строение непериодических недедекиндовых локально разрешимых групп, совпадающих со своей нормой разложимых подгрупп, известно. Поэтому естественно поставить вопрос о свойствах непериодических групп, в которых такая норма недедекиндова и является собственной подгруппой.

1. Непериодические группы с недедекиндовой нормой разложимых подгрупп. В этом пункте рассматриваются взаимосвязи между свойствами непериодических локально разрешимых групп и их норм разложимых подгрупп при дополнительном условии недедекиндовости таких норм.

Далее будет часто использоваться следующее утверждение.

Лемма 1.1 [2]. *Пусть G — группа, содержащая неединичную N_G^d-допустимую подгруппу H такую, что $H \cap N_G^d = E$, где N_G^d — норма разложимых подгрупп группы G. Тогда подгруппа N_G^d дедекиндова.*

Опираясь на лемму 1.1, нетрудно показать, что норма N_G^d разложимых подгрупп непериодической группы G дедекиндова, если она конечна или содержит отличную от единичной конечную характеристическую подгруппу. В частности, имеет место следующее утверждение.

***Следствие* 1.1.** *Если норма N_G^d разложимых подгрупп локально разрешимой непериодической группы G удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп, то она дедекиндова.*

Доказательство. По условию норма N_G^d разложимых подгрупп группы G является локально разрешимой периодической группой с условием минимальности для абелевых подгрупп. Тогда по теореме 4.3 [6] N_G^d содержит характеристическую, а значит, нормальную в G конечную абелеву подгруппу A. Поскольку $[G : C_G(A)] < \infty$, то подгруппа $C_G(A)$ непериодическая. Следовательно, существует элемент $x \in C_G(A)$ такой, что $|x| = \infty$. Тогда подгруппа $\langle A, x\rangle = A \times \langle x\rangle$ разложима и является N_G^d-допустимой. Значит, подгруппа $\langle x\rangle^{|A|}$ также будет N_G^d-допустимой, причем $\langle x\rangle^{|A|} \cap N_G^d = E$. В силу леммы 1.1 норма N_G^d дедекиндова, что и требовалось доказать.

Дальнейшие утверждения характеризуют влияние нормы разложимых подгрупп на свойства группы.

Теорема 1.1. *Пусть G — непериодическая группа с недедекиндовой нормой N_G^d разложимых подгрупп. Тогда произвольная разложимая абелева подгруппа группы G будет смешанной в том и только в том случае, когда смешанной является каждая разложимая абелева подгруппа нормы N_G^d.*

Доказательство. Прямое утверждение теоремы очевидно. Докажем правильность обратного утверждения. Пусть все разложимые абелевы подгруппы нормы N_G^d являются смешанными, а сама группа G содержит разложимую подгруппу $M = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$, где $|x| = |y| = \infty$ или $|x| = p$, $|y| = q$, p и q — простые числа. Из описания непериодических di-групп (предложение 2) следует, что в этом случае N_G^d является группой одного из типов:

1) $N_G^d = A \leftthreetimes \langle b \rangle$, где $A = A_1 \times C$ — непериодическая абелева группа без инволюций, A_1 — абелева группа без кручения ранга 1, C — локально циклическая p-группа (p — нечетное простое число), $|b| = 2$ и $b^{-1}ab = a^{-1}$ для любого элемента $a \in A$;

2) $N_G^d = A\langle b \rangle$, где $A = A_1 \times C$ — непериодическая абелева группа с одной инволюцией b^2, A_1 — абелева группа без кручения ранга 1, C — локально циклическая 2-группа, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для любого элемента $a \in A$;

3) $N_G^d = (\langle b^2 \rangle \times C)\langle b \rangle$, где $|b| = 8$, C — абелева группа без кручения ранга 1 и в фактор-группе $G/\langle b^4 \rangle$ все бесконечные абелевы подгруппы нормальны;

4) $N_G^d = Q \times B$, где Q — группа кватернионов, B — абелева группа без кручения ранга 1;

5) $N_G^d = \langle a \rangle \leftthreetimes B$, где $|a| = p^n$, p — простое число $(n > 1$ при $p = 2)$, B — неполная абелева группа без кручения ранга 1 и коммутант группы G имеет простой порядок.

В каждом из этих случаев норма N_G^d содержит нормальную в G конечную неединичную абелеву подгруппу F, откуда $[G : C_G(F)] < \infty$.

Если $|M| = \infty$, то поскольку в норме N_G^d все абелевы подгруппы без кручения имеют ранг 1, можно считать, что $N_G^d \cap \langle y \rangle = E$. Далее из условия $[G : C_G(F)] < \infty$ следует, что $y^m \in C_M(F)$ для некоторого $m \in N$ и потому $\langle F, y^m \rangle$ — N_G^d-допустимая подгруппа. Значит, подгруппа $\langle F, y^m \rangle^{|F|} = \langle y^{m|F|} \rangle$ также будет N_G^d-допустимой. Применяя лемму 1.1, делаем вывод, что в этом случае, вопреки условию, норма N_G^d дедекиндова.

Предположим, что $|M| < \infty$ и $|M| = pq$. В этом случае норма N_G^d содержит элемент a такой, что $|a| = \infty$ и $a \in C_G(M)$. Но тогда подгруппы $\langle a, x \rangle$ и $\langle a, y \rangle$ будут N_G^d-допустимыми, а значит, N_G^d-допустимыми будут и подгруппы $\langle x \rangle$ и $\langle y \rangle$. Так как $\langle x, y \rangle \nsubseteq N_G^d$, то по крайней мере одна из подгрупп $\langle x \rangle$ или $\langle y \rangle$ не принадлежит N_G^d. Применяя лемму 1.1, приходим к выводу, что и в этом случае норма N_G^d дедекиндова.

