УДК 517.927

Е. В. Гнып (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
Т. И. Кодлюк (Терноп. нац. пед. ун-т),
В. А. Михайлец (Ин-т математики НАН Украины, Киев; Нац. техн. ун-т Украины „КПИ")

ФРЕДГОЛЬМОВЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ НА ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

For systems of linear differential equations of order $r \in \mathbb{N}$, we study the most general class of inhomogeneous boundary-value problems whose solutions belong to the Sobolev space $W_p^{n+r}([a,b],\mathbb{C}^m)$, where $m,\ n+1 \in \mathbb{N}$ and $p \in [1,\infty)$. We show that these problems are Fredholm problems and establish the conditions under which these problems have unique solutions continuous with respect to the parameter in the norm of this Sobolev space.

Для систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь порядку $r \in \mathbb{N}$ досліджується найбільш широкий клас неоднорідних крайових задач, розв'язки яких належать до соболєвського простору $W_p^{n+r}([a,b],\mathbb{C}^m)$, де числа m, $n+1 \in \mathbb{N}$, а $p \in [1,\infty)$. Доведено теорему про їх фредгольмовість, знайдено умови однозначної розв'язності і неперервності розв'язків по параметру за нормою цього простору.

1. Введение. Вопросы зависимости от параметра решений систем дифференциальных уравнений возникают во многих исследованиях теоретического и прикладного характера (см., например, [1] и приведенную там библиографию). Наиболее полно изучены решения задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, особенно линейных. Более общий случай классических линейных краевых задач изучали И. Т. Кигурадзе [2 – 4] и его последователи. Обобщения этих результатов получены в [5, 6], где найдены условия равномерной непрерывности по параметру решений систем линейных дифференциальных уравнений порядка $r = 1$ (см. также работу [7], где $r \geq 2$). Более широкие классы краевых условий, которые могут содержать производные порядка $\geq r$ для таких систем, введены и изучены в [8, 9].

Цель данной работы — дополнить результаты работы [9] для случая $r = 1$ утверждением о фредгольмовости введенных там краевых задач и критерием их однозначной разрешимости, а затем распространить все эти результаты на системы дифференциальных уравнений произвольного порядка $r \geq 2$. Исследуемые в работе краевые условия являются наиболее широкими, для которых решения принадлежат соболевскому классу W_p^{n+r}, т. е. тотальными на этом функциональном классе.

Результаты такого типа находят применения в спектральной теории дифференциальных операторов современной математической физики (см., например, [10 – 12]).

2. Постановка задачи. Пусть заданы числа $n+1,\ m \in \mathbb{N},\ p \in [1,\infty)$ и конечный интервал $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Обозначим через $W_p^n := W_p^n\big((a,b),\mathbb{C}\big)$, $(W_p^n)^m := W_p^n\big((a,b),\mathbb{C}^m\big)$, $(W_p^n)^{m\times m} :=$ $:= W_p^n\big((a,b),\mathbb{C}^{m\times m}\big)$ пространства Соболева на интервале (a,b) соответственно функций, вектор-функций и матриц-функций. Норма в банаховом пространстве W_p^n задается равенством

$$\|x\|_{n,p} := \left(\sum_{j=0}^{n}\int_a^b |x^{(j)}(t)|^p dt\right)^{1/p}, \quad W_p^0 := L_p, \quad \|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{Lp}.$$

Аналогично пространства $\big(W_p^n\big)^m$ и $(W_p^n)^{m\times m}$ являются банаховыми относительно нормы $\|\cdot\|_{n,p}$, которая определяется как сумма соответствующих норм элементов вектор-функции или матрицы-функции. Из контекста будет понятно, о какой именно норме (скалярных функций, вектор-функций или матриц-функций) идет речь.

