УДК 517.5

Н. Л. Пачулиа (Абхаз. гос. ун-т, Сухум)

ОБ ОЦЕНКАХ СИЛЬНЫХ СРЕДНИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

We consider the problem of (λ, φ)-strong summation of number series by a regular method λ with power summation of the function φ. The accumulated results are extended to the Fourier expansions in trigonometric functions $f \in L_p$, $p > 1$, where C is the set of 2π-periodic continuous functions. Some results are also obtained for the estimation of strong means of the method λ and L_p, $p > 1$, the Lebesgue point x of the function f under certain additional conditions in the case where the function φ tends to infinity AS $u \to \infty$ faster than the exponential function $\exp(\beta u) - 1$, $\beta > 0$.

Розглядається (λ, φ)-сильне підсумовування числових рядів регулярним методом λ зі степенем підсумовування функції φ. Отримані результати поширено на розклад Фур'є по тригонометричній системі функцій $f \in L_p$, $p > 1$, і $f \in C$, де C — множина 2π-періодичних неперервних функцій. Встановлено результати по оцінках сильних середніх методу λ в L_p, $p > 1$, точці Лебега x функції f при деяких додаткових умовах у випадку прямування функції φ до нескінченності при $u \to \infty$ швидше за показникову функцію $\exp(\beta u) - 1$, $\beta > 0$.

В настоящей работе получены оценки сильных средних методов суммирования числовых рядов, к оторые использованы при исследовании аналогичных задач теории рядов Фурье по тригонометрической системе функций.

Пусть даны числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \tag{1}$$

с частными суммами $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, Φ — множество возрастающих, непрерывных на $[0, \infty)$ функций φ таких, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(u) > 0$ при $u > 0$, а Φ_1 — подмножество функций из Φ, удовлетворяющих условиям

$$\varphi(2u) \le a\varphi(u) \quad \forall u \in [0, \sigma], \tag{2}$$

$$\ln \varphi(u) = 0(u), \quad u \to \infty. \tag{3}$$

Далее, пусть матрица $\left(\lambda_k^n\right) = \lambda$ определяет регулярный метод суммирования рядов, причем при любом фиксированном $n \in N_0 = \{0, 1, \ldots\}$ последовательность чисел (λ_k^n) не возрастает по индексу k и неотрицательная. Множество таких матриц обозначим через Λ, а $S \in R = (-\infty, \infty)$.

Пусть $\varphi \in \phi$ и $\lambda \in \Lambda$. Введем величины

$$H_n^{\varphi}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^n \varphi\left(|S_k - S|\right), \tag{4}$$

которые называют φ-сильными средними метода λ ряда (1) или (λ, φ)-сильными средними ряда (1).

Впервые величины вида (4) для тригонометрических рядов Фурье для средних арифметических, называемых (H, q)-сильными средними, ввели и изучали Харди и Литтльвуд [1, 2]. В этих работах заложены основы современной теории сильного суммирования рядов Фурье. Позднее такие объекты рассматривали многие другие авторы (см., например, монографии [3, 4]).

Для формулировки основного утверждения работы введем следующие обозначения. Пусть (μ_n), (ν_n) — две возрастающие последовательности натуральных чисел такие, что $1 \le \le \frac{\nu_n}{\mu_n} \le \sigma$. В дальнейшем B_n — произвольное непустое подмножество натуральных чисел из сегмента $[\mu_n, \nu_n]$, $r_n = |B_n|$ — мощность множества B_n, $\gamma \in \Phi$ и

$$h_{n,r_n}^{(\gamma)} = \frac{1}{r_n} \sum_{k \in B_n} \gamma(|S_k - S|). \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть последовательность чисел* $(F_n)_{n \in N_0}$, *убывая, стремится к нулю и* $\gamma \in \Phi$. *Если для любых* $B_n \subset [\mu_n, \nu_n]$

$$h_{n,r_n}^{\gamma} \le A_0 \gamma\left(F_{\mu_n}\right) \ln \frac{(\nu_n - \mu_n + 1)e}{r}, \tag{6}$$

то для любого $\gamma \in \Phi_1$

$$\tau_n^{\varphi(\gamma)} = \frac{1}{\nu_n - \mu_n + 1} \sum_{k=\mu_n}^{\nu_n} \varphi\left(\gamma\left(|S_k - S|\right)\right) \le A\varphi\left(\gamma\left(F_{\mu_n}\right)\right). \tag{7}$$

Здесь и в дальнейшем через A будем обозначать постоянное число, возможно не одно и то же в различных местах текста.