Теорема 1.1 доказана.

***Следствие* 1.2.** *Если норма N_G^d абелевых разложимых подгрупп непериодической группы G недедекиндова и все ее разложимые абелевы подгруппы являются смешанными, то фактор-группа G/N_G^d периодическая.*

Лемма 1.2. *Если непериодическая группа G содержит абелеву подгруппу M, которая является либо свободной группой ранга $r \geq 2$, либо периодической непримарной группой, то каждая подгруппа из M будет N_G^d-допустимой в G.*

Доказательство. Ограничимся случаем, когда $M = \langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle$, где $|x_1| = |x_2| = \infty$ или $|x_1| = p^m$, $|x_2| = q^n$, $n, m \in N$, p и q — различные простые числа.

В первом случае для любого неединичного элемента $x \in M$ найдется такой элемент $y \in M$, что $|y| = \infty$ и $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = E$. Тогда для каждого натурального числа k подгруппа $\langle x, y^k \rangle$ будет N_G^d -допустимой. Следовательно, подгруппа

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\langle x, y^k\right\rangle = \langle x\rangle$$

также является N_G^d-допустимой. Но тогда N_G^d-допустимыми будут все подгруппы из M.

Во втором случае из разложимости M следует, что она N_G^d-допустима, а значит, N_G^d-допустимыми будут ее характеристические подгруппы $\langle x_1\rangle$ и $\langle x_2\rangle$. Из этого заключаем, что каждая подгруппа из M будет N_G^d-допустимой.

Лемма 1.2 доказана.

Теорема 1.2. *Непериодическая группа G с недедекиндовой нормой N_G^d разложимых подгрупп тогда и только тогда не содержит разложимых подгрупп, когда таких подгрупп не содержит ее норма N_G^d.*

Доказательство. Прямое утверждение теоремы очевидно. Докажем справедливость обратного утверждения. Пусть норма N_G^d разложимых подгрупп группы G недедекиндова и не содержит разложимых подгрупп, а в группе G такие подгруппы имеются. Тогда G содержит прямое произведение $M = \langle x\rangle \times \langle y\rangle$ двух нееденичных циклических подгрупп.

Если $|x| = |y| = \infty$, то по лемме 1.2 каждая подгруппа из M будет N_G^d-допустимой. Из этого следует существование такой бесконечной подгруппы $\langle a\rangle \subset M$, что $\langle a\rangle \bigcap N_G^d = E$. В силу леммы 1.1 норма N_G^d дедекиндова, что невозможно по условию.

Далее рассмотрим случай, когда подгруппа M смешанная и $|x| = \infty,\ |y| < \infty$. Пусть $y_1 \in \langle y\rangle$, $|y_1| = p$, где p — простое число. Тогда подгруппы $\langle y_1\rangle$ и $\langle x^p\rangle$ будут N_G^d-допустимыми и хотя бы одна из них имеет единичное пересечение с N_G^d. Снова применяя лемму 1.1, получаем противоречие.

Пусть теперь $|M| < \infty$ и $x_1 \in \langle x\rangle$, $y_1 \in \langle y\rangle$, где $|x_1| = p,\ |y_1| = q$, p и q — простые числа. Если $p \neq q$, то подгруппы $\langle x_1\rangle$ и $\langle y_1\rangle$ будут N_G^d-допустимыми и по крайней мере одна из них не принадлежит N_G^d. Используя лемму 1.1, приходим к противоречию с условием. Поэтому $p = q$ и $\langle x_1, y_1\rangle$ — элементарная абелева группа порядка p^2.

Рассмотрим подгруппу $G_1 = \langle x_1, y_1\rangle N_G^d$. Поскольку $\langle x_1, y_1\rangle \lhd G_1$, то $[G_1 : C_{G_1}\langle x_1, y_1\rangle] < < \infty$. Если норма N_G^d содержит элементы бесконечного порядка, то $C_{G_1}\langle x_1, y_1\rangle$ — непериодическая группа и нетрудно показать, что подгруппы $\langle x_1\rangle$ и $\langle y_1\rangle$ будут N_G^d-допустимыми. Но в таком случае получаем ситуацию, изученную выше, и N_G^d является дедекиндовой группой, что невозможно по условию. Следовательно, N_G^d — периодическая группа. Учитывая лемму 1.1, имеем $\langle x_1, y_1\rangle \cap N_G^d \neq E$. Тогда $\left|\langle x_1, y_1\rangle \cap N_G^d\right| = p$ и, не нарушая общности рассуждений, будем считать $x_1 \notin N_G^d,\ y_1 \in N_G^d$. Очевидно, что

$$\left[\langle x_1, y_1\rangle, N_G^d\right] = \langle y_1\rangle \lhd G_1.$$

При этом если норма N_G^d является p-группой, то $\langle y_1\rangle \subseteq Z(N_G^d)$ – единственная подгруппа порядка p в норме N_G^d и $\langle y_1\rangle \lhd G$. В этом случае в группе найдется элемент бесконечного порядка такой, что $[a, y_1] = 1$. Но тогда $\langle a^p\rangle$ является N_G^d-допустимой подгруппой, что невозможно в силу леммы 1.1. Значит, N_G^d — непримарная группа и можно указать элемент $b \in N_G^d$ такой, что $|b| \neq 1, (|b|, p) = 1$. По теореме Машке

$$\langle x_1, y_1\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle = (\langle y_1\rangle \times \langle y_2\rangle) \leftthreetimes \langle b\rangle,$$

где $\langle y_2\rangle$ — $\langle b\rangle$-допустимая подгруппа, $\langle y_2\rangle \cap N_G^d = E$ и $[y_2, b] \in N_G^d \bigcap \langle y_2\rangle = E$. Поскольку подгруппа $\langle y_2, b\rangle$ является N_G^d-допустимой, то N_G^d-допустимой будет ее характеристическая подгруппа $\langle y_2\rangle$. Но в таком случае из леммы 1.1 следует дедекиндовость нормы N_G^d, что невозможно.