Рассмотрим на интервале (a,b) линейную краевую задачу для системы m линейных дифференциальных уравнений порядка $r \in \mathbb{N}$

$$(Ly)(t) := y^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t) y^{(r-j)}(t) = f(t), \quad t \in (a,b), \tag{1}$$

$$By = c, \tag{2}$$

где неизвестная вектор-функция $y(\cdot)$ принадлежит пространству $(W^n{+}r_p)^m$, матрицы-функции $A_{r-j}(\cdot)$ принадлежат пространству $(W_p^n)^{m\times m}$, вектор-функция $f(\cdot)$ принадлежит пространству $(W_p^n)^m$, вектор c — пространству $\mathbb{C}^m$, а линейный непрерывный оператор

$$B\colon (W_p^{n+r})^m \to \mathbb{C}^{rm}. \tag{3}$$

Условимся считать, что вектор-функции и векторы записаны в виде столбцов.

Отметим, что каждый из операторов B в (3) допускает однозначное аналитическое представление

$$By = \sum_{k=1}^{n+r} \alpha_k y^{(k-1)}(a) + \int_a^b \Phi(t) y^{(n+r)}(t)dt, \tag{4}$$

где α_k — комплексные матрицы из $\mathbb{C}^{rm\times m}$, а матрица-функция $\Phi(\cdot)$ принадлежит пространству $(L_q)^{m\times m}$ с показателем $q \in (1,\infty]$, который определяется из равенства $1/p + 1/q = 1$.

Краевое условие (2) является наиболее общим для решений $y(\cdot) \in (W_p^{n+r})^m$ системы дифференциальных уравнений (1). Оно охватывает все классические виды краевых условий, а также (см. [4]) ряд неклассических дополнительных условий, которые содержат производные более высокого порядка, чем порядок дифференциальных уравнений.

Если краевая задача (1), (2) зависит от малого параметра $\varepsilon \geq 0$, то естественным образом возникает вопрос о непрерывности решений $y(\cdot,\varepsilon)$ такой задачи по параметру ε в банаховом пространстве $\left(W_p^{n+r}\right)^m$. Цель данной работы состоит в нахождении достаточных условий для справедливости предельного равенства

$$\|y(\cdot,\varepsilon) - y(\cdot,0)\|_{n+r,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+. \tag{5}$$

3. Основные результаты. Приведем формулировки основных результатов работы. Их доказательства приведены в пп. 4, 5. Запишем неоднородную краевую задачу (1), (2) в виде операторного уравнения

$$(L,B)y = (f,c),$$

где (L,B) — линейный оператор в паре банаховых пространств

$$(L,B)\colon (W_p^{n+r})^m \to (W_p^n)^m \times \mathbb{C}^m. \tag{6}$$

Теорема 1. *Линейный оператор* (6) *ограничен и фредгольмов с нулевым индексом.*

Из теоремы 1 следует, что оператор (L, B) является обратимым тогда и только тогда, когда его ядро тривиально. Это условие можно переформулировать в более конструктивных терминах.

Обозначим через $Y_k(\cdot) \in \left(W_p^{n+r}\right)^{m\times m}$ решение матричной задачи Коши

$$Y_k^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t) Y_k^{(r-j)}(t) = 0, \quad t \in (a, b), \tag{7}$$

$$Y_k^{(j)}(a) = \delta_{kj} I_m, \quad k, j = 0, \ldots, r-1, \tag{8}$$

где δ_{kj} — символ Кронекера, I_m — единичная матрица размерности $m\times m$. Тогда общее решение однородного уравнения (1) с $f = 0$ можно записать в виде

$$y(\cdot) = \sum_{k=0}^{r-1} Y_k(\cdot) q_k, \tag{9}$$

где векторы-столбцы $q_k \in \mathbb{C}^m$ произвольны.

Теорема 2. *Оператор* (L, B) *является обратимым в том и только в том случае, когда квадратная матрица*

$$\Big(\big[BY_0(\cdot)\big] \ldots \big[BY_{r-1}(\cdot)\big]\Big) \tag{10}$$

невырождена.

