УДК 517.5

В. В. Волчков, Вит. В. Волчков, И. М. Савостьянова (Донец. нац. ун-т)

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ, СВЯЗАННОЙ С ПРОБЛЕМОЙ ХЕЛГАСОНА О НОСИТЕЛЕ

We solve the problem of description of the set of continuous functions in annular subdomains of n-dimensional sphere with zero integrals over all $(n-1)$-dimensional spheres covering the inner spherical cap. As an application, we establish a spherical analog of the Helgason support theorem and new uniqueness theorems for functions with zero spherical means.

Отримано розв'язок задачі про опис множини неперервних функцій на кільцевих підобластях n-вимірної сфери, які мають нульові інтеграли по всіх $(n-1)$-вимірних сферах, що обхоплюють внутрішню сферичну шапочку. Як застосування отримано сферичний аналог теореми Хелгасона про носій та нові теореми єдиності для функцій з нульовими сферичними середніми.

1. Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ — вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$. Известная теорема Хелгасона о носителе [1] утверждает, что любая функция $f \in C(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая оценкам

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x|^k |f(x)| < \infty, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

и имеющая нулевые интегралы по всем гиперплоскостям в $\mathbb{R}^n$, не пересекающимся с некоторым компактным выпуклым множеством K, равна нулю в $\mathbb{R}^n \setminus K$. Примеры показывают (см. [1], [2], гл. 1, [3] гл. 1.8), что быстрое убывание f в этом утверждении нельзя опустить или существенно ослабить. В [2, 3] содержатся также различные уточнения, модификации и обобщения сформулированного результата.

Ключевым шагом в доказательстве теоремы Хелгасона является следующая лемма о функциях с нулевыми сферическими средними.

Лемма A [1]. *Пусть функция* $f \in C(\mathbb{R}^n)$ *такова, что выполнено условие* (1) *и интеграл от* f *по любой сфере, содержащей внутри себя шар* $|x| \leq 1$, *равен нулю. Тогда* $f(x) = 0$ *при* $|x| > 1$.

Вследствие важности указанного факта при изучении преобразования Радона С. Хелгасон [4] предложил распространить лемму A на произвольное полное односвязное риманово многообразие M отрицательной кривизны. Для многообразий M, удовлетворяющих дополнительному условию аналитичности, это было сделано Е. Гринбергом и Е. Т. Квинто [5] с использованием техники микролокального анализа и аналитического волнового фронта.

С другой стороны, в связи с необходимостью условия (1) в лемме A возникает задача об описании непрерывных функций в области $\alpha < |x| < \beta$ с нулевыми интегралами по всем сферам, охватывающим шар $|x| \leq \alpha$. Постановка и решение ее двумерного варианта принадлежат Й. Глобевнику [6]. Обобщения на n-мерный случай изучались К. Эпстейном, Б. Клейнером [7] и В. В. Волчковым [8]. Позже были установлены соответствующие аналоги для классических гиперболических пространств [9, 10]. В случае компактных симметрических пространств, который также является естественным для рассматриваемого круга вопросов, подобные исследования ранее не проводились. В данной работе найдено решение задачи Глобевника для n-мерной сферы (см. теорему 1 ниже). Этот результат позволил получить сферический аналог сформулированной выше теоремы Хелгасона и новые теоремы единственности для функций с нулевыми сферическими средними (см. теоремы 2 – 4).

2. Формулировки основных результатов. Как обычно, символами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{C}$ будем обозначать соответственно множества натуральных, целых, целых неотрицательных и комплексных чисел.

Пусть $n \geq 2$, $\mathbb{S}^n$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$ с центром в нуле, d — внутренняя метрика на $\mathbb{S}^n$, т. е.

$$d(\xi, \eta) = \arccos(\xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_{n+1}\eta_{n+1}), \quad \xi, \eta \in \mathbb{S}^n,$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$ и $\eta_1, \ldots, \eta_{n+1}$ — декартовы координаты точек ξ и η соответственно. Для $0 < r \leq \pi$, $0 \leq a < b \leq \pi$ положим

$$B_r(\eta) = \{\xi \in \mathbb{S}^n : d(\xi, \eta) < r\}, \quad B_r = B_r(o) \quad \big(o = (0, \ldots, 0, 1)\big),$$

$$S_r(\eta) = \{\xi \in \mathbb{S}^n : d(\xi, \eta) = r\}, \quad S_r = S_r(o),$$

$$B_{a,b} = \{\xi \in \mathbb{S}^n : a < d(o, \xi) < b\}.$$

Определим класс $\mathcal{Z}(B_{a,b})$ равенством

$$\mathcal{Z}(B_{a,b}) = \left\{ f \in C(B_{a,b}) : \int\limits_{S_r(\eta)} f(\xi) d\omega(\xi) = 0 \ \forall r \in (a, b), \eta \in B_{\min\{r-a, b-r\}} \right\} \tag{2}$$

($d\omega$ — $(n-1)$-мерная евклидова мера). Интегральное условие в (2) можно записать в виде $(f \times \sigma_r)(\eta) = 0$, где σ_r — поверхностная дельта-функция, сосредоточенная на S_r, „$\times$” — знак свертки на $\mathbb{S}^n$ (см. [11], введение, §3). Класс $\mathcal{Z}(B_{a,b})$ является сферическим аналогом классов, рассматриваемых ранее Глобевником, Хелгасоном и др. (см. п. 1 выше). Для его описания нам потребуются ряды Фурье специального вида.