Теорема 1.2 доказана.

Условие недедекиндовости нормы N_G^d разложимых подгрупп в теореме 1.2 является существенным. Это подтверждает следующий пример.

***Пример* 1.1.** $G = (\langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle) \times \langle c \rangle$, где $|a| = |c| = \infty$, $|b| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$. В этой группе $N_G^d = \langle c \rangle$ и не содержит разложимых подгрупп, а в группе G множество таких подгрупп бесконечно.

***Следствие* 1.3.** *Если норма N_G^d непериодической локально разрешимой группы G недедекиндова, содержит элементы бесконечного порядка и не содержит разложимых подгрупп, то $G = N_G^d$ и G — группа Фробениуса типа* 3 *предложения* 1.

Теорема 1.3. *Непериодическая группа G с недедекиндовой нормой N_G^d разложимых подгрупп тогда и только тогда содержит свободную абелеву подгруппу ранга $r \geq 2$, когда подгруппу такого ранга содержит ее норма N_G^d.*

Доказательство. Если норма N_G^d содержит свободную абелеву подгруппу ранга $r \geq 2$, то утверждение теоремы очевидно. Предположим, что G содержит свободную абелеву подгруппу

$$M = \langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle \times \ldots \times \langle x_r \rangle$$

ранга $r \geq 2$. По лемме 1.2 каждая из подгрупп $\langle x_i \rangle$, где $i = \overline{1, r}$, является N_G^d-допустимой. В силу леммы 1.1 $\langle x_i \rangle \cap N_G^d \neq E$ для каждого $i = \overline{1, r}$. Из этого следует, что $M \cap N_G^d$ — свободная абелева подгруппа ранга r нормы N_G^d.

Теорема 1.3 доказана.

Лемма 1.3. *Если норма N_G^d разложимых подгрупп произвольной группы G недедекиндова и группа G содержит непримарную циклическую подгруппу $\langle x \rangle \times \langle y \rangle = \langle xy \rangle$ порядка $p^m q^n$ (p, q — различные простые числа), то $\left\langle x^{p^{m-1}} y^{q^{n-1}} \right\rangle \subset N_G^d$.*

Доказательство. Пусть $G \supset \langle x \rangle \times \langle y \rangle$, где $|x| = p^m$, $|y| = q^n$, $m \geq 1$, $n \geq 1$, p, q — различные простые числа. Тогда $\langle x, y \rangle$ является N_G^d-допустимой подгруппой, а значит, N_G^d-допустимыми будут и подгруппы $\langle x \rangle$ и $\langle y \rangle$. Поскольку N_G^d — недедекиндова группа, то в силу леммы 1.1 $\langle x \rangle \cap N_G^d \neq E$, $\langle y \rangle \cap N_G^d \neq E$. Следовательно, $\left\langle x^{p^{m-1}} y^{q^{n-1}} \right\rangle \subset N_G^d$.

Лемма 1.3 доказана.

Очевидным следствием леммы 1.3 является следующая теорема, касающаяся как периодических, так и непериодических групп.

Теорема 1.4. *Произвольная группа G, имеющая недедекиндову норму N_G^d разложимых подгрупп, тогда и только тогда содержит непримарные абелевы подгруппы, когда подгруппы с таким свойством содержит ее норма N_G^d.*

2. О непериодических группах с недедекиндовой локально нильпотентной нормой разложимых подгрупп. В работе [4] установлено, что неабелевы локально нильпотентные группы, все разложимые подгруппы которых нормальны (или система таких подгрупп пуста), в периодическом случае являются либо кватернионными 2-группами, либо $\overline{HA}_p$-группами (p-группами, в которых нормальны все абелевы нециклические подгруппы), а в непериодическом — группами одного из типов 4 или 5 при $n > 1$ предложения 2. Как будет показано ниже, в классе локально нильпотентных непериодических групп из условия недедекиндовости нормы разложимых подгрупп следует нормальность всех разложимых подгрупп в группе и, как следствие, совпадение указанной нормы с группой.

Теорема 2.1. *В непериодической локально разрешимой группе G норма N_G^d разложимых подгрупп локально нильпотентна и недедекиндова тогда и только тогда, когда N_G^d является непериодической di-группой одного из типов* 4 *или* 5 *при $n > 1$ предложения* 2.

Доказательство. *Достаточность* условий теоремы очевидна, так как каждая из групп, указанных в условии теоремы, нильпотентна класса 2.

Докажем их *необходимость*. Пусть норма N_G^d разложимых подгрупп непериодической локально разрешимой группы G является периодической локально нильпотентной недедекиндовой подгруппой. Из описания di-групп [4] следует, что N_G^d является либо кватернионной 2-группой порядка больше 8, либо $\overline{HA}_p$-группой (см. [7]). В каждом из этих случаев N_G^d содержит конечную нормальную в G подгруппу F. Поскольку $[G\colon C_G(F)] < \infty$, то найдется элемент x бесконечного порядка такой, что $x \in C_G(F)$. Из этого следует, что подгруппа $\langle x, F\rangle^{|F|} = \langle x\rangle^{|F|}$ будет N_G^d-допустимой. Отсюда в силу леммы 1.1 N_G^d должна быть дедекиндовой, что противоречит условию.

Значит, N_G^d — локально нильпотентная непериодическая di-группа. Из описания таких групп (предложения 1, 2) заключаем, что локально нильпотентными среди них будут лишь группы типа 4 или 5 при $n > 1$ предложения 2.

Теорема 2.1 доказана.