Доказательство. Если $F_{\mu_n} = 0$, то в силу неравенства (6) следует $\gamma\left(|S_k - S|\right) = 0$ $\forall k \in [\mu_n, \nu_n]$, поэтому соотношение (7) имеет место. Пусть $F_{\mu_n} > 0$,

$$B_{n,\nu} = \left\{ k \in [\mu_n, \nu_n] : (\nu - 1)\gamma\left(F_{\mu_n}\right) \le \gamma\left(|S_k - S|\right) < \nu\left(F_{\mu_n}\right) \right\},$$

$$\delta_{n,\nu} = 1 \quad \text{при} \quad B_{n,\nu} \ne \varnothing, \qquad \delta_{n,\nu} = 0 \quad \text{при} \quad B_{n,\nu} = \varnothing.$$

В силу условия (6), считая при этом $B_n = B_{n,\nu}$ и $r_{n,\nu} = |B_{n,\nu}|$, получаем

$$(\nu - 1)\gamma\left(F_{\mu_\nu}\right) \le \frac{1}{r_{n,\nu}} \sum_{k \in B_\nu} \gamma\left(|S_k - S|\right) \le A_0 \gamma\left(F_{\mu_n}\right) \ln \frac{\nu_n - \mu_\nu + 1}{r_{n,\nu}} e.$$

Отсюда следует, что

$$r_{n,\nu} \le e(\nu_n - \mu_n + 1)\exp(-\alpha\nu), \quad \alpha = (2A_0)^{-1}, \quad \nu > 1. \tag{8}$$

Группируя слагаемые по всевозможным множествам $B_{n,\nu}$, с учетом возрастания функции φ и неравенства (8) имеем

$$\tau_n^{\varphi(\gamma)} = \frac{1}{\nu_n - \mu_n + 1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\delta_{n,\nu}\sum_{k\in B_{n,\nu}}\varphi\big(\gamma(|S_k - S|)\big) \le$$

$$\le e\sum_{\nu=2}^{\infty}\varphi\Big(\nu\gamma\Big(F_{\mu_n}\Big)\Big)\exp(-\alpha\nu) + \varphi\Big(\gamma\Big(F_{\mu_n}\Big)\Big).$$

Поскольку функция φ принадлежит Φ_1, то [3] существует положительное число $\sigma = \sigma_\varphi$ такое, что для любого $u \in [0,\sigma]$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi(\nu u)\exp(-\alpha\nu) \le A\varphi(u). \tag{9}$$

На основании равенства $\lim_{n\to\infty}\gamma\Big(F_{\mu_n}\Big) = 0$ найдется число n_0 при $n \ge n_0$ такое, что выполняется неравенство $\gamma\Big(F_{\mu_n}\Big) \le \sigma$. Тогда, считая $u = \gamma\Big(F_{\mu_n}\Big)$, из (9) получаем

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}\varphi\Big(\nu\gamma\Big(F_{\mu_n}\Big)\Big)\exp(-\alpha\nu) \le A\varphi\Big(\gamma\Big(F_{\mu_n}\Big)\Big),$$

что доказывает соотношение (7) при $n \ge n_0$. Если $n < n_0$, то неравенство (7) выполняется за счет коэффициента А.

Теорема 1 доказана.

Полагая в теореме 1 $\mu_n = n$, $\nu_n = 2n$, получаем такое следствие.

