УДК 517.5

В. С. Василянская, Вит. В. Волчков (Донец. нац. ун-т)

АНАЛОГИ СФЕРИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

We introduce the notion of "s"-convolution on the hyperbolic plane $\mathbb{H}^2$ and consider its properties. Analogs of the Helgason spherical transform on the spaces of compactly supported distributions in $\mathbb{H}^2$ are studied. We prove a Paley – Wiener – Schwartz-type theorem for these transforms.

Визначено поняття „s"-згортки на гіперболічній площині $\mathbb{H}^2$ та розглянуто її властивості. Вивчено аналоги сферичного перетворення на просторах розподілів із компактним носієм у $\mathbb{H}^2$. Доведено теорему типу Пелі – Вінера – Шварца для вказаних перетворень.

1. Введение. Пусть $\mathbb{D}$ — открытый круг $|z| < 1$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ со стандартной структурой многообразия [1] (лекция 6) и римановой структурой, задаваемой метрическим тензором

$$g_{i,j}(z) = \frac{\delta_{i,j}}{(1-|z|^2)^2}, \quad i,j \in \{1,2\}$$

($\delta_{i,j}$ — символ Кронекера). Как известно (см. [2], введение), это риманово многообразие изометрично вещественной гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$ постоянной секционной кривизны 4. Сферическое преобразование для гладкой радиальной функции f на $\mathbb{H}^2$ с компактным носителем определяется равенством

$$\tilde{f}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{D}} f(z)\varphi_\lambda(z)d\mu(z), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1.1}$$

где

$$d\mu(z) = \frac{i}{2}\frac{dz \wedge \overline{dz}}{(1-|z|^2)^2}, \qquad \varphi_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\theta}|^2}\right)^{\frac{1+i\lambda}{2}} d\theta.$$

Преобразование (1.1) является аналогом классического преобразования Ганкеля в евклидовом пространстве и играет существенную роль в различных вопросах гармонического анализа на $\mathbb{H}^2$.

Пусть G — группа конформных автоморфизмов круга $\mathbb{D}$, dg — мера Хаара на G. Для точки $z \in \mathbb{D}$ обозначим через gz образ точки z при отображении $g \in G$. Пусть также o — центр круга $\mathbb{D}$. В работе [3] начато изучение свойств решений уравнений вида

$$\int\limits_G f_1(go)\, f_2(g^{-1}z)\left(\frac{1-z\cdot\overline{go}}{1-\overline{z}\cdot go}\right)^s dg = 0, \tag{1.2}$$

где f_1, f_2 — функции на $\mathbb{D}$, s — фиксированное целое число. При $s = 0$ левая часть в (1.2) дает обычную свертку функций f_1 и f_2 на $\mathbb{H}^2$. Теория уравнений свертки на областях в $\mathbb{H}^2$ развита в [4] (часть 2), [5] (главы 15, 20), [6] (часть 2). В общем случае (1.2) можно рассматривать как аналог искаженного уравнения свертки на фазовом пространстве группы Гейзенберга

[5] (глава 12). Локальные аспекты соответствующей теории в настоящее время еще не разработаны. Для описания решений уравнений (1.2) и ряда других вопросов, связанных с указанными уравнениями, важно иметь в качестве инструмента подходящий вариант сферического преобразования. В данной работе вводится такое преобразование и изучаются его свойства. Основным результатом является теорема типа Винера – Пэли, доказанная в пункте 5.

2. "s"-Свертка на группе G. Пусть $\mathcal{D}(M)$ — пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций на гладком многообразии M, $\mathcal{D}'(M)$ — пространство распределений на M, $\mathcal{E}'(M)$ — множество распределений на M с компактным носителем. Запись $t_1 \vee t_2 \in \mathcal{E}'(M)$ обозначает, что t_1, t_2 принадлежат $\mathcal{D}'(M)$ и хотя бы одно из этих распределений принадлежит $\mathcal{E}'(M)$.

Предположим, что $t_1 \vee t_2 \in \mathcal{E}'(G)$. Для $s \in \mathbb{Z}$ определим "s"-свертку $t_1 \overset{s}{*} t_2$ как распределение

$$\langle t_1 \overset{s}{*} t_2, \varphi\rangle = \langle t_2(h), \langle t_1(g), \varphi(gh)\, e_s(g^{-1}o, ho)\rangle\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(G), \tag{2.1}$$

где

$$e_s(z,w) = \left(\frac{1 - z\,\overline{w}}{1 - \overline{z}\,w}\right)^s, \quad z, w \in \mathbb{D}.$$

Для изучения свойств "s"-свертки приведем сначала одно тождество для функции e_s.