Здесь квадратная матрица (10) размера $rm \times rm$ образована из r прямоугольных блоков $[BY_k(\cdot)]$ размера $rm \times m$, а j-й столбец матрицы $[BY_k(\cdot)]$ совпадает с действием оператора B на j-й столбец матрицы-функции $Y_k(\cdot)$.

Утверждения теорем 1, 2 являются новыми и при $r = 1$.

Рассмотрим теперь параметрическое семейство неоднородных краевых задач

$$L(\varepsilon) y(t, \varepsilon) = y^{(r)}(t, \varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t, \varepsilon) y^{(r-j)}(t, \varepsilon) = f(t, \varepsilon), \tag{11}$$

$$B(\varepsilon) y(\cdot, \varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{12}$$

где $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, а $\varepsilon_0 > 0$. Предполагается, что при каждом фиксированном ε краевая задача (11), (12) удовлетворяет тем же требованиям, что и краевая задача (1), (2).

Будем предполагать далее, что выполнено следующее допущение.

Допущение 1. *Предельная однородная краевая задача*

$$L(0) y(\cdot, 0) = 0, \qquad B(0) y(\cdot, 0) = 0$$

имеет только тривиальное решение.

Тем самым вектор-функция $y(\cdot, 0)$ в соотношении (5) определена однозначно. Следующая теорема указывает конструктивные условия, при которых непрерывный оператор $\big(L(\varepsilon), B(\varepsilon)\big)$ является обратимым при достаточно малых значениях параметра ε и одновременно гарантирует выполнение предельного равенства (5).

Теорема 3. *Пусть выполнено допущение* 1 *и при* $\varepsilon \to 0+$

1) *для каждого* $k \in \{0, \ldots, r-1\}$ *норма* $\big\|A_k(\cdot, \varepsilon) - A_k(\cdot, 0)\big\|_{n,p} \to 0$;

2) *для каждой вектор-функции* $y \in (W_p^{n+r})^m$ $B(\varepsilon)y \to B(0)y$.
Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ *оператор* $\big(L(\varepsilon), B(\varepsilon)\big)$ *обратим.*

Если, кроме того,

3) $\big\|f(\cdot,\varepsilon) - f(\cdot,0)\big\|_{(n)} \to 0$;

4) $c(\varepsilon) \to c(0)$,

то единственное при малых ε *решение* $y(\cdot,\varepsilon)$ *краевой задачи* (11), (12) *удовлетворяет предельному соотношению* (5).

***Замечание* 1.** Запишем при каждом $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ оператор $B(\varepsilon)$ в виде (4), где $\alpha_k = \alpha_k(\varepsilon)$, $\Phi(t) = \Phi(t,\varepsilon)$. Тогда из критерия слабой сходимости функционалов на пространстве $L_p\big([a,b],\mathbb{C}\big)$ следует, что условие 2 равносильно выполнению таких условий на $\alpha_k(\varepsilon)$ и $\Phi(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$:

2a) для каждого $k \in \{1,2,\ldots,n+r\}$ $\alpha_k(\varepsilon) \to \alpha_k(0)$;

2b) $\sup_{\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)} \big\|\Phi(\cdot,\varepsilon)\big\|_q < \infty$;

2c) $\displaystyle\int_a^t \Phi(s,\varepsilon)ds \to \int_a^t \Phi(s,0)ds$ для каждого $t \in (a,b]$.

При этом условие $\big\|B(\varepsilon) - B(0)\big\| \to 0$ равносильно условию 2a) и более сильному, чем условия 2b) и 2c) , условию

2d) $\big\|\Phi(\cdot,\varepsilon) - \Phi(\cdot,0)\big\|_q \to 0$.

***Замечание* 2.** Из условий 1 и 2 теоремы 3 не следует, что оператор $\big(L(\varepsilon), B(\varepsilon)\big)$ является малым по операторной норме возмущением обратимого оператора $\big(L(0), B(0)\big)$, так как из выполнения условий 2b) и 2c) не следует справедливость соотношения 2d). Более того, множество необратимых операторов в паре банаховых пространств $(W_p^{n+r})^m \to (W_p^n)^m \times \mathbb{C}^m$ является секвенциально плотным в пространстве всех линейных непрерывных операторов.