***Следствие* 1.** *Пусть последовательность чисел* (F_n), *убывая, стремится к нулю, а* $\gamma \in \Phi$. *Тогда если для любого* $B_n \subset [n, 2n]$

$$\frac{1}{r_n}\sum_{k\in B_n}\gamma(|S_k - S|) \le A\gamma(F_n)\ln\frac{ne}{r_{n,\nu}}, \tag{10}$$

то для любого $\varphi \in \Phi_1$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\varphi(\gamma(|S_k - S|)) \le A\varphi(\gamma(F_n)). \tag{11}$$

Теорема 2. *Пусть последовательность чисел* (F_n) *убывает и стремится к нулю, функция* γ *принадлежит* Φ *и для любого* $B_n \subset [n, 2n]$ *выполнены условия* (10). *Тогда если последовательность* (λ_n) *убывает и неотрицательная, а* $\varphi \in \Phi_1$, *то*

$$H^{\varphi(\gamma)} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \varphi\big(\gamma(|S_k - S|)\big) \le A \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \varphi\big(\gamma(F_k)\big). \tag{12}$$

Если $\lambda \in \Lambda$, *то*

$$H_n^{\varphi(\gamma)} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^n \varphi\big(\gamma(|S_k - S|)\big) \le A \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^n \varphi\big(\gamma(F_k)\big). \tag{13}$$

Доказательство. Соотношения (12), (13) доказываются аналогично, поэтому достаточно доказать неравенство (12). Если $\lambda_0 = 0$ или $F_0 = 0$, то справедливо (12). Пусть $\lambda_0 > 0$ и $F_0 > 0$. На основании следствия 1 получаем

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \lambda_k \varphi\big(\gamma(|S_k - S|)\big) \le A\lambda_{2^n} \varphi\Big(\gamma\Big(F_{2^n}\Big)\Big) 2^n \le 2A \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \lambda_k \varphi\big(\gamma(F_k)\big).$$

Тогда, представляя сумму в пачки по $k \in \left[2^n, 2^{n+1} - 1\right]$, имеем

$$H^{\varphi(\gamma)} = \sum_{k=0}^{1} \lambda_k \varphi\big(\gamma(|S_k - S|)\big) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \lambda_k \varphi\big(\gamma(|S_k - S|)\big) \le$$

$$\le A \left\{ \sum_{k=1}^{1} \lambda_k + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \lambda_k \varphi\big(\gamma(F_k)\big) \right\} \le A_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \varphi\big(\gamma(F_k)\big).$$

Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 следует такое утверждение.

Следствие 2. *Пусть последовательность* (F_n), *убывая, стремится к нулю, а* γ *принадлежит* Φ *и выполнено условие* (10). *Тогда для любого* $\varphi \in \Phi_1$ *выполняется неравенство*

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \varphi\big(\gamma(|S_k - S|)\big) \le \frac{A}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \varphi\big(\gamma(F_k)\big). \tag{14}$$

Говорят, что ряд (1) сильно суммируем методом $\lambda \in \Lambda$ к числу S, если $\varphi \in \Phi$ и

$$\lim_{n\to\infty} H_n^{\varphi}(S, \lambda) = 0. \tag{15}$$

Теорема 3. *Пусть* $\varphi, \gamma \in \Phi$ *и*

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\gamma(u)}{\varphi(u)} < \infty. \tag{16}$$

Если выполнено равенство (15), *то*

$$\lim_{n\to\infty} H_n^{\gamma}(S,\lambda) = 0 . \tag{17}$$

Доказательство. Заметим, что теорема 3 доказана в [6, с. 106], когда λ является методом средних арифметических. Для общих регулярных неотрицательных методов суммирования доказательство теоремы 3 проводится аналогично, однако, для полноты рассуждения, приведем его. Поскольку λ — регулярный положительный метод суммирования рядов, существует положительное число τ такое, что для любого n

$$\sum_{k\in N_0} \lambda_k^n \le \tau .$$

В силу условия (16) существуют числа $\mu, M > 0$ такие, что для $u > M$

$$\gamma(u) \le \mu\varphi(u) .$$

Поскольку $\lim_{u\to 0}\gamma(u) = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $u \in [0,\delta]$ выполняется неравенство $\gamma(u) < \dfrac{\varepsilon}{\tau}$.