Лемма 2.1. *Пусть $z, w \in \mathbb{D}$, $g \in G$. Тогда*

$$e_s(w, go)\, e_s(go, z) = e_s(g^{-1}z, g^{-1}w)\, e_s(w, z). \tag{2.2}$$

В частности,

$$e_s(gz, go) = e_s(g^{-1}o, z). \tag{2.3}$$

Доказательство. Запишем действие g в виде

$$gz = \frac{az + b}{\overline{b}z + \overline{a}}, \quad \text{где} \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1.$$

Тогда $go = b/\overline{a}$,

$$g^{-1}z = \frac{\overline{a}z - b}{-\overline{b}z + a}$$

и (2.2) получается непосредственным вычислением. Полагая в (2.2) $w = o$ и заменяя g на g^{-1}, приходим к (2.3).

Лемма 2.2. *Пусть $t_i \in \mathcal{D}'(G)$, $i = 1, 2, 3$, и хотя бы два из распределений t_i имеют компактный носитель. Тогда*

$$(t_1 \overset{s}{*} t_2) \overset{s}{*} t_3 = t_1 \overset{s}{*} (t_2 \overset{s}{*} t_3).$$

Доказательство. Для $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ по определению "s"-свертки имеем

$$\langle (t_1 \overset{s}{*} t_2) \overset{s}{*} t_3, \varphi\rangle = \langle t_3(h), \langle t_2(u), \langle t_1(v), \varphi(vuh)\, A\rangle\rangle\rangle,$$

$$\langle t_1 \overset{s}{*} (t_2 \overset{s}{*} t_3), \varphi\rangle = \langle t_3(h), \langle t_2(u), \langle t_1(v), \varphi(vuh)\, B\rangle\rangle\rangle,$$

где $A = e_s(u^{-1}v^{-1}o, ho)\, e_s(v^{-1}o, uo)$, $B = e_s(v^{-1}o, uho)\, e_s(u^{-1}o, ho)$. Осталось заметить, что $A = B$ в силу леммы 2.1.

Произвольную локально интегрируемую функцию f на G будем отождествлять с распределением

$$\varphi \to \int_G \varphi(g) f(g)\, dg, \quad \varphi \in \mathcal{D}(G), \tag{2.4}$$

где dg — мера Хаара на G, нормированная соотношением

$$\int_G \psi(go) dg = \int_{\mathbb{D}} \psi(z) d\mu(z), \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^2).$$

С учетом этого справедлива следующая лемма.

Лемма 2.3. *Пусть* $f \in C^\infty(G)$, $t \in \mathcal{D}'(G)$, $f \vee t \in \mathcal{E}'(G)$. *Тогда*

$$(t \overset{s}{*} f)(u) = \langle t(g), f(g^{-1}u)\, e_s(uo, go)\rangle, \qquad (f \overset{s}{*} t)(u) = \langle t(g), f(ug^{-1})\, e_s(g^{-1}o, u^{-1}o)\rangle.$$

Доказательство. Согласно (2.1) и (2.4)

$$\langle t \overset{s}{*} f, \varphi\rangle = \int_G f(h) \langle t(g), \varphi(gh)\, e_s(g^{-1}o, ho)\rangle\, dh =$$

$$= \left\langle t(g), \int_G f(h)\varphi(gh)\, e_s(g^{-1}o, ho)\, dh \right\rangle =$$

$$= \left\langle t(g), \int_G f(g^{-1}u)\varphi(u)\, e_s(g^{-1}o, g^{-1}uo)\, du \right\rangle$$

для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(G)$. Отсюда, учитывая (2.3), находим

$$\langle t \overset{s}{*} f, \varphi\rangle = \int_G \varphi(u) \langle t(g), f(g^{-1}u)\, e_s(uo, go)\rangle\, du,$$

что доказывает первое равенство в лемме. Второе равенство доказывается аналогично.

