УДК 517.5

С. А. Пичугов (Днепропетр. нац. ун-т ж.-д. трансп.)

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Let $L_0(T)$ be the set of real-valued periodic measurable functions, let $\Psi\colon R^+ \to R^+$ be the modulus of continuity, and let

$$L_\Psi \equiv L_\Psi(T) = \left\{ f \in L_0(T) : \|f\|_\Psi := \frac{1}{2\pi} \int\limits_T \Psi(|f(x)|)dx < \infty \right\}.$$

We study the properties of multiple modules of continuity for the functions from L_Ψ.

Нехай $L_0(T)$ — множина дійснозначних періодичних вимірних функцій, $\Psi\colon R^+ \to R^+$ — модуль неперервності,

$$L_\Psi \equiv L_\Psi(T) = \left\{ f \in L_0(T) : \|f\|_\Psi := \frac{1}{2\pi} \int\limits_T \Psi(|f(x)|)dx < \infty \right\}.$$

У статті досліджуються властивості кратних модулів неперервності функцій з L_Ψ.

1. Введение. Пусть Ω — множество функций $\Psi\colon R^1_+ \to R^1_+$, являющихся функциями типа модуля непрерывности, $L_\Psi :\equiv L_\Psi[0, 2\pi]$ — метрические пространства измеримых 2π-периодических функций f таких, что

$$\rho(f, 0)_\Psi := \|f\|_\Psi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Psi(|f(x)|)dx < \infty.$$

Шкала пространств L_Ψ содержит, в частности, известные пространства $L_p :\equiv L_p[0, 2\pi]$, $p \in$ $\in (0, 1]$ (при $\Psi(t) = t^p$).

Пусть $\Delta_t f(x) = f(x + t) - f(x)$, $\Delta_t^k = \Delta_t(\Delta_t^{k-1})$, $k \in N$,

$$\omega_k(f, h)_\Psi = \sup_{|t| \le h} \|\Delta_t^k f\|_\Psi, \qquad h \ge 0, \tag{1}$$

— модуль непрерывности порядка k функции f в пространстве L_Ψ (в случае $k = 1$ вместо $\omega_1(f, h)_\Psi$ будем писать $\omega(f, h)_\Psi$).

Мы будем изучать обобщения на случай пространств L_Ψ следующих четырех свойств модулей непрерывности функций, которые ранее были доказаны для пространств $L_p, p \in (0, 1]$.

Для удобства изложения введем нумерацию этих свойств.

Свойство 1 (изометрическое вложение в L_2). Для каждого из пространств L_p, $0 < p < 2$, существует отображение $A\colon L_p \to L_2$ такое, что:

а) для любого $f \in L_p$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^p dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |Af(x)|^2 dx; \tag{2}$$

б) для любых $f \in L_p$ и $h > 0$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\Delta_h f(x)|^p dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\Delta_h Af(x)|^2 dx. \tag{3}$$

Соотношение (2) доказано в [1], а соотношение (3) — в [2, 3].

Свойство 2. Наряду с (1) рассмотрим следующие характеристики гладкости функций:

$$\Lambda_k(f,h)_\Psi = \frac{1}{h}\int\limits_0^h \|\Delta_t^k f\|_\Psi dt,$$

$$\Omega_k(f,h)_\Psi = \frac{1}{h^k}\int\limits_0^h \ldots \int\limits_0^h \|\Delta_{\overline{t}}^k f\|_\Psi \;\; dt_1\ldots dt_k,$$

где $\overline{t} = (t_1,\ldots,t_k),\ \Delta_{\overline{t}}^k = \Delta_{t_1}\circ\ldots\circ\Delta_{t_k}$.

Для пространств $L_p,\ 0<p<1$, связь этих характеристик исследовалась в [4], где доказана их эквивалентность в том смысле, что для любого $k\in N$ и произвольного $h>0$ выполняются неравенства

$$\omega_k(f,h)_p \le C_1\Omega_k(f,h)_p \le C_2\Lambda_k(f,h)_p \le C_3\omega_k(f,h)_p$$

с постоянными $C_i, i=1,2,3,$ не зависящими от f и h.

