УДК 517.5

Вит. В. Волчков, И. М. Савостьянова (Донец. нац. ун-т)

О СТИРАНИИ ОСОБЕННОСТЕЙ ФУНКЦИЙ С НУЛЕВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПО ШАРАМ НА СФЕРЕ

We study functions on a sphere with pricked point whose integrals over all admissible “hemispheres” are equal to zero. A condition is established under which the point is a removable set for this class of functions. It is shown that this condition cannot be omitted or substantially weakened.

Вивчаються функції на сфері з виколотою точкою, що мають нульові інтеграли по всіх припустимих „півсферах”. Знайдено умову, за якої точка є усувною множиною для такого класу функцій. Показано, що цю умову не можна відкинути або суттєво поліпшити.

1. Введение. Одной из интересных проблем теории отображений, привлекающей внимание широкого круга специалистов, является проблема „устранимости”, которая состоит в следующем. Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — многообразия, $\mathcal{D}$ — область в $\mathcal{M}$ и $E \subset \mathcal{D}$ — замкнутое относительно $\mathcal{D}$ множество. Возникает вопрос: в каком случае любое отображение $f : \mathcal{D} \setminus E \to \mathcal{N}$ из заданного класса можно продолжить до отображения $\mathbf{f} : \mathcal{D} \to \mathcal{N}$ с сохранением класса? Если указанное продолжение существует, то множество E называют устранимым множеством в рассматриваемом классе отображений.

Проблема устранимости исследовалась многими авторами в различных постановках. Например, известны соответствующие результаты в многомерном комплексном анализе, теории квазиконформных отображений и их обобщений, теории гармонических функций и других областях (см. [1 – 5]). В последние годы активно развиваются геометрические аспекты теории периодичности в среднем на однородных пространствах (см. [6 – 9]). Однако результатов по проблеме устранимости здесь получено мало. Все известные случаи относятся, в основном, к евклидову пространству и касаются лишь функций специального профиля (радиальные функции и их обобщения) (см. [7], гл. 3.2, [10], теорема 4).

В данной работе изучаются функции на сфере с выколотой точкой, имеющие нулевые интегралы по всем допустимым „полусферам”. Найдено условие, при котором точка является устранимым множеством для такого класса функций. Показано также, что это условие нельзя опустить или существенно улучшить.

2. Формулировка основного результата. Пусть $\mathbb{S}^2 = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi| = 1\}$, ξ_1, ξ_2, ξ_3 — декартовы координаты точки $\xi \in \mathbb{S}^2$, $\mathcal{S} = \mathbb{S}^2 \setminus (0,0,-1)$, $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \setminus (0,0,1)$. Положим

$$C_{\text{even}}(\mathcal{S}') = \left\{ f \in C(\mathcal{S}') : f(-\xi) = f(\xi) \;\; \forall \xi \in \mathcal{S}' \right\}.$$

Обозначим через $SO(3)$ группу вращений пространства $\mathbb{R}^3$. Определим класс $\mathcal{F}$ равенством

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in C(\mathcal{S}) : \int\limits_{\tau H} f(\xi) d\xi = 0 \;\; \forall \tau \in SO(3) : \tau H \subset \mathcal{S} \right\},$$

где $H = \{\xi \in \mathbb{S}^2 : \xi_3 \geq 0\}$, $d\xi$ — элемент площади на сфере.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. (i) *Пусть* $f \in \mathcal{F}$ *и*

$$f(\xi) = o\left(\frac{1}{(1+\xi_3)^{3/2}}\right) \qquad \textit{при} \quad \xi \to (0,0,-1). \tag{1}$$

Тогда $f \in C_{\text{even}}(\mathcal{S}')$.

(ii) *Существует функция* $f \in \mathcal{F} \setminus C_{\text{even}}(\mathcal{S}')$ *такая, что*

$$f(\xi) = O\left(\frac{1}{(1+\xi_3)^{3/2}}\right) \qquad \textit{при} \quad \xi \to (0,0,-1).$$

Теорема 1 показывает, что точка $(0,0,-1)$ является устранимым множеством для функций класса $\mathcal{F}$ при выполнении условия (1). Таким образом, любая функция $f \in \mathcal{F}$, удовлетворяющая (1), имеет нулевые интегралы по всем полусферам на $\mathbb{S}^2$. Интегральное преобразование, ставящее в соответствие функции $f \in C(\mathbb{S}^2)$ ее интегралы по всевозможным полусферам, введено П. Функом в [11]. Вопросы, связанные с обращением преобразования Функа, изучались в [11–13]. Отметим также, что в [12] найдены образы различных функциональных пространств под действием указанного преобразования.