Пусть $\mathcal{H}_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, — пространство сферических гармоник степени k на $\mathbb{S}^{n-1}$ (см. [12], гл. 4, § 2). Размерность a_k пространства $\mathcal{H}_k$ вычисляется по формуле

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{(n+k-3)!(n+2k-2)}{k!(n-2)!}, & k \in \mathbb{N}, \\ 1, & k = 0. \end{cases}$$

В дальнейшем будем рассматривать $\mathcal{H}_k$ как подпространство $L^2(\mathbb{S}^{n-1}, d\omega)$. Введем сферические координаты $\theta_1, \ldots, \theta_n$ на $\mathbb{S}^n$ следующим образом:

$$\xi_1 = \sin\theta_n \ldots \sin\theta_1, \xi_2 = \sin\theta_n \ldots \sin\theta_2 \cos\theta_1, \ldots, \xi_{n+1} = \cos\theta_n,$$

$$0 < \theta_1 < 2\pi, \quad 0 < \theta_k < \pi, \quad k \neq 1.$$

Если $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \neq 0$, то точка $\sigma = \xi'/|\xi'|$ принадлежит $\mathbb{S}^{n-1}$. Запишем действие функции $f \in C(B_{a,b})$ в виде $f(\xi) = f(\sigma \sin\theta_n, \cos\theta_n)$ и сопоставим ей ряд Фурье

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{a_k} f_{k,l}(\theta_n) Y_l^{(k)}(\sigma), \quad \theta_n \in (a,b), \tag{3}$$

где $\left\{Y_l^{(k)}\right\}_{l=1}^{a_k}$ — фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k$,

$$f_{k,l}(\theta_n) = \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\sigma\sin\theta_n, \cos\theta_n)\overline{Y_l^{(k)}(\sigma)}d\omega(\sigma).$$

Ниже при $n = 2$ считаем, что

$$Y_1^{(k)}(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i^k e^{-ik\theta_1}, \qquad Y_2^{(k)}(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-i)^k e^{ik\theta_1}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Для любого $\theta_n \in (a,b)$ ряд (3) сходится к $f(\sigma\sin\theta_n, \cos\theta_n)$ в пространстве $L^2(\mathbb{S}^{n-1}, d\omega)$ (см. [12], гл. 4, § 2).

Следующий результат дает описание класса $\mathcal{Z}(B_{a,b})$ в терминах разложений в ряды по сферическим гармоникам.

Теорема 1. *Пусть* $0 \leq a < b \leq \pi$, $f \in C(B_{a,b})$. *Тогда для того чтобы функция* f *принадлежала* $Z(B_{a,b})$, *необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты Фурье функции* f *имели вид*

$$f_{0,1}(\theta_n) = 0, \tag{5}$$

$$f_{k,l}(\theta_n) = \sum_{m=0}^{k-1} c_{m,k,l} \frac{(\cos\theta_n)^m}{(\sin\theta_n)^{n+k-2}}, \qquad k \geq 1, \quad 1 \leq l \leq a_k, \tag{6}$$

где $a < \theta_n < b$, $c_{m,k,l} \in \mathbb{C}$.

Равенства (5), (6) показывают, что не существует нетривиальной функции $f \in \mathcal{Z}(B_{a,\pi})$ с быстрым стремлением к нулю при подходе к полюсу $o^* = (0, \ldots, 0, -1)$. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $0 < a < \pi$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1. *Пусть* $f \in \mathcal{Z}(B_{a,\pi})$ *и при любом* $m \in \mathbb{Z}_+$

$$\sup_{\xi \in B_{a,\pi}} (1 + \xi_{n+1})^{-m} |f(\xi)| < \infty. \tag{7}$$

Тогда $f = 0$ *в* $B_{a,\pi}$.

2. *Для любого* $m \in \mathbb{Z}_+$ *существует ненулевая функция* $f \in \mathcal{Z}(B_{a,\pi})$ *с условием* (7).

Отметим, что при $b > \pi$ множество $B_{a,b}$ совпадает с геодезическим шаром $B_{\pi-a}(o^*)$. В этом случае любая функция $f \in C(B_{a,b})$, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{S_r(\eta)} f(\xi)d\omega(\xi) = 0 \quad \forall r \in (a,\pi), \quad \eta \in B_{r-a},$$

является тождественным нулем.

Еще одним приложением теоремы 1 являются новые условия единственности для функций класса $\mathcal{Z}(B_{a,b})$.

Теорема 3. 1. *Пусть* E *— бесконечное множество на интервале* (a,b), $f \in \mathcal{Z}(B_{a,b})$ *и* $f(\xi) = 0$ *при* $d(o,\xi) \in E$. *Тогда* $f = 0$ *в* $B_{a,b}$.

2. *Для любого конечного множества* $E \subset (0,\pi)$ *существует ненулевая функция* $f \in \mathcal{Z}(B_{0,\pi})$ *такая, что* $f(\xi) = 0$ *при* $d(o,\xi) \in E$.

Теорема 4. 1. *Пусть* f *принадлежит* $\mathcal{Z}(B_{a,b})$ *и классу* C^∞ *в окрестности некоторой сферы* $S_r \subset B_{a,b}$. *Пусть также все производные функции* f *равны нулю на* S_r. *Тогда* $f = 0$ *в* $B_{a,b}$.