Введем обозначения

$$E_1 = \{k \in N_0 : |S_k - S| > M\}, \qquad E_2 = \{k \in N_0 : \delta \le |S_k - S| \le M\},$$

$$E_3 = \{k \in N_0 : |S_k - S| < \delta\}.$$

Очевидно,

$$H_n^{\gamma}(S,\lambda) = \sum_1^3 \sum_{k\in E_j} \lambda_k^n \gamma(|S_k - S|) = \sum_1^3 I_j(n) .$$

Ясно, что

$$I_1(n) \le \mu \sum_{k\in E_1} \lambda_k^n \varphi(|S_k - S|) \le \mu H_n^{\varphi}(S,\lambda).$$

Легко заметить, что

$$I_3(n) \le \gamma(\delta) \sum_{k\in E_3} \lambda_k^n \le \tau\gamma(\delta) < \varepsilon .$$

Далее, с одной стороны,

$$H_n^{\varphi}(S,\lambda) \ge \sum_{k\in E_2} \lambda_k^n \varphi(|S_k - S|) \ge \varphi(\delta) \sum_{k\in E_2} \lambda_k^n ,$$

а с другой —

$$I_2(n) \le \gamma(M) \sum_{k \in E_2} \lambda_k^n .$$

Таким образом,

$$H_n^\gamma(S,\lambda) \le \varepsilon + \left(\frac{\gamma(M)}{\varphi(\delta)} + \mu \right) H_n^\varphi(S,\lambda),$$

что и завершает доказательство теоремы 3.

Итак, при выполнения условий $\lambda \in \Lambda$, $\varphi, \gamma \in \phi$ и соотношения (16) следует, что метод сильного суммирования (λ,φ) ряда (1) к S сильнее метода (λ,γ).

Применим теорему 1 к сильному суммированию ортогональных разложений функции.

Пусть $L_p = \left\{ f : \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}$, $f \in L_p$, $p \ge 1$, и ее ряд Фурье по тригонометрической системе функций имеет вид

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f,x), \tag{18}$$

где $A_k(f,x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx$ при $k > 0$, $A_0(f,x) = \dfrac{a_0}{2}$, а a_k, b_k — коэффициенты Фурье. Далее, пусть

$$S_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(f,x)$$

— частные суммы порядка n ряда (18), а $\rho_n(f,x) = f(x) - S_n(f,x)$ — соответствующее отклонение.

Рассмотрим (λ,φ)-сильные средние ряда (18) метода $\lambda \in \Lambda$ для $\varphi \in \Phi$:

$$h_n^\varphi(f,x,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^n \varphi(|\rho_k(f,x)|).$$

В работе [7] доказано следующее утверждение. Пусть $f \in L_p$, $p > 1$, и равномерно относительно $x \in E \subset [-\pi,\pi]$ выполнено соотношение

$$\phi_{p,x}(h) = \int_0^h |f(x+t) - f(x)|^p \, dt = o(h). \tag{19}$$

Тогда для любого $B \subset [n,2n]$ равенство

$$\left\{ \frac{1}{r_n} \sum_{k \in B} |\rho_k(f,x)|^q \right\}^{\frac{1}{q}} = o\left(\ln \frac{ne}{r_n} \right) \tag{20}$$

выполняется равномерно по x при $n \to \infty$ на множестве E. Следовательно, величина

$$\varepsilon_m^{(q)}(f,E) = \sup_{n \geq m} \frac{1}{r_n} \sum_{k \in B} |\rho_k(f,x)|^q \left(\ln \frac{ne}{r_n} \right)^{-1}, \quad q \in (0,1], \tag{21}$$

убывая, стремится к нулю. Кроме того, в [5] доказано, что если $f \in C$, $\gamma(u) = u^q$, $q \in (0,1]$, то для любого $B \subset [n,2n]$

$$\frac{1}{r_n} \sum_{k \in B} \gamma(|\rho_k(f,x)|) \leq A\gamma(E_n(f)) \ln \frac{ne}{r_n}, \tag{22}$$

где C — пространство 2π-периодических непрерывных функций, а $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше n.