4. Доказательства теорем 1 и 2. Ограниченность линейного оператора $L\colon (W_p^{n+r})^m \to \to (W_p^n)^m$ следует из определения норм в пространствах Соболева W_p^n и того, что каждое из этих пространств образует банахову алгебру. Оператор B ограничен по определению. Докажем фредгольмовость оператора (L,B).

Определим линейный ограниченный оператор $C\colon \big(W_p^{n+r}\big)^m \to \mathbb{C}^{rm}$, положив

$$Cy = \Big(y(a), y'(a), \ldots, y^{(r-1)}(a)\Big).$$

Поскольку неоднородная задача Коши

$$(L,C)y = (f,c) \in (W_p^n)^m \times \mathbb{C}^{rm}$$

имеет ровно одно решение $y \in \big(W_p^{n+r}\big)^m$ при любом значении правой части уравнения, оператор (L,C) биективен. По теореме Банаха об обратном операторе он обратим. С другой стороны, оператор (L,B) допускает представление

$$(L,B) = (L,C) + (0, B - C), \tag{13}$$

где второе слагаемое является конечномерным оператором. Поскольку компактное возмущение не меняет индекс фредгольмового оператора [13], индекс ограниченного оператора (L,B) равен 0.

Теорема 1 доказана.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуется одно вспомогательное утверждение.

Пусть E — линейное пространство, числа $l, k, j \in \mathbb{N}$, линейный оператор $B\colon E^l \to \mathbb{C}^k$, а матрица $X \in E^{l\times j}$ состоит из векторов пространства E. Обозначим через $[BX]$ числовую матрицу из $\mathbb{C}^{k\times j}$, каждый столбец которой совпадает с действием оператора B на столбец того же номера матрицы X. Нетрудно убедиться, что справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *В сделанных допущениях для каждого вектора-столбца $c \in \mathbb{C}^j$*

$$[BX]c = B(Xc).$$

По теореме 1 оператор (L, B) обратим тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}(L, B) = \{0\}$. Поэтому достаточно показать, что условие $\mathrm{Ker}(L, B) \neq \{0\}$ равносильно вырожденности матрицы (10).

Пусть $\mathrm{Ker}(L, B) \neq \{0\}$. Тогда существует нетривиальное решение однородного уравнения $(L, B)y = (0, 0)$, которое допускает представление (9), где хотя бы один из векторов-столбцов $q_0, \ldots, q_{r-1} \in \mathbb{C}^m$ отличен от нулевого. В силу леммы 1

$$0 = By(\cdot) = \sum_{k=0}^{r-1} B(Y_k(\cdot)q_k) = \sum_{k=0}^{r-1} [BY_k(\cdot)]q_k.$$

Поэтому столбцы матрицы (10) линейно зависимы и она вырожденная.

Обратно, пусть матрица (10) вырожденная. Тогда ее столбцы линейно зависимы и

$$\sum_{k=0}^{r-1} [BY_k(\cdot)]q_k = 0 \tag{14}$$

для некоторых векторов-столбцов $q_0, q_1, \ldots, q_{r-1} \in \mathbb{C}^m$, среди которых имеется ненулевой. Определим по формуле (9) вектор-функцию $y(\cdot) \not\equiv 0$. Для нее $Ly = 0$ и

$$By(\cdot) = \sum_{k=0}^{r-1} B(Y_k(\cdot)q_k) = \sum_{k=0}^{r-1} [BY_k(\cdot)]q_k = 0$$

в силу леммы 1 и равенства (14). Поэтому $y(\cdot) \in \mathrm{Ker}(L, B) \neq \{0\}$.

Теорема 2 доказана.