2. *Для любых* $s \in \mathbb{Z}_+$ *и* $r \in (0,\pi)$ *существует ненулевая функция* $f \in \mathcal{Z}^\infty(B_{0,\pi})$, *имеющая на* S_r *все нулевые производные до порядка* s *включительно.*

Относительно других результатов, связанных с инъективностью оператора сферического среднего, см. [2, 13, 14] и имеющуюся там библиографию.

3. Вспомогательные утверждения. Будем использовать следующие стандартные обозначения P_ν^μ, Q_ν^μ для функций Лежандра первого и второго рода на $(-1,1)$. Эти функции связаны с гипергеометрической функцией Гаусса равенствами

$$\frac{(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} P_\nu^\mu(x)}{2^\mu\sqrt{\pi}} = \frac{F\left(-\dfrac{\nu+\mu}{2}, \dfrac{1+\nu-\mu}{2}; \dfrac{1}{2}; x^2\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1-\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(1+\dfrac{\nu-\mu}{2}\right)} -$$

$$-\frac{2xF\left(\dfrac{1-\nu-\mu}{2}, 1+\dfrac{\nu-\mu}{2}; \dfrac{3}{2}; x^2\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1+\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(-\dfrac{\nu+\mu}{2}\right)}, \quad \nu,\mu \in \mathbb{C}, \tag{8}$$

$$\frac{(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} Q_\nu^\mu(x)}{2^\mu\pi^{3/2}} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}(\nu+\mu)\right) \frac{xF\left(\dfrac{1-\nu-\mu}{2}, \dfrac{\nu-\mu}{2}+1; \dfrac{3}{2}; x^2\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1+\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(-\dfrac{\nu+\mu}{2}\right)} -$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}(\nu+\mu)\right) \frac{F\left(-\dfrac{\nu+\mu}{2}, \dfrac{1+\nu-\mu}{2}; \dfrac{1}{2}; x^2\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1-\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(1+\dfrac{\nu-\mu}{2}\right)}, \quad -\nu-\mu \notin \mathbb{N}, \tag{9}$$

где Γ — гамма-функция (см. [15], гл. 3, п. 3.4, формулы (11), (12)). Для $\theta \in (0,\pi)$ положим

$$\psi_{\nu,k}(\theta) = (\sin\theta)^{1-n/2} P^{-n/2-k+1}_{\nu+n/2-1}(\cos\theta), \quad \nu \in \mathbb{C},$$

$$\Psi_{\nu,k}(\theta) = \begin{cases} (\sin\theta)^{1-n/2} Q^{n/2+k-1}_{\nu+n/2-1}(\cos\theta), & \text{если} \quad n \quad \text{четно}, \quad 2-n-k-\nu \notin \mathbb{N}, \\ (\sin\theta)^{1-n/2} P^{n/2+k-1}_{\nu+n/2-1}(\cos\theta), & \text{если} \quad n \quad \text{нечетно}, \quad \nu \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

При фиксированных $r \in (0,\pi)$, $k \in \mathbb{Z}_+$ функция $\psi_{\nu,k}(r)$ имеет бесконечно много нулей ν. Все они являются вещественными, простыми и расположены симметрично относительно точки $(1-n)/2$ (см. [16], доказательство леммы 3.4). Кроме того, $\psi_{\nu,k}(r) > 0$ для любого $\nu \in [-k-n+1, k]$. Обозначим $\mathcal{N}(r) = \{\nu > 0 \colon \psi_{\nu,0}(r) = 0\}$.

Пусть $L = L_n$ — лапласиан на $\mathbb{S}^n$, т. е.

$$L = \frac{1}{\sin^{n-1}\theta_n}\frac{\partial}{\partial\theta_n}\sin^{n-1}\theta_n\frac{\partial}{\partial\theta_n} + \frac{1}{\sin^2\theta_n\sin^{n-2}\theta_{n-1}}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-1}}\sin^{n-2}\theta_{n-1}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-1}} +$$

$$+ \frac{1}{\sin^2\theta_n\sin^2\theta_{n-1}\sin^{n-3}\theta_{n-2}}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-2}}\sin^{n-3}\theta_{n-2}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-2}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{\sin^2\theta_n\sin^2\theta_{n-1}\ldots\sin^2\theta_3\sin^2\theta_2}\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}.$$

Для любого $m \in \mathbb{Z}$ рассмотрим дифференциальный оператор D_m, заданный на пространстве $C^1(0,\pi)$ следующим образом:

$$(D_m u)(\theta) = (\sin\theta)^m \frac{d}{d\theta}\left(\frac{u(\theta)}{(\sin\theta)^m}\right), \quad u \in C^1(0,\pi).$$

Равенство

$$L_{n-1} Y_l^{(k)} = -k(n+k-2) Y_l^{(k)}$$

(см. [17], гл. 9, § 5, п. 1) показывает, что если $f \in C^2(B_{a,b})$ имеет вид $f(\xi) = u(\theta_n) Y_l^{(k)}(\sigma)$, то

$$(Lf)(\xi) + k(n+k-1)f(\xi) = \Big(D_{1-k-n} D_k u\Big)(\theta_n) Y_l^{(k)}(\sigma). \tag{10}$$

Отметим также следующие формулы:

$$D_k\,\psi_{\nu,k} = (k-\nu)(k+\nu+n-1)\psi_{\nu,k+1}, \qquad D_k\,\Psi_{\nu,k} = \Psi_{\nu,k+1}, \tag{11}$$

$$D_{1-k-n}\,\psi_{\nu,k+1} = \psi_{\nu,k}, \qquad D_{1-k-n}\,\Psi_{\nu,k+1} = (k-\nu)(k+\nu+n-1)\Psi_{\nu,k}, \tag{12}$$

$$(L + \nu(\nu+n-1)\mathrm{Id})\big(\psi_{\nu,k}(\theta_n) Y_l^{(k)}(\sigma)\big) = (L + \nu(\nu+n-1)\mathrm{Id})\big(\Psi_{\nu,k}(\theta_n) Y_l^{(k)}(\sigma)\big) = 0 \tag{13}$$