Из доказательства леммы 2.3 видно, что "s"-свертку двух функций $f_1, f_2 \in L_{\mathrm{loc}}(G)$ таких, что $f_1 \vee f_2 \in \mathcal{E}'(G)$, можно определить равенством

$$(f_1 \overset{s}{*} f_2)(u) = \int_G f_1(g) f_2(g^{-1}u)\, e_s(uo, go)\, dg. \tag{2.5}$$

Для $t \in \mathcal{D}'(G)$, $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ положим

$$\langle \check{t}, \varphi\rangle = \langle t(g), \varphi(g^{-1})\rangle.$$

Тогда $\check{t} \in \mathcal{D}'(G)$ и $\check{f}(g) = f(g^{-1})$ для $f \in L_{\mathrm{loc}}(G)$.

Лемма 2.4. *Если* $t_1 \vee t_2 \in \mathcal{E}'(G)$, $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, *то*

$$(t_1 \overset{s}{*} t_2)\check{} = \check{t}_2 \overset{-s}{*} \check{t}_1, \tag{2.6}$$

$$\langle t_1 \overset{s}{*} t_2, \varphi\rangle = \langle t_1, \varphi \overset{-s}{*} \check{t}_2\rangle = \langle t_2, \check{t}_1 \overset{-s}{*} \varphi\rangle. \tag{2.7}$$

Доказательство. По свойству Фубини для прямого произведения распределений имеем

$$\langle (t_1 \overset{s}{*} t_2)\check{}, \varphi\rangle = \langle t_1 \overset{s}{*} t_2, \check{\varphi}\rangle = \langle t_1(g), \langle t_2(h), \varphi(h^{-1}g^{-1})\, e_s(g^{-1}o, ho)\rangle\rangle =$$

$$= \langle \check{t}_1(g), \langle \check{t}_2(h), \varphi(hg)\, e_{(-s)}(h^{-1}o, go)\rangle\rangle = \langle \check{t}_2 \overset{-s}{*} \check{t}_1, \varphi\rangle,$$

откуда следует (2.6). Далее,

$$\langle t_1 \overset{s}{*} t_2, \varphi\rangle = \langle t_1(g), \langle t_2(h), \varphi(gh)\, e_s(g^{-1}o, ho)\rangle\rangle = \langle t_1(g), \langle \check{t}_2(h), \varphi(gh^{-1})\, e_{(-s)}(h^{-1}o, g^{-1}o)\rangle\rangle. \tag{2.8}$$

С другой стороны,

$$\langle t_1 \overset{s}{*} t_2, \varphi\rangle = \langle t_2(h), \langle \check{t}_1(g), \varphi(g^{-1}h)\, e_{(-s)}(ho, go)\rangle\rangle. \tag{2.9}$$

Используя лемму 2.3, из (2.8) и (2.9) получаем (2.7).

Лемма 2.5. *Пусть* $u, t, t_n \in \mathcal{D}'(G)$, $n \in \mathbb{N}$. *Предположим, что* $t_n \to t$ *в* $\mathcal{D}'(G)$ *и выполнено хотя бы одно из следующих условий*: 1) $u \in \mathcal{E}'(G)$; 2) *существует компакт* $C \subset G$ *такой, что* $\operatorname{supp} t_n \subset C$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда* $u \overset{s}{*} t_n \to u \overset{s}{*} t$ *и* $t_n \overset{s}{*} u \to t \overset{s}{*} u$ *в* $\mathcal{D}'(G)$.

Доказательство. Если $u \in \mathcal{E}'(G)$, $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, то функция $\psi(h) = \langle u(g), \varphi(gh)\, e_s(g^{-1}o, ho)\rangle$ принадлежит $\mathcal{D}(G)$ и $\langle u \overset{s}{*} t_n, \varphi\rangle = \langle t_n, \psi\rangle$. Отсюда $\langle u \overset{s}{*} t_n, \varphi\rangle \to \langle t, \psi\rangle = \langle u \overset{s}{*} t, \varphi\rangle$, т. е. $u \overset{s}{*} t_n \to u \overset{s}{*} t$ в $\mathcal{D}'(G)$.