5. Доказательство теоремы 3. Рассмотрим сначала параметрическое семейство неоднородных задач Коши для системы $k \in \mathbb{N}$ линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$y'(t, \varepsilon) = A(t, \varepsilon)y(t, \varepsilon) + g(t, \varepsilon), \qquad t \in (a, b), \quad y(a, \varepsilon) = h(\varepsilon). \tag{15}$$

Здесь при каждом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ искомая вектор-функция $y(\cdot, \varepsilon) \in (W_p^{n+1})^k$, матрица-функция $A(\cdot, \varepsilon) \in (W_p^n)^{k\times k}$, вектор-функция $g(\cdot, \varepsilon) \in (W_p^n)^k$ и вектор $h(\varepsilon) \in \mathbb{C}^k$ заданы. Как известно, эта задача однозначно разрешима при каждом фиксированном ε.

Лемма 2. *Пусть при $\varepsilon \to 0+$ выполнены условия*:

a) $\|A(\cdot, \varepsilon) - A(\cdot, 0)\|_{n,p} \to 0$;

b) $\|g(\cdot, \varepsilon) - g(\cdot, 0)\|_{n,p} \to 0$;

c) $h(\varepsilon) \to h(0)$.

Тогда при $\varepsilon \to 0+$

$$\|y(\cdot, \varepsilon) - y(\cdot, 0)\|_{n+1,p} \to 0. \tag{16}$$

Это утверждение является следствием теоремы 1.1 из работы [9].

Докажем сначала теорему 3 применительно к задачам Коши

$$L(\varepsilon)x(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad t \in (a,b), \tag{17}$$

$$x^{(j-1)}(a,\varepsilon) = h_j(\varepsilon), \quad j = 1,\ldots,r, \tag{18}$$

где параметр $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$. Единственное решение $x(\cdot,\varepsilon)$ такой задачи принадлежит пространству $\left(W_p^{n+r}\right)^m$.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* 1, 3 *теоремы 3 и, кроме того,*

$$h_j(\varepsilon) \to h_j(0), \quad \varepsilon \to 0+ \quad \textit{для каждого} \quad j \in \{1,\ldots,r\}. \tag{19}$$

Тогда

$$\|x(\cdot,\varepsilon) - x(\cdot,0)\|_{n+r,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{20}$$

Доказательство. При $r = 1$ лемма 3 равносильна лемме 2. Пусть $r \geq 2$. Как известно, краевая задача (17), (18) равносильна задаче (15), в которой

$$A(\cdot,\varepsilon) := \begin{pmatrix} 0_m & I_m & 0_m & \ldots & 0_m \\ 0_m & 0_m & I_m & \ldots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0_m & 0_m & 0_m & \ldots & I_m \\ -A_0(\cdot,\varepsilon) & -A_1(\cdot,\varepsilon) & -A_2(\cdot,\varepsilon) & \ldots & -A_{r-1}(\cdot,\varepsilon) \end{pmatrix} \in \left(W_p^n\right)^{mr\times mr},$$

где 0_m и I_m обозначают соответственно нулевую и единичную матрицы порядка m, а

$$g(\cdot,\varepsilon) := \mathrm{col}\,\big(0, f(\cdot,\varepsilon)\big), \qquad h(\cdot,\varepsilon) := \mathrm{col}\,\big(h_1(\cdot,\varepsilon),\ldots,h_r(\cdot,\varepsilon)\big).$$

Решения этих задач связаны между собой равенством

$$y(\cdot,\varepsilon) = \mathrm{col}\left(x(\cdot,\varepsilon), x'(\cdot,\varepsilon),\ldots,x^{(r-1)}(\cdot,\varepsilon)\right). \tag{21}$$

При этом условия 1, 3 теоремы 3 и условие (19) равносильны соответственно условиям a), b), c) леммы 2, а асимптотическое равенство (20) с учетом (21) равносильно (16). Таким образом, утверждение леммы 3 вытекает из справедливости леммы 2.