(Id — тождественный оператор). Для доказательства (11), (12) достаточно воспользоваться определением $\psi_{\nu,k}$, $\Psi_{\nu,k}$ и рекуррентными соотношениями для функций Лежандра (см. [15], гл. 3, п. 3.8, формулы (15), (17), (19)). Равенство (13) следует из (10) – (12). При $-\nu \notin \mathbb{N}$ функции $\psi_{\nu,k}$, $\Psi_{\nu,k}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения

$$\Big(D_{1-k-n}D_k u\Big)(\theta)=(k-\nu)(k+\nu+n-1)u(\theta),\quad \theta\in(0,\pi).$$

Положим

$$\mathcal{S}_\nu^{k,l}(\xi)=\psi_{\nu,k}(\theta_n)Y_l^{(k)}(\sigma),\quad \xi\in B_\pi.$$

Лемма 1. *Пусть* $0\le r<\pi$, $t\in(0,\pi-r)$, $\eta\in S_r$. *Тогда*

$$\int\limits_{S_t(\eta)}\mathcal{S}_\nu^{k,l}(\xi)d\omega(\xi)=(2\pi)^{n/2}(\sin t)^{n-1}\psi_{\nu,0}(t)\mathcal{S}_\nu^{k,l}(\eta).$$

Доказательство. Учитывая (13), по формуле Пиззетти имеем (см., например, [18])

$$\int\limits_{S_t(\eta)}\mathcal{S}_\nu^{k,l}(\xi)d\omega(\xi)=\frac{\omega(S_t)}{\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{n-2}}\left(\mathcal{S}_\nu^{k,l}(\eta)+\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2m}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\left(\left(L-\frac{(n-2)n}{4}\mathrm{Id}\right)\ldots\left(L-\frac{(n-2m)(n+2m-2)}{4}\mathrm{Id}\right)\mathcal{S}_\nu^{k,l}\right)(\eta)}{m!\Gamma\left(\frac{n}{2}+m\right)}\right)=$$

$$=\frac{\omega(S_t)}{\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{n-2}}\mathcal{S}_\nu^{k,l}(\eta)\left(1+\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2m}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\left(\nu(1-n-\nu)-\frac{(n-2)n}{4}\right)\ldots\left(\nu(1-n-\nu)-\frac{(n-2m)(n+2m-2)}{4}\right)}{m!\Gamma\left(\frac{n}{2}+m\right)}\right)=$$

$$=\frac{\omega(S_t)}{\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{n-2}}\mathcal{S}_\nu^{k,l}(\eta)F\left(-\nu-\frac{n}{2}+1,\nu+\frac{n}{2},\frac{n}{2};\sin^2\frac{t}{2}\right).$$

Теперь используя равенство

$$\psi_{\nu,0}(t)=\frac{2^{1-n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{n-2}}F\left(-\nu-\frac{n}{2}+1,\nu+\frac{n}{2},\frac{n}{2};\sin^2\frac{t}{2}\right)$$

(см. [15], гл. 3, п. 3.5, формула (9)), получаем требуемое.

Пусть f — непрерывная радиальная (т. е. зависящая только от θ_n) функция в шаре B_R. Далее символом f_0 будем обозначать функцию, заданную на $[0,R)$ и удовлетворяющую соотношению $f(\xi)=f_0(\theta_n)$, $\xi\in B_R$.

Лемма 2. *Пусть* $0 < r < R \le \pi$, $f(\xi) = f_0(\theta_n) \in C^\infty(B_R)$. *Тогда при* $k \in \mathbb{N}$ *и* $\xi \in B_{R-r}$ *имеет место равенство*

$$\Big(\big(D_{k-1}\dots D_0\, f_0\big)(\theta_n)Y_l^{(k)}(\sigma)\times\sigma_r\Big)(\xi) = \Big(D_{k-1}\dots D_0(f\times\sigma_r)_0\Big)(\theta_n)Y_l^{(k)}(\sigma). \tag{14}$$

Доказательство. Зафиксируем $\eta \in B_{R-r}$ и $\varepsilon \in (0, R-r-d(o,\eta))$. Рассмотрим функцию w_ε со следующими условиями: 1) $\mathrm{w}_\varepsilon \in C^\infty[0,\pi]$; 2) $\mathrm{w}_\varepsilon = 1$ на $[0, R-\varepsilon]$ и $\mathrm{w}_\varepsilon = 0$ на $[R-\varepsilon/2, \pi]$. Для $\theta \in [0, R)$ положим $h(\theta) = f_0(\theta)\mathrm{w}_\varepsilon(\theta)$. Повторяя рассуждения из доказательств леммы 4.3 и теоремы 2.1 [16], имеем

$$h(\theta) = \sum_{\nu\in\mathcal{N}(R-\varepsilon/3)} c_\nu\psi_{\nu,0}(\theta), \qquad c_\nu\in\mathbb{C}, \quad 0\le\theta\le R-\frac{\varepsilon}{3},$$