Следующая теорема дает полное описание непериодических локально нильпотентных групп, у которых норма N_G^d разложимых подгрупп недедекиндова.

Теорема 2.2. *В непериодической локально нильпотентной группе G норма N_G^d разложимых подгрупп тогда и только тогда недедекиндова, когда $G = N_G^d$ и G — группа одного из типов*:

1) $G = Q \times B$, *где Q — группа кватернионов, B — абелева группа без кручения ранга* 1;

2) $G = \langle a\rangle \leftthreetimes B$, *где* $|a| = p^n$, *p — простое число,* $n > 1$, B — *неполная абелева группа без кручения ранга* 1 *и* $[\langle a\rangle, B] = \left\langle a^{p^{n-1}}\right\rangle$.

Доказательство. *Достаточность* условий теоремы очевидна.

Покажем их *необходимость*. Пусть G — локально нильпотентная непериодическая группа, имеющая недедекиндову норму N_G^d. По теореме 2.1 N_G^d является группой одного из типов 1 или 2 этой теоремы. Учитывая, что все разложимые абелевы подгруппы нормы N_G^d являются смешанными, и применяя теорему 1.1, делаем вывод, что в группе G любая разложимая абелева подгруппа также будет смешанной. Поэтому периодическая часть $T(G)$ группы G не содержит разложимых подгрупп и в силу предложения 1 является либо локально циклической p-группой для некоторого простого числа p, либо кватернионной 2-группой (конечной или бесконечной). Следовательно, $T(G) \cap N_G^d \supset \langle a_1\rangle$, где $|a_1| = p$. Так как $\langle a_1\rangle \lhd G$ и группа G локально нильпотентна, то $\langle a_1\rangle \subseteq Z(G)$.

Покажем, что в группе G любая пара бесконечных циклических подгрупп имеет нетривиальное пересечение. В самом деле, если $x, y \in G$, $|x| = |y| = \infty$, то подгруппы $\langle a_1, x\rangle$ и $\langle a_1, y\rangle$ будут N_G^d-допустимыми, а потому подгруппы $\langle x^p\rangle$ и $\langle y^p\rangle$ также N_G^d-допустимы. Так как N_G^d недедекиндова, то по лемме 1.1 $\langle x^p\rangle \cap N_G^d \neq E$ и $\langle y^p\rangle \cap N_G^d \neq E$. Тогда $\langle x^p\rangle \cap B \neq E$, $\langle y^p\rangle \cap B \neq E$ и потому $\langle x\rangle \cap \langle y\rangle \neq E$. Из этого следует, что $G/T(G)$ — локально нильпотентная группа без кручения и без разложимых подгрупп. В силу предложения 1 она является абелевой группой без кручения ранга 1, откуда коммутант $G' \subset T(G)$.

Далее рассмотрим каждый из указанных случаев для нормы N_G^d отдельно.

1. Пусть $N_G^d = Q \times B$ — группа типа 1 теоремы 2.1, где $Q = \langle q_1, q_2\rangle$ — группа кватернионов, $|q_1| = |q_2| = 4$, ${q_1}^2 = {q_2}^2$, ${q_2}^{-1}q_1q_2 = {q_1}^{-1}$, B — абелева группа без кручения ранга 1. Тогда $T(G)$ является кватернионной 2-группой. Пусть $\langle q\rangle \subset T(G)$, где $|q| = 8$. Тогда $\langle q\rangle$ — единственная циклическая подгруппа порядка 8 в $T(G)$, откуда $\langle q\rangle \lhd G$. Не нарушая общности

рассуждений, полагаем $q^2 = q_1$. Возьмем элемент $b \in B$ бесконечного порядка, перестановочный с qq_2. Тогда $(\langle b\rangle \times \langle qq_2\rangle)$ — N_G^d-допустимая подгруппа и $\langle qq_2\rangle$ также будет N_G^d-допустимой. Но $[qq_2,\ q_2] = {q_1}^{-1} = q^{-2} \notin \langle qq_2\rangle$. Следовательно, $T\left(G\right) = T\left(N_G^d\right) = Q$.

Пусть $C = C_G\left(Q\right)$ — централизатор подгруппы Q в G. Поскольку для каждого элемента $g \in G$ бесконечного порядка подгруппа $\left\langle q_1^2, g\right\rangle$ N_G^d-допустима, то $\left\langle g^2\right\rangle$ также N_G^d-допустима и $g^2 \in C$. Отсюда следует, что $\exp\left(G/C\right) = 2$ и потому G/C абелева. Следовательно, коммутант $G' \subseteq Q \cap C = \left\langle q_1^2\right\rangle$. Поскольку каждая разложимая подгруппа группы G содержит G', то в G все разложимые подгруппы нормальны и потому в этом случае $G = N_G^d$.

2. Пусть $N_G^d = \langle a\rangle \leftthreetimes B$ — группа типа 2 теоремы 2.1, где $|a| = p^n$, p — простое число, $n > 1$, а B — неполная абелева группа без кручения ранга 1, $[\langle a\rangle, B] = \left\langle a^{p^{n-1}}\right\rangle = \langle a_1\rangle$. Допустим, что $T\left(G\right) \neq \langle a\rangle$. Так как $T\left(G\right)$ не содержит разложимых подгрупп, то либо найдется такой элемент $c \in T\left(G\right)$, что $c^p = a$, либо $T\left(G\right) = \langle a, q\rangle$ — кватернионная 2-группа, где $|a| = 2^n,\ \ n > 1,\ |q| = 4,\ q^2 = a_1,\ q^{-1}aq = a^{-1}$.