Свойство 3. Для всех $f\in L_p,\ 0<p<1,$ и $k\in N$ выполняются неравенства [4]

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\|\Delta_h f\|_p dh \le C_4(k,p)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\|\Delta_h^k f\|_p dh.$$

Свойство 4. Пусть $0<p<1,\ k\in N$. Тогда (см., например, [5], гл. 12, § 5) для всех $n\in N$

$$\omega_k(f,nh)_p \le k^{1-p}n^{1+(k-1)p}\omega_k(f,h)_p.$$

2. Свойство 1. Изометрические вложения пространств L_Ψ в L_2. Пусть $\overline{\Omega}$ — подмножество из Ω, состоящее из вогнутых функций Ψ.

Теорема 1. *Пусть* $\Psi\in\overline{\Omega},\ \Psi(\infty):=\lim_{t\to\infty}\Psi(t)<\infty,\ g(t):=\Psi(\infty)-\Psi(t)\in L_2(0,\infty)$. *Тогда существует отображение* $A\colon L_\Psi\to L_2$ *такое, что для любой* $f\in L_\Psi$ *и каждого* $h>0$

$$\|f\|_\Psi = \|Af\|_2^2, \tag{4}$$

$$\|\Delta_h f\|_\Psi = \|\Delta_h Af\|_2^2. \tag{5}$$

Доказательство. В работах [1–3] при построении изометрических вложений L_p в L_2 использовался аппарат интегральных преобразований. Мы следуем той же идее.

Пусть для функции $g(t) \in L_2(0, \infty)$

$$\hat{g}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty g(t) \cos(st) dt$$

— ее косинус-преобразование Фурье. По условию функция $g(t)$ на $[0, \infty]$ убывает и выпуклая, а значит, $\hat{g}(s) \geq 0$. Далее

$$g(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \hat{g}(s) \cos(st) ds,$$

$$g(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \hat{g}(s) ds = \Psi(\infty),$$

$$\Psi(t) = \Psi(\infty) - g(t) = g(0) - g(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \hat{g}(s)(1 - \cos(st)) ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \hat{g}(s) |e^{ist} - 1|^2 ds,$$

$$\Psi(|f(x)|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \hat{g}(s) |e^{isf(x)} - 1|^2 ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \hat{g}(s) |F_f(s, x)|^2 ds, \tag{6}$$

где ограниченная функция $F_f(s, x) := e^{isf(x)} - 1$ при каждом фиксированном $s \in R_+$ является периодической функцией переменной x и принадлежит $L_2[0, 2\pi] \equiv: L_2(x)$. Поэтому для ее разложения в ряд Фурье

$$F_f(s, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(s) e^{ikx} \tag{7}$$

выполняется равенство Парсеваля

$$\|F_f(s, x)\|^2_{L_2(x)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(s)|^2.$$

Проинтегрируем (6) по переменной x и применим теоремы Фубини и Леви:

$$\|f\|_\Psi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Psi(|f(x)|) dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \hat{g}(s) |F_f(s, x)|^2 ds dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \hat{g}(s) \|F_f(s, x)\|^2_{L_2(x)} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \hat{g}(s) \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(s)|^2 ds =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \hat{g}(s) |c_k(s)|^2 ds = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2,$$

где

$$a_k^2 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \hat{g}(s)|c_k(s)|^2 ds.$$

Определим искомое отображение A равенством

$$Af(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx},$$

тогда $\|f\|_\Psi = \|Af\|_2^2$.