Предположим, что выполнено второе условие в лемме. Пусть η — произвольная функция из $\mathcal{D}(G)$ такая, что $\eta = 1$ в окрестности C. Тогда $\langle u \overset{s}{*} t_n, \varphi\rangle = \langle t_n, \eta\, \psi\rangle$. Из этого равенства снова получаем сходимость $u \overset{s}{*} t_n$ к $u \overset{s}{*} t$ в $\mathcal{D}'(G)$. Для свертки $t_n \overset{s}{*} u$ рассуждения проводятся аналогично.

Пусть $K = SO(2)$ — группа вращений $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{D}'_\natural(G)$ — множество биинвариантных относительно K распределений на G, т. е.

$$t \in \mathcal{D}'_\natural(G) \Longleftrightarrow \langle t, \varphi\rangle = \langle t(g), \varphi(k_1 g k_2)\rangle \qquad \forall k_1, k_2 \in K, \quad \varphi \in \mathcal{D}(G).$$

Обозначим через dk меру Хаара на K, нормированную условием $\int_K dk = 1$. Нетрудно видеть, что распределение δ_K, действующее по правилу

$$\langle \delta_K, \varphi\rangle = \int_K \varphi(k)dk, \quad \varphi \in \mathcal{D}(G),$$

является биинвариантным относительно K и для любого $t \in \mathcal{D}'(G)$ имеют место равенства

$$\langle \delta_K \overset{s}{*} t, \varphi\rangle = \left\langle t(h), \int_K \varphi(kh)dk \right\rangle, \tag{2.10}$$

$$\langle t \overset{s}{*} \delta_K, \varphi\rangle = \left\langle t(h), \int_K \varphi(hk)dk \right\rangle. \tag{2.11}$$

Лемма 2.6. *Пусть* $t \in \mathcal{D}'_\natural(G)$. *Тогда* $\check{t} = t$.

Доказательство. Для $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ положим

$$\varphi^{\natural}(g) = \int\limits_K \int\limits_K \varphi(k_1 g k_2)\, dk_1 dk_2.$$

Тогда $\varphi^{\natural}$ биинвариантна относительно K и $(\check{\varphi})^{\natural} = (\varphi^{\natural})\check{}$. Далее, равенство $\psi(go) = \varphi^{\natural}(g)$ корректно определяет радиальную функцию ψ на $\mathbb{D}$, откуда $(\varphi^{\natural})\check{} = \varphi^{\natural}$. Теперь имеем

$$\langle \check{t}, \varphi \rangle = \langle t, \check{\varphi} \rangle = \langle t, (\check{\varphi})^{\natural} \rangle = \langle t, \varphi^{\natural} \rangle = \langle t, \varphi \rangle,$$

т. е. $\check{t} = t$.

Лемма 2.7. *Если* $t_1, t_2 \in \mathcal{D}'_{\natural}(G)$, $t_1 \vee t_2 \in \mathcal{E}'(G)$, *то* $t_1 \overset{s}{*} t_2 \in \mathcal{D}'_{\natural}(G)$ *и*

$$t_1 \overset{s}{*} t_2 = t_2 \overset{-s}{*} t_1. \tag{2.12}$$

Доказательство. Пусть $k_1, k_2 \in K$, $\varphi \in \mathcal{D}(G)$. Биинвариантность $t_1 \overset{s}{*} t_2$ следует из цепочки равенств

$$\langle (t_1 \overset{s}{*} t_2)(g), \varphi(k_1 g k_2) \rangle = \langle t_2(h), \langle t_1(g), \varphi(k_1 g h k_2)\, e_s(g^{-1}o, ho) \rangle \rangle =$$

$$= \langle t_2(h), \langle t_1(g), \varphi(k_1 g h k_2)\, e_s((k_1 g)^{-1}o, ho) \rangle \rangle = \langle t_2(h), \langle t_1(g), \varphi(g h k_2)\, e_s(g^{-1}o, ho) \rangle \rangle =$$

$$= \langle t_1(g), \langle t_2(h), \varphi(g h k_2)\, e_s(g^{-1}o, h k_2 o) \rangle \rangle = \langle t_1(g), \langle t_2(h), \varphi(g h)\, e_s(g^{-1}o, ho) \rangle \rangle = \langle t_1 \overset{s}{*} t_2, \varphi \rangle.$$

Соотношение (2.12) получаем из лемм 2.4 и 2.6.