Если $T\left(G\right)$ содержит элемент c такой, что $c^p = a$, то из условия $[\langle a\rangle, B] \neq E$ следует $[a, b] = a_1$ для некоторого элемента $b \in B$. Так как $a_1 \in Z(G)$ и $|bc| = \infty$, то $(\langle a_1\rangle \times \langle bc\rangle)$ — N_G^d-допустимая подгруппа, откуда $[bc, b] \in G' \cap \langle bc, a_1\rangle = \langle a_1\rangle$. Положим $[bc, b] = [c, b] = a_1^{\alpha}$, тогда $[a, b] = [c^p, b] = [c, b]^p = 1$, что невозможно. Значит, $T\left(G\right) = T(N_G^d) = \langle a\rangle$.

Покажем теперь, что и в этом случае коммутант G' группы G имеет простой порядок. Для этого достаточно убедиться, что любой неединичный коммутатор группы G имеет порядок p. Пусть $x, y \in G$ и $[x, y] \neq 1$. Тогда подгруппа $H = \langle T\left(G\right), x, y\rangle$ нильпотентна, а фактор-группа $H/T(G)$ циклическая. Значит, $H = T\left(G\right) \leftthreetimes \langle h\rangle$ для некоторого элемента $h \in H$, $|h| = \infty$. Так как $a_1 \in T\left(G\right) \cap Z(H)$, то подгруппа $\langle a_1, h\rangle$ N_G^d-допустима. Поэтому

$$[T\left(G\right), \langle h\rangle] \subset T\left(G\right) \cap \langle a_1, h\rangle = \langle a_1\rangle, \qquad \left|H'\right| = p, \qquad |[x, y]| = p, \qquad \left|G'\right| = p.$$

В силу того, что любая разложимая подгруппа группы G является смешанной, она содержит коммутант G', откуда $G = N_G^d$ и в G нормальны все разложимые подгруппы.

Пусть теперь $T\left(G\right) = \langle a, q\rangle$ — кватернионная 2-группа, $|a| = 2^n$, $n > 1$, $|q| = 4$, $q^2 = a_1$, $q^{-1}aq = a^{-1}$. В нильпотентной группе $\langle T\left(G\right), x\rangle$, где $x \in G$ и $|x| = \infty$, периодическая часть неабелева и конечна. Поэтому $x^k \in C_G\left(\langle a, q\rangle\right)$ для некоторого натурального числа k. Тогда подгруппа $\left(\left\langle x^k\right\rangle \times \langle q\rangle\right)$ N_G^d-допустима и $[a, q] \in \langle a\rangle \cap \left(\left\langle x^k\right\rangle \times \langle q\rangle\right) = \langle a_1\rangle$. Таким образом, $|a| = 4$ и $T\left(G\right) = \langle a, q\rangle$ — группа кватернионов порядка 8. Повторяя рассуждения из пункта 1, получаем $G' \subseteq T(G) \cap C_G(T(G)) = \langle a_1\rangle$, откуда G — di-группа. Значит, $G = T\left(G\right) \times B = N_G^d$, что противоречит условию. Итак, этот случай невозможен и теорема 2.2 доказана.

***Следствие* 2.1.** *Произвольная непериодическая локально нильпотентная группа G, имеющая недедекиндову норму N_G^d разложимых подгрупп, нильпотентна класса* 2.

Отметим, что класс непериодических групп с локально нильпотентной недедекиндовой нормой N_G^d является болем широким, чем класс локально нильпотентных непериодических групп с такими же ограничениями на данную норму. Следующий пример показывает, что существуют непериодические не локально нильпотентные группы, у которых норма N_G^d разложимых подгрупп является недедекиндовой нильпотентной группой.

***Пример* 2.1.** Пусть $G = B \leftthreetimes \langle q_1, q_2\rangle$, где B — абелева группа без кручения ранга 1, $|q_1| = 8$, $|q_2| = 4$, ${q_1}^4 = {q_2}^2$, ${q_2}^{-1}q_1q_2 = {q_1}^{-1}$, $[B, \langle q_2\rangle] = E$, ${q_1}^{-1}\ bq_1 = \ b^{-1}$ для всех $b \in B$.

Группа G не локально нильпотентна, а ее норма $N_G^d = \left\langle {q_1}^2, q_2\right\rangle \times B$ нильпотентна.

3. Взаимосвязи между нормами разложимых подгрупп и абелевых нециклических подгрупп в непериодических локально разрешимых группах. В этом пункте будут рассмотрены взаимосвязи между нормами разложимых и абелевых нециклических подгрупп. *Нормой абелевых нециклических подгрупп* группы G будем называть пересечение нормализаторов всех ее абелевых нециклических подгрупп (при условии, что система таких подгрупп непуста) и обозначать ее N_G^A [8].

Очевидно, что если в непериодической группе G множества абелевых нециклических и разложимых подгрупп совпадают, то совпадают и соответствующие нормы. С другой стороны, из равенства указанных норм не следует совпадение множеств абелевых нециклических и разложимых подгрупп.

***Пример* 3.1.** Рассмотрим IH-группу С. Н. Черникова [6, с. 176]

$$G = A \leftthreetimes \langle b \rangle ,$$

где $A \supseteq A_1 \times \langle c_1 \rangle \times \langle c_2 \rangle$ и A_1 — нециклическая подгруппа без кручения ранга 1, $|b| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для любого элемента $a \in A$, $|c_1| = p$, $|c_2| = q$, p и q — различные простые нечетные числа. В данной группе подгруппа A_1 неразложимая нециклическая, а подгруппа $\langle c_1 \rangle \times \langle c_2 \rangle$ разложимая циклическая. В то же время $N_G^d = N_G^A = G$.

Следующие примеры показывают, что в непериодической локально разрешимой группе возможны включения $N_G^d \subset N_G^A$ или $N_G^A \subset N_G^d$.