Равенство (5) доказывается аналогично. Пусть $\Delta_{h,x} F_f(s,x) = F_f(s, x+h) - F_f(s,x)$ — приращение с шагом h функции $F_f(s,x)$ по переменной x. Тогда

$$|\Delta_{h,x} F_f(s,x)| = |e^{isf(x+h)} - e^{isf(x)}| = |e^{is\Delta_h f(x)} - 1| = |F_{\Delta_h f}(s,x)|,$$

поэтому (см. (6), (7))

$$\Psi(|\Delta_h f(x)|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \hat{g}(s)|\Delta_{h,x} F_f(s,x)|^2 ds,$$

$$\|\Delta_h f\|_\Psi := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \hat{g}(s)\|\Delta_{h,x} F_f(s,x)\|_{L_2(x)}^2 ds =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \hat{g}(s)|c_k(s)|^2 ds 2(1-\cos kh) = \|\Delta_h Af\|_2^2.$$

Теорема 1 доказана.

Условия теоремы 1 выполняются, например, для функций $\Psi(t) = 1 - e^{-t}$, $\Psi(t) = \dfrac{t}{1+t}$, порождающих в соответствующих пространствах L_Ψ топологию сходимости по мере.

Если $\Psi(\infty) = \infty$, то, используя срезку функции Ψ, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\Psi \in \overline{\Omega}$ и $\Psi(\infty) = \infty$. Тогда существует последовательность отображений $A_n \colon L_\Psi \to L_2, n \in N$, таких, что для любой f из L_Ψ и всех $h > 0$*

$$\|f\|_\Psi = \lim_{n\to\infty} \|A_n f\|_2^2,$$

$$\|\Delta_h f\|_\Psi = \lim_{n\to\infty} \|\Delta_h A_n f\|_2^2. \tag{8}$$

Доказательство. Для $n \in N$ положим

$$\Psi_{(n)}(t) = \min(\Psi(t); n), \qquad |f_{(n)}(x)| = \min(|f(x)|; n),$$

$$g_n(t) = \Psi(n) - \Psi_{(n)}(t) = (\Psi(n) - \Psi(t))_+,$$

тогда

$$\hat{g}_n(s) \geq 0,$$

$$\Psi_{(n)}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \hat{g}_n(s)(1 - \cos st) ds,$$

$$\Psi_{(n)}(|f(x)|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \hat{g}_n(s) |e^{isf(x)} - 1|^2 ds,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Psi_{(n)}(|f(x)|) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \hat{g}_n(s) \|F_f(s,x)\|^2_{L_2(x)} ds =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \hat{g}_n(s) |c_k(s)|^2 ds. \tag{9}$$

Определим отображение A_n равенством

$$A_n f(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \hat{g}_n(s) |c_k(s)|^2 ds \right)^{1/2} e^{ikx},$$

тогда из (9) следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Psi_{(n)}(|f(x)|) dx = \|A_n f(x)\|_2^2.$$

Осталось учесть, что $\lim_{n\to\infty} \|f\|_{\Psi_{(n)}} = \|f\|_\Psi$.

Заметим, что если функция f существенно ограничена, то при $n_0 > \sup \mathrm{vrai}\, |f(x)|$ $\Psi_{(n_0)}(|f(x)|) = \Psi(|f(x)|)$ почти всюду. Тогда

$$\|f\|_\Psi = \|A_{n_0} f\|_2^2.$$

Аналогично доказывается и соотношение (8).

Теорема 2 доказана.

3. Теорема 3 (свойство 2). *Пусть* $\Psi \in \Omega$, $k \in N$. *Тогда для всех* $f \in L_\Psi$ *и* $h > 0$ *выполняются неравенства*

$$\omega_k(f,h)_\Psi \leq C_1 \Omega_k(f,h)_\Psi \leq C_2 \Lambda_k(f,h)_\Psi \leq C_3 \omega_k(f,h)_\Psi \tag{10}$$

с постоянными C_i, $i = 1,2,3$, *не зависящими от* f *и* h.

Доказательство. Третье неравенство в (10) очевидное. Доказательство второго неравенства в случае $L_\Psi = L_p, 0 < p < 1$, в [4] основано на алгебраических тождествах для суперпозиций приращений, фактически не использует специфических свойств L_p-метрики и с очевидными изменениями имеет место для произвольных пространств L_Ψ.