3. Вспомогательные утверждения. Будем использовать следующие стандартные обозначения (см. [14]): $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ — множества натуральных, целых и целых неотрицательных чисел соответственно, $\binom{m}{n}$ — биномиальные коэффициенты, Γ — гамма-функция, $(z)_j = \dfrac{\Gamma(z+j)}{\Gamma(z)}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, — символ Похгаммера, $F(a,b;c;z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, P_ν^μ — функция Лежандра первого рода на $(-1,1)$, т. е.

$$P_\nu^\mu(x) = \frac{2^\mu\sqrt{\pi}}{(1-x^2)^{\mu/2}}\left(\frac{F\left(-\dfrac{\nu+\mu}{2}, \dfrac{1+\nu-\mu}{2}; \dfrac{1}{2}; x^2\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1-\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(1+\dfrac{\nu-\mu}{2}\right)} - \frac{2xF\left(\dfrac{1-\nu-\mu}{2}, 1+\dfrac{\nu-\mu}{2}; \dfrac{3}{2}; x^2\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1+\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(-\dfrac{\nu+\mu}{2}\right)}\right).$$

Из этого определения P_ν^μ следует формула

$$P_\nu^\mu(x)\cos(\pi(\nu+\mu)) - P_\nu^\mu(-x) =$$

$$= \frac{2^{\mu+2}\sqrt{\pi}\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}(\nu+\mu)\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1+\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(-\dfrac{\nu+\mu}{2}\right)} \frac{xF\left(\dfrac{1-\nu-\mu}{2}, \dfrac{\nu-\mu}{2}+1; \dfrac{3}{2}; x^2\right)}{(1-x^2)^{\mu/2}} -$$

$$- \frac{2^{\mu+1}\sqrt{\pi}\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}(\nu+\mu)\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1-\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(1+\dfrac{\nu-\mu}{2}\right)} \frac{F\left(-\dfrac{\nu+\mu}{2}, \dfrac{1+\nu-\mu}{2}; \dfrac{1}{2}; x^2\right)}{(1-x^2)^{\mu/2}}. \tag{2}$$

В частности,

$$P_\nu^\mu(x)(-1)^{\nu+\mu} = P_\nu^\mu(-x) \qquad \text{при} \quad \nu+\mu \in \mathbb{Z}_+. \tag{3}$$

Лемма 1. *Пусть* $k,\, n \in \mathbb{Z}_+,\ k > 2n$. *Тогда*

$$P_{2n}^{-k}(x) = (1-x)^{k/2} \sum_{p=0}^{2n} \gamma_{k,n,p} (1+x)^{p-k/2}, \tag{4}$$

где

$$\gamma_{k,n,p} = \frac{(k-2n)_{2n}(-2n)_p(2n+1)_p}{(k+2n)!(1-k)_p p! 2^p}.$$

Доказательство. Согласно [14] (гл. 3, п. 3.4 (6)) имеем

$$P_{2n}^{-k}(x) = \frac{1}{k!}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{k/2} F\left(-2n, 2n+1; k+1; \frac{1-x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{k!}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{k/2} \sum_{j=0}^{2n} \frac{(-1)^j(-2n)_j(2n+1)_j}{(1+k)_j j! 2^j}(x-1)^j =$$

$$= \frac{1}{k!}(1-x)^{k/2} \sum_{p=0}^{2n} \left(\sum_{j=p}^{2n} \frac{(-2n)_j(2n+1)_j}{(1+k)_j j!} \binom{j}{p} \right) \frac{(-1)^p}{2^p}(1+x)^{p-k/2}. \tag{5}$$

Поскольку $(z)_{p+q} = (z)_p(z+p)_q$, внутренняя сумма в (5) преобразуется к виду

$$\sum_{j=p}^{2n} \frac{(-2n)_j(2n+1)_j}{(1+k)_j j!} \binom{j}{p} = \sum_{q=0}^{2n-p} \frac{(-2n)_{p+q}(2n+1)_{p+q}}{(1+k)_{p+q} p! q!} =$$

$$= \frac{(-2n)_p(2n+1)_p}{(1+k)_p p!} \sum_{q=0}^{2n-p} \frac{(-2n+p)_q(2n+1+p)_q}{(1+k+p)_q q!}. \tag{6}$$