***Пример* 3.2.** $G = ((((\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \ldots \times \langle a_6 \rangle) \leftthreetimes \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle c \rangle) \leftthreetimes \langle d \rangle$, где $|a_i| = \infty$, $i = \overline{1,6}$, $|b| = 7$, $|c| = 3$, $|d| = 4$, $b^{-1}a_ib = a_{i+1}$, $i = \overline{1,5}$, $b^{-1}a_6b = a_1^{-1}a_2^{-1} \ldots a_6^{-1}$,

$$c^{-1}a_1c = a_2, \quad c^{-1}a_2c = a_1^{-1}a_2^{-1}, \quad c^{-1}a_3c = a_4, \quad c^{-1}a_4c = a_3^{-1}a_4^{-1}, \quad c^{-1}a_5c = a_6,$$

$$c^{-1}a_6c = a_5^{-1}a_6^{-1}, \quad c^{-1}bc = b^2, \quad d^{-1}a_id = a_i^{-1}, \quad i = \overline{1,6}, \quad [b,d] = [c,d] = 1.$$

В этой группе $N_G^A = \langle a_1, a_2, \ldots, a_6, d \rangle$. Так как $a_i^n \notin N_G(\langle b, d \rangle)$ для $i = \overline{1,6}$, $b \notin N_G\left(\left\langle a_i, d^2 \right\rangle\right)$, $c \notin N_G\left(\left\langle a_i, d^2 \right\rangle\right)$ и $d \notin N_G(\langle a_1b, d^2 \rangle)$, то $N_G^d = \left\langle d^2 \right\rangle = Z(G)$ и $N_G^d \subset N_G^A$.

***Пример* 3.3.** $G = \langle a \rangle \leftthreetimes B$, где $|a| = p$ — простое нечетное число ($p \neq 2$), B — неполная абелева нециклическая подгруппа без кручения ранга 1 и $G' = \langle a \rangle$.

В этой группе $N_G^d = G$. Так как $a \notin N_G(B)$, то $N_G^A \subset N_G^d$.

Лемма 3.1. *Если норма N_G^d разложимых подгрупп непериодической группы G недедекиндова и все ее разложимые абелевы подгруппы смешанные, то $N_G^A \subseteq N_G^d$, причем возможен случай $N_G^A \neq N_G^d$.*

Доказательство. В силу теоремы 1.1 каждая разложимая абелева подгруппа группы G является смешанной. Следовательно, имеет место включение $N_G^A \subseteq N_G^d$. Примером группы, в которой $N_G^A \neq N_G^d$, является группа из примера 3.3.

Лемма 3.1 доказана.

Теорема 3.1. *Если норма N_G^d разложимых подгрупп непериодической локально разрешимой группы G локально нильпотентна и недедекиндова, то $N_G^A \subseteq N_G^d$, причем имеют место оба случая $N_G^A \subset N_G^d$ и $N_G^A = N_G^d$.*

Доказательство. По теореме 2.1 норма N_G^d является непериодической группой одного из типов 1 или 2 этой теоремы. В обоих случаях все разложимые абелевы подгруппы нормы N_G^d являются смешанными. Учитывая теорему 1.1, приходим к заключению, что все разложимые абелевы подгруппы группы G также будут смешанными, а потому нециклическими. Следовательно, имеет место включение $N_G^A \subseteq N_G^d$.

Включение будет строгим, например, в случае $G = N_G^d = Q \times B$, где $Q = \langle q_1, q_2 \rangle$ — группа кватернионов порядка 8, а группа B изоморфна аддитивной группе рациональных чисел. В этом случае подгруппа содержит бесконечную последовательность подгрупп

$$\langle b_1 \rangle \subset \langle b_2 \rangle \subset \ldots \langle b_n \rangle \subset \ldots,$$

где $|b_1| = \infty$, $b_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$=b_n и $(\alpha_{n+1}, 2) = 1$ для $n = 1, 2, \ldots$.

Нетрудно показать, что изолятор A [9, с. 411] подгруппы $\langle q_1 b_1 \rangle$ нециклический, так как из элемента q_1 извлекается корень любой нечетной степени. При этом $A \ntriangleleft G$, поскольку $[q_2, A] = [q_2, q_1] \notin A$. Значит, $N_G^A = \left\langle q_1^2 \right\rangle \times B = Z(G) \neq N_G^d = G$.

Если $G = N_G^d = Q \times B$, где $Q = \langle q_1, q_2 \rangle$ — группа кватернионов порядка 8 и B — группа, изоморфная аддитивной группе двоичных дробей или бесконечная циклическая, то в G нормальны все разложимые подгруппы и все абелевы нециклические подгруппы [10]. Следовательно, в этом случае $N_G^A = N_G^d$.

Теорема 3.1 доказана.

Лемма 3.2. *Если в локально разрешимой непериодической группе G выполняются условия $N_G^A \nsubseteq N_G^d$ и $N_G^d \nsubseteq N_G^A$, то ее норма N_G^d разложимых подгрупп дедекиндова.*

Доказательство. Пусть в локально разрешимой непериодической группе G нормы N_G^A и N_G^d удовлетворяют условиям леммы. Тогда G содержит абелеву нециклическую неразложимую подгруппу B, не являющуюся N_G^d-допустимой, и непримарную циклическую подгруппу $\langle c \rangle$, не являющуюся N_G^A-допустимой. Очевидно, что в таком случае B является либо квазициклической группой, либо локально циклической группой без кручения ранга 1.

Покажем, что в такой группе норма N_G^d разложимых подгрупп дедекиндова. Если N_G^d — непериодическая группа, то, учитывая, что подгруппа $\langle c \rangle$ является N_G^d-допустимой, делаем вывод, что существует элемент x бесконечного порядка, принадлежащий централизатору $C_G(c)$. Тогда абелева подгруппа $\langle c, x \rangle$, а вместе с ней и ее характеристическая подгруппа $\langle c \rangle$ являются N_G^A-допустимыми, что противоречит выбору $\langle c \rangle$. Значит, N_G^d — периодическая локально разрешимая группа. Если при этом $\left| N_G^d \right| < \infty$, то N_G^d дедекиндова по лемме 1.1.