Первое неравенство в (10) достаточно доказать при $k = 1$. Общий случай получим k-кратным применением полученного неравенства.

Заметим, что аналогичное неравенство выполняется в L_2 [6]:

$$\omega^2(f,h)_2 \leq C_4 \int_0^h \|\Delta_s f\|_2^2 ds. \tag{11}$$

Поэтому используем вложение L_Ψ в L_2.

Пусть $\overline{\Psi}$ — наименьшая вогнутая мажоранта модуля непрерывности Ψ. Так как (см., например, [7], гл. 2, § 1) $\Psi(x) \leq \bar{\Psi}(x) \leq 2\Psi(x)$, то $\|f\|_\Psi \leq \|f\|_{\bar{\Psi}} \leq 2\|f\|_\Psi$.

Пусть $t \in (0,h]$ и, например, $\Psi(\infty) = \infty$. Тогда, используя теорему 2, неравенство (11) и теорему Лебега о предельном переходе, получаем искомое неравенство

$$\|\Delta_t f\|_\Psi \leq \|\Delta_t f\|_{\bar{\Psi}} = \lim_{n\to\infty} \|\Delta_t A_n f\|_2^2 \leq C_4 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h} \int_0^h \|\Delta_s A_n f\|_2^2 ds =$$

$$= C_4 \frac{1}{h} \int_0^h \lim_{n\to\infty} \|\Delta_s A_n f\|_2^2 ds = C_4 \frac{1}{h} \int_0^h \|\Delta_s f\|_{\overline{\Psi}} ds \leq 2C_4 \frac{1}{h} \int_0^h \|\Delta_s f\|_\Psi ds.$$

Теорема 3 доказана.

4. Свойство 3. Пусть для $\Psi \in \Omega$

$$M_\Psi(t) = \sup_{s>0} \frac{\Psi(st)}{\Psi(s)} \tag{12}$$

— ее функция растяжения (см. [7], гл. 2, § 1).

Теорема 4 (свойство 3). *Пусть $k \in N$, функция Ψ из Ω такова, что $M_\Psi\left(\frac{1}{2^k}\right) < 1$. Тогда для любой $f \in L_\Psi$ выполняется неравенство*

$$\int_0^{2\pi} \|\Delta_h^k f\|_\Psi dh \leq \frac{k^2}{1 - M_\Psi\left(\frac{1}{2^k}\right)} \int_0^{2\pi} \|\Delta_h^{k+1} f\|_\Psi dh. \tag{13}$$

Для нормированных пространств L_p, $p \geq 1$, неравенство такого типа доказано в [8]. Мы используем ту же идею доказательства, что в [8], а также неравенство $\Psi(st) \leq M_\Psi(t)\Psi(s)$, которое следует из определения (12).

Доказательство. Поскольку ([9], гл. 3, § 3)

$$\Delta_{2h}^k f(x) - 2^k \Delta_h^k f(x) = \sum_{l=1}^k C_k^l \sum_{m=0}^{l-1} \Delta_h^{k+1} f(x + mh),$$

то

$$\Delta_h^k f(x) = \frac{1}{2^k} \Delta_{2h}^k f(x) - \sum_{l=1}^k \frac{C_k^l}{2^k} \sum_{m=0}^{l-1} \Delta_h^{k+1} f(x + mh),$$

$$\Psi(|\Delta_h^k f(x)|) \leq M_\Psi\left(\frac{1}{2^k}\right)\Psi(|\Delta_{2h}^k f(x)|) + \sum_{l=1}^{k} M_\Psi\left(\frac{C_k^l}{2^k}\right)\sum_{m=0}^{l-1}\Psi(|\Delta_h^{k+1} f(x+mh)|),$$

$$\|\Delta_h^k f\|_\Psi \leq M_\Psi\left(\frac{1}{2^k}\right)\|\Delta_{2h}^k f\|_\Psi + \left(\sum_{l=1}^{k} l\cdot M_\Psi\left(\frac{C_k^l}{2^k}\right)\right)\|\Delta_h^{k+1} f\|_\Psi.$$

Так как $M_\Psi\left(\dfrac{C_k^l}{2^k}\right) \leq 1$, то

$$\|\Delta_h^k f\|_\Psi - M_\Psi\left(\frac{1}{2^k}\right)\|\Delta_{2h}^k f\|_\Psi \leq k^2\|\Delta_h^{k+1} f\|_\Psi.$$

Отсюда следует (13).