3. "s"-Свертка на плоскости $\mathbb{H}^2$. Для $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{H}^2)$ обозначим через $T^{\uparrow}$ распределение на G, действующее по правилу

$$\langle T^{\uparrow}, \varphi \rangle = \langle T, \dot{\varphi} \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(G),$$

где $\dot{\varphi}$ определяется равенством

$$\dot{\varphi}(go) = \int\limits_K \varphi(gk)\, dk, \quad g \in G.$$

Отождествление функции $f \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{H}^2)$ с распределением

$$\psi \longrightarrow \int\limits_{\mathbb{D}} f(z)\psi(z)\, d\mu(z), \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^2),$$

приводит к соотношению $f^{\uparrow}(g) = f(go)$. Кроме того,

$$\langle T^{\uparrow}, \psi^{\uparrow} \rangle = \langle T, \psi \rangle, \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^2). \tag{3.1}$$

Если $T_1 \vee T_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{H}^2)$, то введем "$s$"-свертку $T_1 \overset{s}{\times} T_2$ следующим образом:

$$\langle T_1 \overset{s}{\times} T_2, \psi \rangle = \langle T_1^{\uparrow} \overset{s}{*} T_2^{\uparrow}, \psi^{\uparrow} \rangle, \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^2). \tag{3.2}$$

Отметим, что дельта-функция в нуле на $\mathbb{H}^2$ и распределение δ_K на G связаны соотношением $\delta^{\uparrow} = \delta_K$. Отсюда и из (3.1), (2.10), (2.11) для $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{H}^2)$ имеем

$$\delta \overset{s}{\times} T = T^{\natural}, \quad T \overset{s}{\times} \delta = T, \tag{3.3}$$

где распределение $T^{\natural}$ действует по правилу

$$\langle T^{\natural}, \psi \rangle = \left\langle T(z), \int\limits_K \psi(kz)\, dk \right\rangle, \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^2).$$

Лемма 3.1. *Пусть* $T_1 \vee T_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{H}^2)$. *Тогда*

$$(T_1 \overset{s}{\times} T_2)^{\uparrow} = T_1^{\uparrow} \overset{s}{*} T_2^{\uparrow}.$$

Доказательство. Простые преобразования показывают, что

$$\langle T_1^{\uparrow} \overset{s}{*} T_2^{\uparrow}, \varphi \rangle = \left\langle T_2(ho), \left\langle T_1(go), \int\limits_K \dot{\varphi}(gkho)\, e_s(k^{-1}g^{-1}o, ho)\, dk \right\rangle \right\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(G).$$

Отсюда

$$\langle T_1^{\uparrow} \overset{s}{*} T_2^{\uparrow}, (\dot{\varphi})^{\uparrow} \rangle = \langle T_1^{\uparrow} \overset{s}{*} T_2^{\uparrow}, \varphi \rangle, \tag{3.4}$$

поскольку $((\dot{\varphi})^{\uparrow})^{\cdot} = \dot{\varphi}$. С другой стороны,

$$\langle T_1^{\uparrow} \overset{s}{*} T_2^{\uparrow}, (\dot{\varphi})^{\uparrow} \rangle = \langle T_1 \overset{s}{\times} T_2, \dot{\varphi} \rangle = \langle (T_1 \overset{s}{\times} T_2)^{\uparrow}, \varphi \rangle. \tag{3.5}$$

Сравнивая (3.4) и (3.5), получаем утверждение леммы.

Лемма 3.2. *Пусть* $T_i \in \mathcal{D}'(\mathbb{H}^2)$, $i = 1, 2, 3$, *и хотя бы два из распределений* T_i *принадлежат* $\mathcal{E}'(\mathbb{H}^2)$. *Тогда*

$$(T_1 \overset{s}{\times} T_2) \overset{s}{\times} T_3 = T_1 \overset{s}{\times} (T_2 \overset{s}{\times} T_3).$$

Доказательство. Используя (3.2), леммы 2.2 и 3.1, для $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^2)$ имеем

$$\langle (T_1 \overset{s}{\times} T_2) \overset{s}{\times} T_3, \psi \rangle = \langle (T_1 \overset{s}{\times} T_2)^{\uparrow} \overset{s}{*} T_3^{\uparrow}, \psi^{\uparrow} \rangle =$$

$$= \langle (T_1^{\uparrow} \overset{s}{*} T_2^{\uparrow}) \overset{s}{*} T_3^{\uparrow}, \psi^{\uparrow} \rangle = \langle T_1^{\uparrow} \overset{s}{*} (T_2^{\uparrow} \overset{s}{*} T_3^{\uparrow}), \psi^{\uparrow} \rangle =$$

$$= \langle T_1^{\uparrow} \overset{s}{*} (T_2 \overset{s}{\times} T_3)^{\uparrow}, \psi^{\uparrow} \rangle = \langle T_1 \overset{s}{\times} (T_2 \overset{s}{\times} T_3), \psi \rangle,$$

что и требовалось доказать.