Пусть N_G^d — бесконечная периодическая группа. Предположим, что N_G^d не удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп. Тогда в группе $N_G^d \cap C_G(c)$ можно выделить такие абелевы нециклические подгруппы A_1 и A_2, что $(A_1 \cup A_2) \cap \langle c \rangle = E$, $A_1 \cap A_2 = E$. Но в таком случае подгруппа $\langle A_2, c \rangle \cap \langle A_1, c \rangle = \langle c \rangle$ будет N_G^A-допустимой, что противоречит ее выбору. Значит, N_G^d — группа с условием минимальности для абелевых подгрупп. По следствию 1.1 и в этом случае норма N_G^d дедекиндова.

Лемма 3.2 доказана.

Теорема 3.2. *Если в непериодической локально разрешимой группе G хотя бы одна из норм N_G^A или N_G^d недедекиндова и норма N_G^d бесконечна, то имеет место одно из включений $N_G^A \subseteq N_G^d$ или $N_G^d \subseteq N_G^A$.*

Доказательство. Если норма N_G^d разложимых подгрупп группы G недедекиндова, то утверждение теоремы следует из леммы 3.2. Поэтому в дальнейшем будем считать, что N_G^d — дедекиндова группа, а недедекиндовой является норма N_G^A абелевых нециклических подгрупп группы G. Нетрудно показать, что в таком случае норма N_G^A бесконечна.

Предположим, что при этих условиях $N_G^A \nsupseteq N_G^d$ и $N_G^A \nsubseteq N_G^d$. Так как норма N_G^d бесконечна, то из доказательства леммы 3.2 следует, что она дедекиндова и удовлетворяет условию минимальности. Значит, N_G^d является конечным расширением полной подгруппы P. Из предположения также следует, что группа G содержит непримарную циклическую подгруппу $\langle c \rangle$, не являющуюся N_G^A-допустимой, и абелеву нециклическую неразложимую подгруппу B, которая не является N_G^d-допустимой. При этом B является либо квазициклической группой, либо локально циклической группой без кручения ранга 1.

Далее рассмотрим отдельно каждый из указанных выше случаев для подгруппы B.

1. Пусть B — квазициклическая подгруппа. Покажем, что в этом случае она является максимальной абелевой подгруппой группы G. Действительно, в противном случае в G найдется неединичная подгруппа $\langle g\rangle$ такая, что $B\cap\langle g\rangle = E,\ [B,\langle g\rangle] = E$. Тогда подгруппа $B\times\langle g\rangle$ будет N_G^d-допустимой. При этом если $|g| = \infty$, то N_G^d-допустимой будет и подгруппа B, как характеристическая подгруппа группы $B\times\langle g\rangle$, что противоречит ее выбору. Если $|g| < \infty$, то подгруппа $\langle B,g\rangle^{|g|} = B$ также будет N_G^d-допустимой. Значит, B — максимальная абелева подгруппа группы G и $B \ntriangleleft G$.

Применяя следствие 1.3 [6] к группе $G_1 = BN_G^d$ и учитывая, что N_G^d является конечным расширением полной подгруппы P, заключаем, что G_1 — группа с условием минимальности для абелевых подгрупп. Поскольку B — максимальная абелева подгруппа, то $B = P \triangleleft N_G^d$, что противоречит выбору B. Значит, B не может быть квазициклической группой.

2. Рассмотрим теперь случай, когда B — локально циклическая группа без кручения ранга 1.

Так как подгруппа $\langle c\rangle$ непримарна и не является N_G^A-допустимой, то хотя бы одна из ее силовских подгрупп также не будет N_G^A-допустимой. Пусть такой будет подгруппа $\langle c\rangle_p$, где p — простое число. Если $p\notin\pi(P)$ или P непримарна, то в P можно выделить квазициклическую q-подгруппу P_1, где $q\neq p$, $\langle c\rangle_p P_1 = \langle c\rangle_p\times P_1$ и $\langle c\rangle_p$ — N_G^A-допустимая подгруппа, что противоречит ее выбору. Значит, $\langle c\rangle_p P$ — p-группа.

Если $\langle c\rangle_p\subset P$, то $\langle c\rangle_p$ — подгруппа некоторой квазициклической p-группы, и потому она также будет N_G^A-допустимой, что невозможно. Пусть $\langle c\rangle_p\not\subset P$. Если полная p-группа P не является квазициклической, то $\langle c\rangle_p P$ содержит элементарную абелеву подгруппу порядка p^3. В этом случае существует подгруппа $\langle a_1\rangle\times\langle a_2\rangle$ порядка p^2 такая, что $\langle c\rangle_p\cap\langle a_1,a_2\rangle = E$. Тогда подгруппа $\Big(\langle a_1\rangle\times\langle c\rangle_p\Big)\cap\Big(\langle a_2\rangle\times\langle c\rangle_p\Big) = \langle c\rangle_p$ будет N_G^A-допустимой, что противоречит ее выбору. Значит, P — квазициклическая p-группа и существует такой элемент $a\in\langle c\rangle_p P$ порядка p, что подгруппа $\langle a\rangle\times\langle c\rangle_p$ будет N_G^A-допустимой.