Установим теперь существование и единственность решения краевой задачи (11), (12) при малых значениях параметра ε.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* 1 *и* 2 *теоремы* 3 *и допущение* 1. *Тогда для достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *оператор* $\big(L(\varepsilon), B(\varepsilon)\big)$ *обратим.*

Доказательство. Рассмотрим при каждом $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ и $k \in \{0,\ldots,r-1\}$ задачу Коши (7), (8), где

$$Y_k^{(r)}(\cdot) = Y_k^{(r)}(\cdot,\varepsilon), \qquad A_{r-j}(\cdot) = A_{r-j}(\cdot,\varepsilon).$$

Она состоит из m задач Коши вида (17), (18) с $f = 0$ относительно вектор-функций $x(\cdot,\varepsilon)$, которые являются столбцами матрицы $Y_k(\cdot,\varepsilon)$. Тогда в силу леммы 3

$$\big\|Y_k(\cdot,\varepsilon) - Y_k(\cdot,0)\big\|_{n+r,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{22}$$

Отсюда в силу условия 2 теоремы 3 следует сходимость при $\varepsilon \to 0+$ блочных числовых матриц

$$\Big(\big[B(\varepsilon)Y_0(\cdot,\varepsilon)\big]\dots\big[B(\varepsilon)Y_{r-1}(\cdot,\varepsilon)\big]\Big) \to \Big(\big[B(0)Y_0(\cdot,\varepsilon)\big]\dots\big[B(0)Y_{r-1}(\cdot,\varepsilon)\big]\Big). \tag{23}$$

Однако предельная квадратная матрица невырождена в силу допущения 1 и теоремы 2. Поэтому для достаточно малых $\varepsilon \geq 0$

$$\det\Big(\big[B(\varepsilon)Y_0(\cdot,\varepsilon)\big]\dots\big[B(\varepsilon)Y_{r-1}(\cdot,\varepsilon)\big]\Big) \neq 0. \tag{24}$$

Отсюда в силу теоремы 2 следует обратимость оператора $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$.

Лемма 4 доказана.

Рассмотрим теперь полуоднородную краевую задачу

$$L(\varepsilon)v(\cdot,\varepsilon) \equiv 0, \qquad B(\varepsilon)v(\cdot,\varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{25}$$

зависящую от параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия* 1, 2, 4 *теоремы* 3. *Тогда*

$$\big\|v(\cdot,\varepsilon) - v(\cdot,0)\big\|_{n+r,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+. \tag{26}$$

Доказательство. Запишем при каждом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ решение однородного дифференциального уравнения (25) в виде

$$v(\cdot,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{r-1} Y_k(\cdot,\varepsilon)q_k(\varepsilon) \tag{27}$$

с произвольными вектор-функциями $q_0(\varepsilon),\dots,q_{r-1}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$, где каждая матрица-функция $Y_k(\cdot,\varepsilon)$ принадлежит пространству $(W_p^{n+r})^{m\times m}$. В силу леммы 1 имеем

$$B(\varepsilon)v(\cdot,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{r-1} B(\varepsilon)\big(Y_k(\cdot,\varepsilon)q_k(\varepsilon)\big) = \sum_{k=0}^{r-1}\big[B(\varepsilon)Y_k(\cdot,\varepsilon)\big]q_k(\varepsilon).$$

Поэтому второе уравнение в формуле (25) равносильно тому, что

$$\sum_{k=0}^{r-1}\big[B(\varepsilon)Y_k(\cdot,\varepsilon)\big]q_k(\varepsilon) = c(\varepsilon). \tag{28}$$

Равенство (28) можно записать в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$\Big(\big[B(\varepsilon)Y_0(\cdot,\varepsilon)\big]\dots\big[B(\varepsilon)Y_{r-1}(\cdot,\varepsilon)\big]\Big)q(\varepsilon) = c(\varepsilon) \tag{29}$$

относительно вектора-столбца $q(\varepsilon) = \operatorname{col}\big(q_0(\varepsilon),\dots,q_{r-1}(\varepsilon)\big)$.