причем $c_\nu = O(\nu^{-c})$, $\nu\to+\infty$ для любого фиксированного $c>0$. Тогда (см. (11))

$$\big(D_{k-1}\dots D_0\, f_0\big)(\theta_n)Y_l^{(k)}(\sigma) = \sum_{\nu\in\mathcal{N}(R-\varepsilon/3)} c_\nu b_{\nu,k}\mathcal{S}_\nu^{k,l}(\xi), \quad \xi\in B_{R-\varepsilon},$$

где

$$b_{\nu,k} = (-\nu)(\nu+n-1)\dots(k-1-\nu)(k+\nu+n-2). \tag{15}$$

Отсюда по лемме 1

$$\Big(\big(D_{k-1}\dots. D_0\, f_0\big)(\theta_n)Y_l^{(k)}(\sigma)\times\sigma_r\Big)(\eta) = \int\limits_{S_r(\eta)} \Big(D_{k-1}\dots D_0\, f_0\Big)(\theta_n)Y_l^{(k)}(\sigma)d\omega(\xi) =$$

$$= (2\pi)^{n/2}(\sin r)^{n-1}\sum_{\nu\in\mathcal{N}(R-\varepsilon/3)} c_\nu b_{\nu,k}\psi_{\nu,0}(r)\mathcal{S}_\nu^{k,l}(\eta). \tag{16}$$

С другой стороны, аналогично получаем

$$(f\times\sigma_r)(\eta) = \int\limits_{S_r(\eta)} f_0(\theta_n)d\omega(\xi) = (2\pi)^{n/2}(\sin r)^{n-1}\sum_{\nu\in\mathcal{N}(R-\varepsilon/3)} c_\nu\psi_{\nu,0}(r)\psi_{\nu,0}(\arccos\eta_{n+1})$$

и

$$\Big(D_{k-1}\dots D_0\,(f\times\sigma_r)_0\Big)(\theta) =$$

$$= (2\pi)^{n/2}(\sin r)^{n-1}\sum_{\nu\in\mathcal{N}\big(R-\varepsilon/3\big)} c_\nu b_{\nu,k}\psi_{\nu,0}(r)\psi_{\nu,k}(\theta), \quad 0\le\theta<R-r-\varepsilon. \tag{17}$$

Сравнивая (16) с (17), приходим к (14).

Лемма 3. *Пусть* $k\in\mathbb{N}$, $m\in\{0,\dots,k-1\}$,

$$f(\xi) = \frac{(\cos\theta_n)^m}{(\sin\theta_n)^{n+k-2}}Y_l^{(k)}(\sigma), \quad \xi\in B_{0,\pi}.$$

Тогда $f\times\sigma_r = 0$ *в* $B_{\min\{\pi-r,r\}}$ *для любого* $r\in(0,\pi)$.

Доказательство. Для $\varepsilon \in (0, r)$ рассмотрим функцию v_ε, удовлетворяющую следующим условиям: 1) $\mathrm{v}_\varepsilon \in C^\infty[0, \pi]$; 2) $\mathrm{v}_\varepsilon = 0$ на $[0, \varepsilon/2]$ и $\mathrm{v}_\varepsilon = 1$ на $[\varepsilon, \pi]$. Положим

$$H(\eta) = \big(\Psi_{\nu,0} \cdot \mathrm{v}_\varepsilon\big)(\arccos \eta_{n+1}), \quad \eta \in B_\pi.$$

Пусть $\xi \in B_{\min\{\pi - r, r - \varepsilon\}}$. Поскольку $(L + \nu(\nu + n - 1)\mathrm{Id})(H) = 0$ в $B_{\varepsilon,\pi}$ (см. (13)), а $S_r(\xi) \subset B_{\varepsilon,\pi}$, то

$$(L + \nu(\nu + n - 1)\mathrm{Id})(H \times \sigma_r)(\xi) = (L + \nu(\nu + n - 1)\mathrm{Id})(H) \times \sigma_r(\xi) = 0. \tag{18}$$

Учитывая, что $H \times \sigma_r$ является гладкой радиальной функцией в $B_{\pi-r}$, из (18), (13), (10) имеем $(H \times \sigma_r)(\xi) = c\,\psi_{\nu,0}(\theta_n)$, где $c = (2\pi)^{n/2}(\sin r)^{n-1}\Psi_{\nu,0}(r)$. Тогда по лемме 2

$$\Big(\big(D_{k-1} \ldots D_0\; H_0\big)(\theta_n) Y_l^{(k)}(\sigma) \times \sigma_r\Big)(\xi) = c\Big(D_{k-1} \ldots D_0\; \psi_{\nu,0}\Big)(\theta_n) Y_l^{(k)}(\sigma).$$

С учетом (11) и (15) это равенство принимает вид

$$\big(\Psi_{\nu,k}(\theta_n) Y_l^{(k)}(\sigma)\big) \times \sigma_r(\xi) = c\, b_{\nu,k} \mathcal{S}_\nu^{k,l}(\xi).$$

В частности,

$$\big(\Psi_{\nu,k}(\theta_n) Y_l^{(k)}(\sigma)\big) \times \sigma_r(\xi) = 0 \quad \text{при} \quad \nu = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Поскольку число ε можно выбирать произвольно на $(0, r)$, отсюда и из (8), (9) получаем утверждение леммы 3.

4. Свойства класса $\boldsymbol{\mathcal{Z}(B_{a,b})}$. Для $s \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ положим $\mathcal{Z}^s(B_{a,b}) = \mathcal{Z}(B_{a,b}) \cap C^s(B_{a,b})$.