Усеченный гипергеометрический ряд Гаусса в (6) выражается через обобщенную гипергеометрическую функцию ${}_3F_2$ по формуле

$$\sum_{q=0}^{2n-p} \frac{(-2n+p)_q(2n+1+p)_q}{(1+k+p)_q q!} =$$

$$= \frac{(4n+1)!}{(2n-p)!(2n+p+1)!}\, {}_3F_2 \left(\begin{matrix} p-2n,\ 2n+1+p,\ k+2n+1;\ 1 \\ k+p+1,\ 2n+p+2 \end{matrix} \right)$$

(см. [14], гл. 4, п. 4.5). Тогда, используя равенство

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} -N,\ a,\ b;\ 1 \\ c,\ 1+a+b-c-N \end{matrix} \right) = \frac{(c-a)_N(c-b)_N}{(c)_N(c-a-b)_N}$$

(см. [15], гл. 7, п. 7.4.4 (88)), получаем

$$\sum_{q=0}^{2n-p} \frac{(-2n+p)_q(2n+1+p)_q}{(1+k+p)_q q!} = \frac{(4n+1)!}{(2n-p)!(2n+p+1)!} \frac{(k-2n)_{2n-p}(p-2n)_{2n-p}}{(1+k+p)_{2n-p}(-4n-1)_{2n-p}}.$$

Учитывая, что

$$(-z)_j(-1)^j = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z+1-j)},$$

отсюда находим

$$\sum_{q=0}^{2n-p} \frac{(-2n+p)_q(2n+1+p)_q}{(1+k+p)_q q!} = \frac{(k-p-1)!(k+p)!}{(k+2n)!(k-2n-1)!}. \tag{7}$$

Комбинируя (5), (6) и (7), приходим к (4).

Лемма 2. *Пусть*

$$a_{m,n}(x) = (x+2n-m)_{m-1}(x+2n-1)_{m-1}, \qquad m,n = 1,\ldots,p, \quad p \geq 2,$$

$$\triangle_p(x) = \begin{vmatrix} a_{1,1}(x) & a_{1,2}(x) & \ldots & a_{1,p}(x) \\ a_{2,1}(x) & a_{2,2}(x) & \ldots & a_{2,p}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p,1}(x) & a_{p,2}(x) & \ldots & a_{p,p}(x) \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$\triangle_p(x) = \prod_{j=1}^{p-1} \left(\prod_{n=2}^{p-j+1} \gamma_n(x+2j-2) \right), \tag{8}$$

где

$$\gamma_n(x) = 2(n-1)(2x+2n-1).$$

Доказательство. Вычтем из $(j+1)$-й строки определителя $\triangle_p(x)$ j-ю строку, умноженную на $(x-j+1)(x+j)$, где $j = p-1,\ p-2,\ldots,1$. Учитывая, что

$$a_{j+1,n}(x) - a_{j,n}(x)(x-j+1)(x+j) = a_{j,n}(x)\gamma_n(x),$$

имеем

$$\triangle_p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & \gamma_2(x) & \gamma_3(x) & \ldots & \gamma_p(x) \\ 0 & a_{2,2}(x)\gamma_2(x) & a_{2,3}(x)\gamma_3(x) & \ldots & a_{2,p}(x)\gamma_p(x) \\ 0 & a_{3,2}(x)\gamma_2(x) & a_{3,3}(x)\gamma_3(x) & \ldots & a_{3,p}(x)\gamma_p(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{p-1,2}(x)\gamma_2(x) & a_{p-1,3}(x)\gamma_3(x) & \ldots & a_{p-1,p}(x)\gamma_p(x) \end{vmatrix} =$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_{2,2}(x) & a_{2,3}(x) & \ldots & a_{2,p}(x) \\ a_{3,2}(x) & a_{3,3}(x) & \ldots & a_{3,p}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p-1,2}(x) & a_{p-1,3}(x) & \ldots & a_{p-1,p}(x) \end{vmatrix} \prod_{n=2}^{p} \gamma_n(x).
$$

Поскольку $a_{m,n}(x+2) = a_{m,n+1}(x)$, отсюда получаем соотношение

$$
\triangle_p(x) = \triangle_{p-1}(x+2) \prod_{n=2}^{p} \gamma_n(x),
$$

которое влечет равенство (8).