Используя следствие 1 и полагая при этом $S_k = S_k(f,x)$ и $S = f(x)$, в силу соотношений (21), (22) убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 4. *Пусть функция* $\gamma(u) = u^q$, $q \in (0,1]$, $\varphi \in \Phi_1$ *и* $\lambda \in \Lambda$. *Тогда если* $f \in L_p$, $p > 1$, *и равенство* (19) *выполнено равномерно относительно* x *на множестве* E, *то*

$$h_n^{\varphi(\gamma)}(f,x,\lambda) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^n \varphi\left(\gamma\left(\varepsilon_k^{(q)}(f,E)\right)\right). \tag{23}$$

Если же $f \in C$, *то*

$$h_n^{\varphi(\gamma)}(f,x,\lambda) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^n \varphi(\gamma(E_k(f))). \tag{24}$$

Из теоремы 4 следует такое утверждение.

***Следствие* 3.** *Пусть* $\gamma(u) = u^q$, $q \in (0,1]$, $\varphi(u) = \exp(u) - 1$. *Тогда если* $f \in L_p$, $p > 1$, *и равенство* (19) *выполняется равномерно на множестве* E, *то*

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \varphi(\gamma(|\rho_k(f,x)|)) \leq \frac{A}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\gamma\left(\varepsilon_k^{(1)}(f,E)\right)\right). \tag{25}$$

Если же $f \in C$, *то*

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \varphi(\gamma(|\rho_k(f,x)|)) \leq \frac{A}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \varphi(\gamma(E_n(f))). \tag{26}$$

***Следствие* 4.** *Пусть функции* $\gamma(u) = u^q$, $q \in (0,1]$, $\varphi \in \Phi_1$ *и* $\lambda \in \Lambda$. *Тогда если* $f \in L_p$, $p > 1$, *и равенство* (19) *выполнено равномерно на множестве* E, *то*

$$\lim_{n\to\infty} h_n^{\varphi(\gamma)}(f,x,\lambda) = 0 \tag{27}$$

выполняется равномерно по x *на множестве* E .

Если $\gamma(u)=u^q$, $q>1$, то можно подобрать функцию $\varphi\in\phi_1$ (например, $\varphi(u) = \exp(\beta u)-1$, $\beta>0$) такую, что условие (3) для сложной функции $\varphi(\gamma)$ не выполняется. Тогда гарантировать равенство (27) в условиях (19) нельзя. Однако при дополнительных условиях на функцию f можно получить из (19) соотношение (27).

Сначала убедимся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 5. *Пусть функция* $\gamma(u)=u^q$ *при* $q>1$. *Тогда существует функция* $f_0\in C$, *удовлетворяющая в точке* x_0 *соотношению*

$$Q^\gamma = \overline{\lim_{n\to\infty}} P_{n,r_n}^\gamma(f_0,x_0)\left(\gamma\left(\varepsilon_n^{(1)}(f_0,x_0)\right)\ln\frac{ne}{r_n}\right)^{-1} = +\infty, \tag{28}$$

где

$$P_{n,r_n}^\gamma(f_0,x_0) = \frac{1}{r_n}\sum_{k\in B}\gamma\left(|\rho_k(f_0,x_0)|\right), \tag{29}$$

$$n\in N,\quad B\subset[n,2n],\quad r=|B|.$$

Доказательство. Пусть функция $\varphi(u)=\exp(u)-1$. Поскольку

$$\lim_{u\to\infty} u^{-1}\ln\varphi\left(\gamma(u)\right) = \infty, \tag{30}$$

то на основании результатов работы [6, с. 109] существует функция $f_0\in C$, для которой в некоторой точке x_0

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} P_{n,n+1}^{\varphi(\gamma)}(f_0,x_0) = \infty, \tag{31}$$

где

$$P_{n,n+1}^{\varphi(\gamma)}(f_0,x_0) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\varphi\left(\gamma\left(|\rho_k(f_0,x_0)|\right)\right).$$

Если $Q^\gamma<\infty$, то для любого $B\subset[n,2n]$

$$P_{n,r_n}^\gamma(f_0,x_0)\left(\gamma\left(\varepsilon_n^{(1)}(f_0,x_0)\right)\ln\frac{ne}{r_n}\right)^{-1} < \infty.$$