Лемма 4. *Пусть* $f \in \mathcal{Z}(B_{a,b})$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le l$, $p \le a_k$. *Тогда*:

1) $f_{k,l}(\theta_n) Y_l^{(k)}(\sigma) \in \mathcal{Z}(B_{a,b})$;

2) *если* $n \ge 3$, *то* $f_{k,l}(\theta_n) Y_p^{(k)}(\sigma) \in \mathcal{Z}(B_{a,b})$.

Аналогичные утверждения справедливы и для класса $\mathcal{Z}^s(B_{a,b})$.

Доказательство. Множество $\{\tau \in SO(n+1) : \tau o = o\}$, где $SO(n+1)$ — группа вращений $\mathbb{R}^{n+1}$, является подгруппой в $SO(n+1)$, изоморфной группе $SO(n)$. Обозначим через $d\tau$ нормированную меру Хаара на $SO(n)$. Пусть $T^k(\tau)$ — сужение квазирегулярного представления группы $SO(n)$ на пространство $\mathcal{H}_k$ [17] (гл. 9, § 2, п. 7), $\big\{t_{l,p}^k(\tau)\big\}$ — матрица представления $T^k(\tau)$ в базисе $\Big\{Y_l^{(k)}\Big\}$, т. е.

$$\big(T^k(\tau) Y_l^{(k)}\big)(\sigma) = Y_l^{(k)}(\tau^{-1}\sigma) = \sum_{p=1}^{a_k} t_{l,p}^k(\tau) Y_p^{(k)}(\sigma), \qquad \tau \in SO(n), \quad \sigma \in \mathbb{S}^{n-1}. \tag{19}$$

Если $n = 2$ и τ — вращение на угол θ в $\mathbb{R}^2$, то $t_{1,1}^k(\tau) = e^{-ik\theta}$, $t_{2,2}^k(\tau) = e^{ik\theta}$, $t_{1,2}^k(\tau) = t_{2,1}^k(\tau) = 0$ (см. (4)). При этом для членов ряда (3) имеем равенство

$$f_{k,l}(\theta_2) Y_l^{(k)}(\sigma) = \int\limits_{SO(2)} f(\tau^{-1}\xi) \overline{t_{l,l}^k(\tau)} d\tau. \tag{20}$$

В случае $n \geq 3$ из (19) и неприводимости представлений $T^k(\tau)$ [17] (гл. 9, § 2, п. 10) следует формула

$$f_{k,l}(\theta_n)Y_p^{(k)}(\sigma) = a_k \int\limits_{SO(n)} f(\tau^{-1}\xi)\overline{t_{l,p}^k(\tau)}d\tau. \tag{21}$$

Используя (20), (21) и указанное выше вложение $SO(n)$ в $SO(n+1)$, получаем требуемые утверждения.

Лемма 5. *Пусть* $s \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{Z}^s(B_{a,b})$ *и*

$$f^\circ(\theta_1, \ldots, \theta_n) = f(\sin\theta_n \ldots \sin\theta_1, \sin\theta_n \ldots \sin\theta_2 \cos\theta_1, \ldots, \cos\theta_n).$$

Тогда

$$-\sin\theta_{n-1} \operatorname{ctg}\theta_n \frac{\partial f^\circ}{\partial \theta_{n-1}} + \cos\theta_{n-1} \frac{\partial f^\circ}{\partial \theta_n} \in \mathcal{Z}^{s-1}(B_{a,b}).$$

Доказательство. Пусть $r \in (a,b)$ и $\eta \in B_{\min\{r-a, b-r\}}$. Обозначим через a_t движение сферы $\mathbb{S}^n$, определяемое равенством

$$a_t\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1},\ \xi_n \cos t + \xi_{n+1} \sin t,\ -\xi_n \sin t + \xi_{n+1} \cos t).$$

При достаточно малых $|t|$ из условия имеем

$$\int\limits_{S_r(\eta)} F(a_t\xi)d\omega(\xi) = 0,$$

где $F(x) = f\big(x/|x|\big)$. Дифференцируя по t и полагая $t = 0$, находим

$$\int\limits_{S_r(\eta)} h(\xi)d\omega(\xi) = 0,$$

где

$$h(\xi) = \xi_{n+1} \frac{\partial F}{\partial x_n}(\xi) - \xi_n \frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(\xi), \quad \xi \in B_{a,b}.$$

Таким образом, $h \in \mathcal{Z}^{s-1}(B_{a,b})$. Это завершает доказательство леммы 5, так как

$$h^\circ(\theta_1, \ldots, \theta_n) = -\sin\theta_{n-1} \operatorname{ctg}\theta_n \frac{\partial f^\circ}{\partial \theta_{n-1}} + \cos\theta_{n-1} \frac{\partial f^\circ}{\partial \theta_n}.$$

Лемма 6. 1. *Пусть* $n \geq 3$, $s \in \mathbb{N}$ *и* $u(\theta_n)Y(\sigma) \in \mathcal{Z}^s(B_{a,b})$ *при некотором* $Y \in \mathcal{H}_k \setminus \{0\}$. *Тогда*:

а) $\big(D_k\, u\big)(\theta_n)Y_l^{(k+1)}(\sigma) \in \mathcal{Z}^{s-1}(B_{a,b})$ *при всех* $1 \leq l \leq a_{k+1}$;

б) *если* $k \in \mathbb{N}$, *то* $\big(D_{2-k-n}\, u\big)(\theta_n)Y_l^{(k-1)}(\sigma) \in \mathcal{Z}^{s-1}(B_{a,b})$ *при всех* $1 \leq l \leq a_{k-1}$.