Обозначим через $[x]$ целую часть числа $x \in \mathbb{R}$.

Лемма 3. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$ *и*

$$
\lim_{x \to -1+0} (1+x)^{3/2} \sum_{n=1}^{[(k-1)/2]} c_n P_{2n}^{-k}(x) = 0 \tag{9}
$$

для некоторых констант $c_n \in \mathbb{C}$. *Тогда все* c_n *равны нулю.*

Доказательство. По лемме 1 имеем

$$
(1+x)^{3/2} \sum_{n=1}^{[(k-1)/2]} c_n P_{2n}^{-k}(x) = (1-x)^{k/2} \sum_{n=1}^{[(k-1)/2]} \sum_{p=0}^{2n} c_n \gamma_{k,n,p} (1+x)^{p+(3-k)/2} =
$$

$$
= (1-x)^{k/2} \left(\sum_{p=1}^{2[(k-1)/2]} \left(\sum_{n \geq p/2}^{[(k-1)/2]} c_n \gamma_{k,n,p} \right) \frac{1}{(1+x)^{(k-3)/2-p}} + \frac{1}{(1+x)^{(k-3)/2}} \sum_{n=1}^{(k-3)/2} c_n \gamma_{k,n,0} \right).
$$

Тогда из условия (9) заключаем, что числа c_n удовлетворяют системе линейных уравнений

$$
\sum_{n=1}^{(k-3)/2} c_n \gamma_{k,n,0} = 0,
$$

$$
\sum_{n \geq p/2}^{(k-3)/2} c_n \gamma_{k,n,p} = 0, \qquad 1 \leq p \leq \left[\frac{k-3}{2} \right].
$$

Полагая

$$
\eta_{k,p} = \frac{(-1)^p}{(1-k)_p p! 2^p},
$$

видим, что определитель этой системы равен

$$
\gamma_{k,1,0}\, \gamma_{k,2,0} \ldots \gamma_{k,[(k-1)/2],0}\, \eta_{k,0}\, \eta_{k,1} \ldots \eta_{k,[(k-3)/2]}\, \triangle_{[(k-1)/2]}(2).
$$

Указанное произведение отлично от нуля на основании леммы 2. Отсюда $c_n = 0$ для любого $n = 1, \ldots, \left[\dfrac{k-1}{2}\right]$.

Введем сферические координаты φ, θ на $\mathbb{S}^2$ следующим образом:

$$\xi_1 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \xi_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \xi_3 = \cos\theta, \qquad \varphi \in (0, 2\pi), \quad \theta \in (0, \pi).$$

Поставим в соответствие функции $f \in C(\mathcal{S})$ ряд Фурье

$$f(\xi) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} f^k(\xi),$$

где

$$f^k(\xi) = f_k(\theta)e^{ik\varphi},$$

$$f_k(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \cos\theta)e^{-ik\varphi}d\varphi.$$

Лемма 4. *Пусть функция f принадлежит $C(\mathcal{S})$. Тогда для того чтобы функция f принадлежала $\mathcal{F}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $k \in \mathbb{Z}$ имело место равенство*

$$f^k(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n,k}P_{2n}^{-k}(\cos\theta)e^{ik\varphi}, \qquad c_{n,k} \in \mathbb{C}, \tag{10}$$

где ряд (10) *сходится в пространстве распределений $\mathcal{D}'(\mathcal{S})$.*

Доказательство. Из [7] (теорема 2.3.3) следует, что функция f принадлежит $\mathcal{F}$ в том и только в том случае, когда для любого $k \in \mathbb{Z}$

$$f^k(\xi) = \sum_{\nu\in\mathcal{Z}} c_{\nu,k}P_{\nu}^{-|k|}(\cos\theta)e^{ik\varphi}, \quad c_{n,k} \in \mathbb{C}, \tag{11}$$

где $\mathcal{Z} = \{\nu > 1 : P_\nu^{-1}(0) = 0\}$ и ряд (11) сходится в $\mathcal{D}'(\mathcal{S})$. Учитывая, что

$$P_\nu^{-1}(0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sin\left(\frac{\pi}{2}\nu\right)\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right)}$$

(см. [14], гл. 3, п. 3.4 (20)), получаем требуемое.