Если при этом подгруппа N_G^A непериодическая, то существует такой элемент $x\in N_G^A$, что $|x| = \infty$ и $\Big[\langle x\rangle,\langle c\rangle_p\Big] = E$. Следовательно, подгруппа $\langle x\rangle\times\langle c\rangle_p$, а значит, и подгруппа $\langle c\rangle_p$ являются N_G^A-допустимыми. Снова получили противоречие. Итак, N_G^A — периодическая группа. Тогда в группе $N_G^A B = N_G^A\times B$ нормальной будет каждая подгруппа нормы N_G^A, следовательно, N_G^A дедекиндова, что противоречит условию.

Теорема 3.2 доказана.

Как показывают следующие примеры, условие бесконечности нормы N_G^d в теореме 3.2 является существенным.

***Пример* 3.4.** $G = (\langle a\rangle \rightthreetimes B)\rightthreetimes\langle c\rangle$, где $|a| = p$ — простое число ($p\neq 2$), B — группа, изоморфная аддитивной группе q-ичных дробей, $q\notin\{2,p\}$, $B = B_1\langle x\rangle,\ x^2\in B_1,\ x^{-1}ax = a^{-1}$, $[B_1\langle ,a\rangle] = E,\ |c| = 2,\ [c,a] = 1,\ c^{-1}bc = b^{-1}$ для любого элемента $b\in B$.

В этой группе все периодические разложимые подгруппы имеют порядок $2p$ и являются группами вида $\langle a^m cb_1^k\rangle$, где $b_1\in B_1,\ k\in\{0,1\},(m,p) = 1$. Соответственно, все непериодические разложимые подгруппы являются смешанными, содержатся в группе $B_1\times\langle a\rangle$ и потому являются нормальными в G. Поскольку $N_G\left(\langle a^m cb_1^k\rangle\right) = \langle a^m cb_1^k\rangle$, то $N_G^d = \langle a\rangle$.

Найдем теперь норму N_G^A абелевых нециклических подгрупп группы G. Очевидно, что G не содержит периодических абелевых нециклических подгрупп, а все смешанные абелевы подгруппы содержат $\langle a\rangle$ и являются подгруппами группы $(B_1 \times \langle a\rangle)$. Легко убедиться, что все они нормальны в G. Далее, все абелевы нециклические подгруппы ранга 1 либо содержатся в подгруппе B, либо в сопряженных ей подгруппах $g^{-1}Bg,\ g \in G$, либо в группе $(B_1 \times \langle a\rangle)$. Рассмотрим бесконечную последовательность подгрупп в B_1:

$$\langle b_1\rangle \subset \langle b_2\rangle \subset \ldots \langle b_n\rangle \subset \ldots ,$$

$|b_1| = \infty,\ b_{n+1}^{\alpha_{n+1}} = b_n,\ \alpha_{n+1} \in \mathbb{N},\ (\alpha_{n+1}, p) = 1$ для $n = 1, 2, \ldots$. Нетрудно показать, что изолятор подгруппы $\langle ab_1\rangle$ нециклический, так как из элемента a извлекается корень любой степени, взаимно простой с p. При этом $N_G(A) = \langle a, B_1\rangle$. Учитывая, что $N_G(B) = B \leftthreetimes \langle c\rangle$, получаем $N_G^A = B_1$ и $N_G^d \cap N_G^A = E$.

***Пример* 3.5.** $G = (\langle a\rangle \leftthreetimes B) \leftthreetimes \langle c\rangle$, где $|a| = p$ — простое число ($p \neq 2$), B — группа, изоморфная аддитивной группе p-ичных дробей, $B = B_1\langle x\rangle,\ x^2 \in B_1,\ \ x^{-1}ax = a^{-1}, [B_1\langle, a\rangle] = E$, $|c| = 2,\ [c, a] = 1,\ \ c^{-1}bc = b^{-1}$ для любого элемента $b \in B$.

Как и в примере 3.4, в этой группе норма разложимых подгрупп $N_G^d = \langle a\rangle$. Однако норма абелевых нециклических подгрупп $N_G^A = (B_1 \leftthreetimes \langle c\rangle)$. Это следует из того, что для любого неединичного элемента $y_1 \in B_1$ изолятор подгруппы $\langle ay_1\rangle$ циклический, и потому элемент c нормализует любую абелеву нециклическую подгруппу группы G. В этом случае норма N_G^A абелевых нециклических подгрупп недедекиндова и $N_G^d \cap N_G^A = E$.

1. *Baer R.* Der Kern, eine charakteristische Untergruppe // Comp. Math. – 1934. – **1**. – P. 254 – 283.
2. *Лиман Ф. Н., Лукашова Т. Д.* О норме разложимых подгрупп в локально конечных группах // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 4. – С. 480 – 488.
3. *Liman F. M., Lukashova T. D.* About non-periodic groups with non-Dedekind norms of decomposable subgroups // 9th Int. Algebr. Conf. in Ukraine (L'viv, July 8-13, 2013). – L'viv, 2013. – P. 116.
4. *Лиман Ф. Н.* Группы, все разложимые подгруппы которых инвариантны // Укр. мат. журн. – 1970. – **22**, № 6. – С. 725 – 733.
5. *Блудов В.В.* О группах Фробениуса // Сиб. мат. журн. – 1997. – **38**, № 6. – С. 1219 – 1221.
6. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
7. *Лиман Ф.Н.* Периодические группы, все абелевы нециклические подгруппы которых инвариантны // Группы с ограничениями для подгрупп. – Киев: Наук. думка, 1971. – С. 65 – 96.
8. *Лукашова Т. Д.* Про норму абелевих нециклічних підгруп нескінченних локально скінченних p-груп ($p \neq 2$) // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2004. – № 3. – С. 35 – 39.
9. *Курош А. Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
10. *Лиман Ф. Н.* Непериодические группы с некоторыми системами инвариантных подгрупп // Алгебра и логика. – 1968. – **7**, № 4. – С. 70 – 86.

Получено 13.01.15