Тогда на основании следствия 1 получаем

$$P_{n,n+1}^{\varphi(\gamma)}(f_0,x_0) \le A\varphi\Big(\gamma\Big(\varepsilon_k^{(1)}(f_0,x_0)\Big)\Big).$$

Функция f_0 принадлежит C, тогда на основании равенств (20) и $\lim_{u\to 0}\varphi(\gamma(u)) = 0$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} P_{n,n+1}^{\varphi(\gamma)}(f_0,x_0) = 0. \tag{32}$$

Соотношения (31), (32) выполняются одновременно, что невозможно.

Теорема 5 доказана.

Таким образом, условие непрерывности функции не обеспечивает выполнения неравенств (25), (26) при условии $\gamma(u)=u^q$, $q>1$, $\varphi(u)=\exp(u)-1$.

Пусть

$$\Phi_2 = \{\varphi\in\Phi_1:\ \varphi(u)\le Au,\ u\in[0,\mu]\},$$

$$\Phi_3 = \left\{\varphi\in\Phi_2:\ \frac{\varphi(u)}{u}\ge\beta>0\right\}, \qquad C_\mu = \{f\in C: |\rho_k(f,x)|\le\mu\}.$$

Ясно, что функции $\varphi(u)=u^q$, $q>1$, и $\varphi(u)=\exp(qu)-1$, $q>0$, принадлежат множеству Φ_2.

Теорема 6. *Пусть функция* $f\in L_p$, $p>1$, $|\rho_k(f,x)|\le\tau$ $\forall k\in N$ *на множестве* E *и равномерно относительно* $x\in E$ *выполнено равенство* (19). *Тогда если* $\gamma\in\Phi_2$, *то для любого* $B\subset[n,2n]$

$$P_{n,r_n}^{\gamma}(f,x) \le A\varepsilon_n^{(1)}(f,E)\ln\frac{ne}{r_n}. \tag{33}$$

Если же $f\in C_\tau$, $\gamma\in\Phi_3$, *то для любого* $B\subset[n,2n]$

$$P_{n,r_n}^{\gamma}(f,x) \le k2\ A\gamma\Big(\varepsilon_n^{(1)}(f,E)\Big)\ln\frac{ne}{r_n}. \tag{34}$$

Из теоремы 6 следует такое утверждение.

***Следствие* 5.** *Пусть* $f\in L_p$, $p>1$, *на множестве* E *равномерно относительно* x *выполняется* (19) *и* $|\rho_k(f,x)|\le\tau$ $\forall k\in N_0$. *Тогда если* $\gamma\in\Phi_3$, $\varphi\in\Phi_1$, *то*

$$P_{n,n+1}^{\varphi(\gamma)}(f,x) \le A\varphi\Big(\gamma\Big(\varepsilon_n^{(1)}(f,E)\Big)\Big).$$

Теорема 7. *Пусть функция* $f\in C_\mu$. *Тогда если* $\gamma\in\Phi_2$, *то для любого* $B\subset[n,2n]$

$$P_{n,r_n}^{\gamma}(f,x) \leq AE_n(f)\ln\frac{ne}{r_n}. \tag{35}$$

Если же $\gamma \in \Phi_3$, *то для любого* $B \subset [n, 2n]$

$$P_{n,r_n}^{\gamma}(f,x) \leq A\gamma(E_n(f))\ln\frac{ne}{r_n}. \tag{36}$$

Докажем неравенство (34) (неравенства (33), (35) и (36) доказываются аналогично). Поскольку функция γ принадлежит Φ_2, то, используя соотношение (21) при $q=1$, получаем

$$P_{n,r_n}^{\gamma}(f,x) \leq \frac{A}{r_n}\sum_{k\in B}|\rho_k(f,x)| \leq A\varepsilon_n^{(1)}(f,E)\ln\frac{ne}{r_n}.$$

С другой стороны, $\gamma \in \Phi_3$, поэтому $u \leq \beta\gamma(u)$. Тогда в силу предыдущего неравенства получаем соотношение (34).