Следующее утверждение показывает непрерывность "s"-свертки на $\mathbb{H}^2$.

Лемма 3.3. *Пусть* $U, T, T_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{H}^2)$, $n \in \mathbb{N}$. *Предположим, что* $T_n \to T$ *в* $\mathcal{D}'(\mathbb{H}^2)$ *и выполнено хотя бы одно из следующих условий*: 1) $U \in \mathcal{E}'(\mathbb{H}^2)$; 2) *существует компакт* $C \subset \mathbb{H}^2$ *такой, что* $\operatorname{supp} T_n \subset C$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда* $U \overset{s}{\times} T_n \to U \overset{s}{\times} T$ *и* $T_n \overset{s}{\times} U \to T \overset{s}{\times} U$ *в* $\mathcal{D}'(\mathbb{H}^2)$.

Доказательство. Из условия следует, что $T_n{}^{\uparrow} \to T^{\uparrow}$ в $\mathcal{D}'(G)$. Тогда по лемме 2.5 $U^{\uparrow} \overset{s}{*} T_n{}^{\uparrow} \to U^{\uparrow} \overset{s}{*} T^{\uparrow}$ и $T_n{}^{\uparrow} \overset{s}{*} U^{\uparrow} \to T^{\uparrow} \overset{s}{*} U^{\uparrow}$ в $\mathcal{D}'(G)$. Отсюда и из (3.2) получаем требуемое.

Рассмотрим теперь частные случаи определения "s"-свертки на $\mathbb{H}^2$. Если в (3.2) распределения T_1 и T_2 являются функциями, то

$$(T_1 \overset{s}{\times} T_2)(z) = \int\limits_G T_1(go)\, T_2(g^{-1}z)\, e_s(z, go)\, dg \tag{3.6}$$

(см. (2.5) и лемму 3.1). Аналог леммы 2.3 формулируется следующим образом.

Лемма 3.4. *Пусть* $f \in C^{\infty}(\mathbb{H}^2)$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{H}^2)$ *и* $f \vee T \in \mathcal{E}'(\mathbb{H}^2)$. *Тогда*

$$(T \overset{s}{\times} f)(go) = \langle T(z), f^{\natural}(g^{-1}z)\, e_s(go, z)\rangle, \tag{3.7}$$

$$(f \overset{s}{\times} T)(go) = \langle T^{\natural}(z), f(gz)\, e_s(z, g^{-1}o)\rangle. \tag{3.8}$$

Доказательство. Из лемм 2.3 и 3.1 следует, что $T \overset{s}{\times} f$ является функцией и

$$(T \overset{s}{\times} f)(go) = (T \overset{s}{\times} f)^{\uparrow}(g) = (T^{\uparrow} \overset{s}{*} f^{\uparrow})(g) = \langle T^{\uparrow}(h), f(h^{-1}go)\, e_s(go, ho)\rangle.$$

По определению $T^{\uparrow}$ имеем

$$(T \overset{s}{\times} f)(go) = \left\langle T(ho), \int\limits_K f(k^{-1}h^{-1}go)\, dk\ e_s(go, ho)\right\rangle.$$

Для фиксированных $g, h \in G$ выберем такой элемент $k_1 \in K$, что $h^{-1}go = k_1(h^{-1}g)^{-1}o$. Тогда

$$(T \overset{s}{\times} f)(go) = \left\langle T(ho), \int\limits_K f(k^{-1}k_1 g^{-1}ho)\, dk\ e_s(go, ho)\right\rangle =$$

$$= \left\langle T(ho), \int\limits_K f(kg^{-1}ho)\, dk\ e_s(go, ho)\right\rangle = \langle T(z), f^{\natural}(g^{-1}z)\, e_s(go, z)\rangle,$$

т. е. равенство (3.7) доказано. Равенство (3.8) получается аналогично.