4. Доказательство теоремы 1. Из (2), леммы 4 и асимптотического равенства

$$P_2^{-3}(x) \sim \frac{\sqrt{2}}{30(1+x)^{3/2}}, \quad x \to -1+0$$

(см. [14], гл. 3, п. 3.9.2 (14)) следует, что всем требованиям утверждения (ii) удовлетворяет функция

$$\xi \to P_2^{-3}(\xi_3)\frac{(\xi_2 + i\xi_1)^3}{(1-\xi_3^2)^{3/2}}, \quad \xi \in \mathcal{S}.$$

Докажем первое утверждение. Пусть f принадлежит $\mathcal{F}$ и выполнено условие (2). Положим

$$\tau_\alpha \xi = (\xi_1 \cos\alpha - \xi_2 \sin\alpha,\ \xi_1 \sin\alpha + \xi_2 \cos\alpha,\ \xi_3).$$

Используя формулу

$$f^k(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau_\alpha \xi) e^{ik\alpha} d\alpha, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{12}$$

получаем

$$(1+\xi_3)^{3/2} |f^k(\xi)| \le \sup_{\alpha \in [0,2\pi]} (1 + (\tau_\alpha \xi)_3)^{3/2} |f(\tau_\alpha \xi)|,$$

откуда

$$\lim_{\xi_3 \to -1} (1+\xi_3)^{3/2} f^k(\xi) = 0. \tag{13}$$

Далее, лемма 4 и равенства (3), (12) показывают, что $f^k \in C_{\text{even}}(\mathcal{S}')$ при $|k| \le 2$. Аналогично, если $|k| \ge 3$, то для некоторых констант c_n функция

$$\Phi(\xi) = f^k(\xi) - \sum_{n=1}^{[(|k|-1)/2]} c_n P_{2n}^{-|k|}(\cos\theta) e^{ik\varphi}$$

является четной в $\mathcal{S}'$. Тогда

$$\lim_{\xi_3 \to -1} \Phi(\xi)(1-\xi_3^2)^{3/2} = \lim_{\xi_3 \to 1} \Phi(\xi)(1-\xi_3^2)^{3/2} = 0$$

(см. [12], [14], гл. 3, п. 3.9.2 (8)). Отсюда и из (13) делаем вывод, что

$$\lim_{\xi_3 \to -1} (1+\xi_3)^{3/2} \sum_{n=1}^{[(|k|-1)/2]} c_n P_{2n}^{-|k|}(\xi_3) = 0.$$

Теперь по лемме 3 все c_n равны нулю и $f^k \in C_{\text{even}}(\mathcal{S}')$ для любого $k \in \mathbb{Z}$. Это влечет утверждение (i). Таким образом, теорема 1 доказана.

1. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1985. – Т. 2. – 464 с.
2. *Сычев А. В.* Модули и пространственные квазиконформные отображения. – Новосибирск: Наука, 1983. – 152 с.
3. *Axler S., Bourdon P., Ramey W.* Harmonic function theory. – New York: Springer, 1992. – 234 p.
4. *Маркушевич А. И.* Избранные главы теории аналитических функций. – М.: Наука, 1976. – 192 с.
5. *Трохимчук Ю. Ю.* Непрерывные отображения и условия моногенности. – М.: Физматгиз, 1963. – 212 с.
6. *Helgason S.* Integral geometry and Radon transforms. – New York: Springer, 2010. – 301 p.
7. *Volchkov V. V.* Integral geometry and convolution equations. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003. – 454 p.
8. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. – London: Springer, 2009. – 671 p.
9. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Offbeat integral geometry on symmetric spaces. – Basel: Birkhäuser, 2013. – 592 p.
10. *Волчков В. В.* Решение проблемы носителя для некоторых классов функций // Мат. сб. – 1997. – **188**, № 9. – С. 13 – 30.
11. *Funk P.* Über eine geometrische Anwendung der Abelschen Integralgleichung // Math. Ann. – 1916. – **77**. – P. 129 – 135.
12. *Rubin B.* Inversion and characterization of the hemispherical transform // J. D'Analyse Math. – 1999. – **77**. – P. 105 – 128.
13. *Campi S.* On the reconstruction of a star-shaped body from its "half-volumes" // J. Austral. Math. Soc. (Ser. A). – 1984. – **37**. – P. 243 – 257.
14. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1973. – Т. 1. – 296 с.
15. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. – М.: Наука, 1986. – 800 с.

Получено 16.10.13