Из теоремы 7 следует такое утверждение.

***Следствие* 6.** *Пусть* $f \in C_\mu$, $\gamma \in \Phi_3$, $\varphi \in \Phi_1$, *тогда*

$$P_{n,n+1}^{\varphi(\gamma)}(f,x) \leq A\varphi(\gamma(E_n)).$$

Опираясь на заключения теорем 6 и 7, как при доказательстве теоремы 2, убеждаемся в справедливости следующих утверждений.

Теорема 8. *Пусть* $f \in L_p$, $p > 1$, *на множестве* E *равенство* (19) *выполняется равномерно относительно* x *и* $|\rho_k(f,x)| \leq \mu$ $\forall k \in N_0$. *Если* $\gamma \in \Phi_3$, $\varphi \in \Phi_1$, $\lambda \in \Lambda$, *то имеет место неравенство* (23).

Теорема 9. *Пусть* $f \in C_\mu$, $\gamma \in \Phi_3$, $\varphi \in \Phi_1$, $\lambda \in \Lambda$. *Тогда имеет место неравенство* (24).

Из теоремы 8 следует такое утверждение.

***Следствие* 7.** *Пусть* $\varphi(u) = \exp((\exp(u)-1)-1)$, $f \in L_p$, $p > 1$, *на множестве* E *равномерно относительно* x *выполняется соотношение* (19) *и* $|\rho_k(f,x)| \leq \mu$ $\forall k \in N_0$. *Если* $\lambda \in \Lambda$, *то равенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k^n\varphi(|\rho_k(f,x)|) = o(1), \quad n \to \infty, \tag{37}$$

выполняется равномерно на множестве E.

На основании теоремы 3, так как

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\exp(u^q)-1}{\exp(\exp(u)-1)-1} = 0, \quad q > 0,$$

в силу следствия 7 получим такое утверждение.

Следствие 8. *Пусть* $\gamma(u)=\exp(u^q)-1$, $q>1$, $f\in L_p$, $p>1$, *на множестве* E *соотношение* (19) *выполняется равномерно и* $|\rho_k(f,x)|\le\mu$ $\forall k\in N_0$. *Если* $\lambda\in\Lambda$, *то равномерно на* E

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k^n\gamma\left(|\rho_k(f,x)|\right) = o(1), \quad n\to\infty. \tag{38}$$

Отметим, что если в соотношении (19) множество E состоит из одной L_p-точки Лебега x функции f, в которой $|\rho_k(f,x)|\le\mu$ $\forall k\in N_0$, то оценка (38) выполняется равномерно на множестве E при $\gamma(u)=\exp\left(u^q\right)-1$, $q>1$, хотя $\gamma\notin\phi_1$.

Использованные в данной работе методы исследования и полученные результаты можно применить в других случаях. Например, для получения оценок (λ,φ)-сильных средних разложения функции по системам алгебраических полиномов, по системам функции полиномиального вида [8, с. 183] и др.

1. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Sur la serie de Fourier d`une function a carre summable // Comput. Revs. – 1913. – **156**. – P. 1307 – 1309.
2. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* On the strong summability of Fourier series // Proc. London Math. Soc. – 1926. – **26**. – P. 273 – 286.
3. *Leindler L.* Strong approximation by Fourier series. – Budapest, 1985. – 210 p.
4. *Ласурия Р. А.* Сильная суммируемость рядов Фурье и аппроксимация функций. – Сухум: Абхаз. гос. ун-т, 2010. – 258 с.
5. *Totik V.* On the srong approximation of Fourier series // Acta Math. Acad. Sci. Hung. – 1980. – **35**. – P. 83 – 130.
6. *Гоголадзе Л.Д.* О суммировании кратных тригонометрических рядов и сопряженных функциях: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Тбилиси, 1984. – 256 с.
7. *Пачулиа Н. Л.* О точках сильной суммируемости рядов Фурье // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 12. – С. 1955 – 1964.
8. *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 359 с.

Получено 28.05.12,
после доработки — 07.12.14