Теорема 4 доказана.

Следствие. *Пусть* $\Psi \in \Omega,\ M_\Psi\left(\dfrac{1}{2}\right) < 1,\ k = 2, 3, \ldots$. *Тогда для любой* $f \in L_\Psi$

$$\int_0^{2\pi}\|\Delta_h f\|_\Psi dh \leq C(k)\int_0^{2\pi}\|\Delta_h^k f\|_\Psi dh.$$

5. Теорема 5 (свойство 4). *Пусть* $\Psi \in \Omega,\ k,\ n \in N,\ n \geq 2$. *Тогда для любой* $f \in L_\Psi$ *и всех* $h > 0$

$$\omega_k(f, nh)_\Psi \leq C(k)nM_\Psi(n^{k-1})\omega_k(f, h)_\Psi. \tag{14}$$

Доказательство. Поскольку ([9], гл. 3, § 3)

$$\Delta_{nh}^k f(x) = \sum_{\nu_1=0}^{n-1}\ldots\sum_{\nu_k=0}^{n-1}\Delta_h^k f(x + (\nu_1 + \ldots + \nu_k)h),$$

то

$$\Delta_{nh}^k f(x) = \sum_{s=0}^{(n-1)k} r_{k,n}(s)\Delta_h^k f(x + sh), \tag{15}$$

где $r_{k,n}(s)$ — число решений уравнения $\sum_{i=1}^{k}\nu_i = s$ при условии $\nu_i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Заметим, что $\max\{r_{k,n}(s); s \leq (n-1)k\} = C_5(k)n^{k-1}$.

Из (15) следует, что

$$\frac{\|\Delta_{nh}^k f\|_\Psi}{\|\Delta_h^k f\|_\Psi} \leq \sum_{s=0}^{(n-1)k} M_\Psi(r_{k,n}(s)) \leq M_\Psi(C_5(k)n^{k-1})\sum_{s=0}^{(n-1)k} M_\Psi\left(\frac{r_{k,n}(s)}{C_5(k)n^{k-1}}\right) \leq$$

$$\leq M_\Psi(C_5(k))M_\Psi(n^{k-1})(n-1)k \leq C(k)M_\Psi(n^{k-1})n.$$

Мы использовали полумультипликативность M_Ψ и тот факт, что $M_\Psi(t) \leq 1$ при $t \leq 1$.

Теорема 5 доказана.

Литература

1. *Schoenberg I. J.* The isometric imbedding of metric spaces into Hilbert space and positive definite functions. – Amer. Math. Soc., 1932.
2. *Конягин С. В.* О модулях непрерывности функций // Тезисы докл. Всесоюз. школы по теории функций. – Кемерово, 1983. – 59 с.
3. *Черных Н. И.* Неравенство Джексона в $L_p[0, 2\pi]$ с точной константой // Труды Мат. ин-та АН СССР. – 1992. – **198**. – С. 232 – 241.
4. *Руновский К. В.* О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Мат. сб. – 1994. – **185**, № 8. – С. 81 – 102.
5. *DeVor R. A., Lorentz G. G.* Constructive approximation. – New York: Springer, 1993.
6. *Руновский К. В.* Об одной оценке для интегрального модуля гладкости // Изв. вузов. Математика. – 1992. – **1**. – С. 78 – 80.
7. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
8. *Стороженко Э. А.* Приближение функций интерполяционными в среднем сплайнами // Изв. вузов. Математика. – 1976. – **12**. – С. 82 – 95.
9. *Тиман А. Ф.* Теория приближений функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.

Получено 09.08.16