Из доказательства леммы 3.4 видно, что "s"-свертку двух функций $f_1, f_2 \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{H}^2)$ таких, что $f_1 \vee f_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{H}^2)$, можно определить равенством

$$(f_1 \overset{s}{\times} f_2)(go) = \int\limits_{\mathbb{D}} f_1(z)\, f_2{}^{\natural}(g^{-1}z)\, e_s(go, z)\, d\mu(z). \tag{3.9}$$

Используя (3.3), (3.9), лемму 3.3 и стандартный метод сглаживания (см., например, [4], гл. 1.3), получаем

$$T_1 \overset{s}{\times} T_2 = T_1 \overset{s}{\times} T_2{}^{\natural}. \tag{3.10}$$

Здесь, как и выше, $T_1 \vee T_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{H}^2)$.

Обозначим через $\mathcal{D}'_{\natural}(\mathbb{H}^2)$ пространство радиальных распределений на $\mathbb{H}^2$, т. е. $\mathcal{D}'_{\natural}(\mathbb{H}^2) = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{H}^2) : T = T^{\natural}\}$. Положим также $\mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{H}^2) = (\mathcal{D}'_{\natural} \cap \mathcal{E}')(\mathbb{H}^2)$.

Лемма 3.5. *Пусть* $T_1 \vee T_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{H}^2)$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^2)$. *Тогда*:
(i) *если* $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'_\natural(\mathbb{H}^2)$, *то*

$$T_1 \overset{s}{\times} T_2 = T_2 \overset{-s}{\times} T_1;$$

(ii) *если* $T_1 \in \mathcal{D}'_\natural(\mathbb{H}^2)$, *то*

$$\langle T_1 \overset{s}{\times} T_2, \psi\rangle = \langle T_2, T_1 \overset{-s}{\times} \psi\rangle;$$

(iii) $\langle T_1 \overset{s}{\times} T_2, \psi\rangle = \langle T_1, \psi \overset{-s}{\times} T_2\rangle$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что для любого $T \in \mathcal{D}'_\natural(\mathbb{H}^2)$ распределение $T^\uparrow$ является биинвариантным относительно K. Поэтому утверждение (i) следует из (3.2) и леммы 2.7. Аналогично, утверждения (ii), (iii) получаются из (3.2), (3.1), (3.10), лемм 2.4 и 2.6.

Пусть $f \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{H}^2)$. Обозначим через f^κ, $\kappa \in \mathbb{Z}$, компоненты f при разложении ее в ряд Фурье, т. е.

$$f^{\kappa}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z\, e^{-i\alpha})\, e^{i\kappa\alpha}\, d\alpha = \int_K f(\tau z)\, \tau^{-\kappa}\, d\tau. \tag{3.11}$$

Отображение $f \to f^\kappa$ распространяется на распределения следующим образом:

$$\langle T^\kappa, \psi\rangle = \langle T, \psi^{-\kappa}\rangle, \quad T \in \mathcal{D}'(\mathbb{H}^2), \qquad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^2).$$

Обобщая определение класса $\mathcal{D}'_\natural(\mathbb{H}^2)$, полагаем

$$\mathcal{D}'_\kappa(\mathbb{H}^2) = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{H}^2) : T = T^\kappa\}, \qquad \mathcal{E}'_\kappa(\mathbb{H}^2) = (\mathcal{D}'_\kappa \cap \mathcal{E}')(\mathbb{H}^2).$$

Лемма 3.6. *Пусть* $T_1 \vee T_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{H}^2)$, $\kappa \in \mathbb{Z}$. *Тогда*

$$(T_1 \overset{s}{\times} T_2)^\kappa = T_1^\kappa \overset{s}{\times} T_2. \tag{3.12}$$

В частности, если $T_1 \in \mathcal{D}'_\kappa(\mathbb{H}^2)$, $T_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{H}^2)$, *то* $T_1 \overset{s}{\times} T_2 \in \mathcal{D}'_\kappa(\mathbb{H}^2)$.