2. *Пусть* $n = 2$, $s \in \mathbb{N}$ *и* $u(\theta_2)Y_l^{(k)}(\sigma) \in \mathcal{Z}^s(B_{a,b})$ *при некоторых* $k \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, \ldots, a_k\}$. *Тогда*:

а) *если* $k \in \mathbb{N}$, *то* $\big(D_{\pm k}\, u\big)(\theta_2)Y_l^{(k\pm1)}(\sigma) \in \mathcal{Z}^{s-1}(B_{a,b})$;

б) *если* $k = 0$, *то* $u'(\theta_2)Y_p^{(1)}(\sigma) \in \mathcal{Z}^{s-1}(B_{a,b})$ *для любого* $p \in \{1, 2\}$.

Доказательство. 1. Поскольку $\sin^k \theta_{n-1} \ldots \sin^k \theta_2 e^{ik\theta_1} \in \mathcal{H}_k$ [17] (гл. 9, § 3, п. 6), из условия и леммы 4 (п. 2) имеем

$$u(\theta_n) \sin^k \theta_{n-1} \ldots \sin^k \theta_2 e^{ik\theta_1} \in \mathcal{Z}^s(B_{a,b}).$$

Тогда по лемме 5

$$\big(D_k\, u\big)(\theta_n) \cos\theta_{n-1} \sin^k \theta_{n-1} \ldots \sin^k \theta_2 e^{ik\theta_1} \in \mathcal{Z}^{s-1}(B_{a,b}).$$

Учитывая, что $\cos\theta_{n-1} \sin^k \theta_{n-1} \ldots \sin^k \theta_2 e^{ik\theta_1} \in \mathcal{H}_{k+1}$ [17] (гл. 9, § 3, п. 6), из леммы 4 (п. 2) получаем утверждение а). Докажем утверждение б). Как и выше, $u(\theta_n)C_k^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta_{n-1}) \in \in \mathcal{Z}^s(B_{a,b})$, где $C_k^{\frac{n-2}{2}}$ — многочлен Гегенбауэра степени k с индексом $\dfrac{n-2}{2}$. Применяя к этой функции лемму 5 и используя формулы

$$\frac{d}{dt} C_m^{\alpha}(t) = 2\alpha C_{m-1}^{\alpha+1}(t),$$

$$(m+1)C_{m+1}^{\alpha}(t) = (2\alpha + m)tC_m^{\alpha}(t) - 2\alpha(1-t^2)C_{m-1}^{\alpha+1}(t)$$

(см. [17], гл. 9, § 3, п. 2), имеем

$$\big(D_{2-k-n}\, u\big)(\theta_n) \cos\theta_{n-1} C_k^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta_{n-1}) - (k+1)u(\theta_n) \operatorname{ctg}\theta_n C_{k+1}^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta_{n-1}) \in \mathcal{Z}^{s-1}(B_{a,b}).$$

Поскольку $C_{k+1}^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta_{n-1}) \in \mathcal{H}_{k+1}$, $\cos\theta_{n-1} C_k^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta_{n-1}) \in \mathcal{H}_{k-1} \setminus \{0\} + \mathcal{H}_{k+1}$ (см. [17], гл. 9, § 2, п. 3, формула (5)), отсюда и из леммы 4 (п. 2) получаем утверждение б).

2. Полагая $h(\theta_1, \theta_2) = u(\theta_2)e^{im\theta_1}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, находим

$$\cos\theta_1 \frac{\partial h}{\partial \theta_2} - \sin\theta_1 \operatorname{ctg}\theta_2 \frac{\partial h}{\partial \theta_1} = \frac{1}{2}\big(D_m\, u\big)(\theta_2) e^{i(m+1)\theta_1} + \frac{1}{2}\big(D_{-m}\, u\big)(\theta_2) e^{i(m-1)\theta_1}.$$

Теперь утверждение 2 леммы следует из лемм 5 и 4 (п. 1), а также формул (4).

5. Доказательство основных результатов. ***Доказательство теоремы* 1.** *Необходимость.* Пусть $f \in \mathcal{Z}(B_{a,b})$. Применяя лемму 4 при $k = 0$, имеем $f_{0,1}(\theta_n) \in \mathcal{Z}(B_{a,b})$. Тогда по определению класса $\mathcal{Z}(B_{a,b})$

$$\int\limits_{S_r} f_{0,1}(\theta_n) d\omega(\xi) = 0 \quad \text{для любого} \quad r \in (a, b),$$

что эквивалентно равенству (5). Представление (6) для гладких f легко получается отсюда с помощью лемм 4 и 6. Общий случай сводится к рассмотренному сглаживанием функции f свертками $f \times \varphi_\varepsilon$, где φ_ε — радиальная функция класса $C^\infty(\mathbb{S}^n)$ с носителем в шаре B_ε.