Отсюда в силу условия 4 теоремы 3 и формул (23), (24) следует, что система (29) имеет единственное решение при достаточно малых ε и оно удовлетворяет предельному равенству $q(\varepsilon) \to q(0) \in \mathbb{C}^{rm}$ при $\varepsilon \to 0+$. Из него и соотношения (22) получаем формулу (26).

Лемма 5 доказана.

Докажем теперь справедливость предельного равенства (5) без предположения об однородности дифференциального уравнения (11). Для каждого достаточно малого $\varepsilon \geq 0$ положим

$$z(\cdot,\varepsilon) = y(\cdot,\varepsilon) - x(\cdot,\varepsilon),$$

где вектор-функция $y(\cdot,\varepsilon)$ является решением неоднородной краевой задачи (11), (12), а вектор-функция $x(\cdot,\varepsilon)$ — решеним задачи Коши (17), (18) с $h_j(\varepsilon) \equiv 0$. Тогда $z(\cdot,\varepsilon)$ является решением полуоднородной краевой задачи

$$L(\varepsilon)z(\cdot,\varepsilon) \equiv 0, \qquad B(\varepsilon)z(\cdot,\varepsilon) = \tilde{c}(\varepsilon), \qquad \tilde{c}(\varepsilon) := c(\varepsilon) - B(\varepsilon)x(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}.$$

В силу сделанных нами предположений и леммы 3 при $\varepsilon \to 0+$ $\tilde{c}(\varepsilon) \to \tilde{c}(0)$. Поэтому в соответствии с леммой 5

$$\big\|z(\cdot,\varepsilon) - z(\cdot,0)\big\|_{n+r,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{30}$$

Из соотношений (20) и (30) следует асимптотическое равенство (5).

Теорема 3 доказана.

Использованный в настоящей работе подход позволяет исследовать краевые задачи и в иных шкалах функциональных пространств (см. [15, 16] и приведенную там библиографию).

1. *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A., Reva N. V.* Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 1. – P. 77 – 90.
2. *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Новейшие достижения / ВИНИТИ. – 1987. – **30**. – С. 3 – 103.
3. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975. – 352 с.
4. *Кигурадзе И. Т.* О краевых задачах для линейных дифференциальных систем с сингулярностями // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, № 2. – С. 198 – 209.
5. *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Предельный переход в системах линейных дифференциальных уравнений // Доп. НАН України. – 2008. – № 8. – С. 28 – 30.
6. *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Обобщения теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач // Доп. НАН України. – 2008. – № 9. – С. 23 – 27.
7. *Mikhailets V. A., Chekhanova G. A.* Limit theorems for general one-dimensional boundary-value problems // J. Math. Sci. – 2015. – **204**, № 3. – P. 333 – 342.
8. *Михайлец В. А., Чеханова Г. А.* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах $C^{(n)}[a,b]$ // Доп. НАН України. – 2014. – № 7. – С. 24 – 28.
9. *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A.* Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces // J. Math. Sci. –2013. – **190**, № 4. – P. 589 – 599.
10. *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Resolvent convergence of Sturm – Liouville operators with singular potentials // Math. Notes. – 2010. – **87**, № 1-2. – P. 287 – 292.
11. *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Regularization of singular Sturm – Liouville equations // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2010. – **16**, № 2. – P. 120 – 130.
12. *Goriunov A. S., Mikhailets V. A., Pankrashkin K.* Formally self-adjoint quasi-differential operators and boundary-value problems // Electron. J. Different. Equat. – 2013. – № 101. – P. 1 – 16.
13. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральная теория. – М.: Мир, 1966. – 1064 с.
14. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 495 с.
15. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. – М.: Мир, 1986. – 447 с.
16. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. – Berlin: De Gruyter, 2014. – xii + 297 p.

Получено 23.03.15