Достаточность. Пусть $f \in C(B_{a,b})$ и коэффициенты Фурье f имеют вид (5), (6). Тогда по лемме 3

$$f_{k,l}(\theta_n)Y_l^{(k)}(\sigma) \in \mathcal{Z}(B_{a,b}) \quad \text{при всех} \quad k \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \leq l \leq a_k. \tag{22}$$

Для $r \in (a,b)$ положим

$$I(\eta) = \int\limits_{S_r(\eta)} f(\xi)d\omega(\xi), \quad \eta \in B_{\min\{r-a,b-r\}}.$$

Используя (20) – (22), получаем

$$\int\limits_{SO(n)} I(\tau^{-1}\eta)\overline{t^k_{l,l}(\tau)}d\tau = \int\limits_{SO(n)}\int\limits_{S_r(\eta)} f(\tau^{-1}\xi)d\omega(\xi)\overline{t^k_{l,l}(\tau)}d\tau =$$

$$= \int\limits_{S_r(\eta)}\int\limits_{SO(n)} f(\tau^{-1}\xi)\overline{t^k_{l,l}(\tau)}d\tau d\omega(\xi) = 0.$$

В силу полноты системы $\left\{Y_l^{(k)}\right\}$ в $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ (см. [12], гл. 4, § 2) это означает, что $I \equiv 0$. Таким образом, $f \in \mathcal{Z}(B_{a,b})$.

***Доказательство теоремы* 2.** Пусть f удовлетворяет условию в пункте 1 теоремы. Тогда то же свойство имеет каждое слагаемое ряда (3), так как для любого $\xi \in B_{a,\pi}$

$$(1+\xi_{n+1})^{-m}\Big|f_{k,l}(\theta_n)Y_l^{(k)}(\sigma)\Big| \leq a_k \int\limits_{SO(n)} (1+\xi_{n+1})^{-m}\big|f(\tau^{-1}\xi)\big|d\tau =$$

$$= a_k \int\limits_{SO(n)} (1+(\tau^{-1}\xi)_{n+1})^{-m}\big|f(\tau^{-1}\xi)\big|d\tau \leq a_k \sup_{\eta\in B_{a,\pi}} (1+\eta_{n+1})^{-m}\big|f(\eta)\big|$$

(см. формулы (20), (21) и [17], гл. 1, § 1, п. 5, формула (3)). В частности,

$$\sup_{\theta_n\in(a,\pi)} (1+\cos\theta_n)^{-m}\big|f_{k,l}(\theta_n)\big| < \infty \quad \text{для любого} \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Кроме того, по теореме 1 $f_{k,l}$ имеют вид (5), (6). Отсюда следует, что все $f_{k,l}$ равны нулю на (a,π), а значит, f — нулевая функция.

Наконец, по лемме 3 всем требованиям второго утверждения теоремы удовлетворяет функция

$$f(\xi) = \frac{(1+\cos\theta_n)^{2m+n-1}}{(\sin\theta_n)^{2m+2n-2}}Y_1^{(2m+n)}(\sigma), \quad \xi \in B_{a,\pi}.$$

***Доказательство теорем* 3, 4.** Первое утверждение в указанных теоремах получается тем же способом, что и в теореме 2. Всем требованиям второго утверждения удовлетворяют, соответственно, следующие функции:

$$f(\xi) = \frac{(\cos\theta_n - \cos r_1)\ldots(\cos\theta_n - \cos r_p)}{(\sin\theta_n)^{n+p-1}}Y_1^{(p+1)}(\sigma), \quad \text{где} \quad E = \{r_1,\ldots,r_p\},$$

$$f(\xi) = \frac{(\cos\theta_n - \cos r)^{s+1}}{(\sin\theta_n)^{n+s}} Y_1^{(s+2)}(\sigma)$$

(см лемму 3).

1. *Helgason S.* A duality in integral geometry: some generalizations of the Radon transform // Bull. Amer. Math. Soc. – 1964. – **70**. – P. 435 – 446.
2. *Helgason S.* Integral geometry and Radon transforms. – New York: Springer, 2010. – 301 p.
3. *Volchkov V. V.* Integral geometry and convolution equations. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003. – 454 p.
4. *Helgason S.* A duality in integral geometry on symmetric spaces // Proc. U. S. – Jap. Sem. Different. Geometry. – Tokyo, 1966. – P. 37 – 56.
5. *Grinberg E., Quinto E. T.* Morera theorems for complex manifolds // J. Funct. Anal. – 2000. – **178**. – P. 1 – 22.
6. *Globevnik J.* Zero integrals on circles and characterizations of harmonic and analytic functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1990. – **317**. – P. 313 – 330.
7. *Epstein C. L., Kleiner B.* Spherical means in annular regions // Communs Pure and Appl. Math. – 1993. – **46**, № 3. – P. 441 – 450.
8. *Волчков В. В.* Сферические средние на евклидовых пространствах // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 10. – С. 1310 – 1315.
9. *Волчков В. В.* Шаровые средние на симметрических пространствах // Доп. НАН України. – 2002. – № 3. – С. 15 – 19.
10. *Rawat R., Srivastava R. K.* Spherical means in annular regions in the n-dimensional real hyperbolic spaces // Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.). – 2011. – **121**, № 3. – P. 311 – 325.
11. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987. – 735 с.
12. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 336 с.
13. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. – London: Springer, 2009. – 671 p.
14. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Offbeat integral geometry on symmetric spaces. – Basel: Birkhäuser, 2013. – 592 p.
15. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1973. – Т. 1. – 296 с.
16. *Волчков Вит. В., Савостьянова И. М.* О ядре полусферического преобразования Функа и его локальных аналогах // Укр. мат. вестн. – 2013. – **10**, № 4. – С. 575 – 594.
17. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. – 2-е изд. – М.: Наука, 1991. – 576 с.
18. *Berenstein C. A., Zalcman L.* Pompeiu's problem on spaces of constant curvature // J. Anal. Math. – 1976. – **30**. – P. 113 – 130.

Получено 04.05.14