Доказательство. В силу леммы 3.3 можно считать, что T_1 и T_2 являются функциями. В этом случае имеем

$$(T_1 \overset{s}{\times} T_2)^\kappa(z) = \int_K (T_1 \overset{s}{\times} T_2)(\tau z)\, \tau^{-\kappa}\, d\tau =$$

$$= \int_K \int_G T_1(go) T_2(g^{-1}\tau z)\, e_s(\tau z, go)\, dg\, \tau^{-\kappa} d\tau =$$

$$= \int_K \int_G T_1(\tau h^{-1} o) T_2(hz)\, e_s(\tau z, \tau h^{-1} o)\, dh\, \tau^{-\kappa} d\tau =$$

$$= \int_G T_2(hz) \int_K T_1(\tau h^{-1} o)\, e_s(\tau z, \tau h^{-1} o)\, \tau^{-\kappa} d\tau\, dh =$$

$$= \int\limits_G T_2(hz)\, e_s(z, h^{-1}o) \int\limits_K T_1(\tau h^{-1}o)\, \tau^{-\kappa} d\tau\, dh =$$

$$= \int\limits_G T_1^{\kappa}(h^{-1}o) T_2(hz)\, e_s(z, h^{-1}o)\, dh = (T_1^{\kappa} \overset{s}{\times} T_2)(z),$$

что и требовалось доказать.

4. Квазиинвариантный оператор $\mathfrak{L}_s$. Пусть $\triangle$ — оператор Лапласа на $\mathbb{C}$, Id — тождественный оператор. Положим

$$\mathfrak{L}_s = (1-|z|^2)^2 \triangle - 4s(1-|z|^2)\left(z\frac{\partial}{\partial z} - \overline{z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) - 4s^2|z|^2 \,\mathrm{Id}\,.$$

Лемма 4.1. *Если* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{H}^2)$, $\psi \in C^{\infty}(\mathbb{H}^2)$ *и* $\psi \vee T \in \mathcal{E}'(\mathbb{H}^2)$, *то*

$$\langle \mathfrak{L}_s T, \psi \rangle = \langle T, \mathfrak{L}_{-s} \psi \rangle. \tag{4.1}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{H}^2)$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^2)$. Тогда имеем

$$-\left\langle \frac{\partial T}{\partial z}, z(1-|z|^2)\,\psi \right\rangle =$$

$$= \left\langle T, (1-|z|^2)^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{1-|z|^2}\,\psi(z)\right)\right\rangle = \left\langle T, z(1-|z|^2)\frac{\partial \psi}{\partial z}\right\rangle + \langle T, \psi \rangle\,, \tag{4.2}$$

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial \overline{z}}, \overline{z}(1-|z|^2)\,\psi \right\rangle =$$

$$= -\left\langle T, (1-|z|^2)^2 \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\overline{z}}{1-|z|^2}\,\psi(z)\right)\right\rangle = -\left\langle T, \overline{z}(1-|z|^2)\frac{\partial \psi}{\partial \overline{z}}\right\rangle - \langle T, \psi \rangle\,. \tag{4.3}$$

Кроме того,

$$\left\langle (1-|z|^2)^2 \triangle T, \psi \right\rangle = \left\langle T, (1-|z|^2)^2 \triangle \psi \right\rangle, \tag{4.4}$$

так как $(1-|z|^2)^2\triangle$ совпадает с оператором Лапласа – Бельтрами на $\mathbb{H}^2$ (см. [2], введение). Комбинируя (4.2) – (4.4), получаем (4.1).

Лемма 4.2. *Пусть* $T_1 \vee T_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{H}^2)$. *Тогда*

$$\mathfrak{L}_s(T_1 \overset{s}{\times} T_2) = T_1 \overset{s}{\times} \mathfrak{L}_s T_2, \tag{4.5}$$

$$\mathfrak{L}_s(T_1 \overset{s}{\times} T_2) = (\mathfrak{L}_s T_1) \overset{s}{\times} T_2. \tag{4.6}$$

Доказательство. Оператор $\mathfrak{L}_s$ имеет следующие свойства квазиинвариантности относительно действия группы G :

$$\mathfrak{L}_s(\psi(g^{-1}z)\, e_s(z, go)) = (\mathfrak{L}_s\psi)(g^{-1}z)\, e_s(z, go), \quad \psi \in C^2(\mathbb{H}^2) \tag{4.7}$$

(см. [3], лемма 6). Используя (4.7), (3.6) и лемму 3.3, нетрудно установить равенство (4.5). Аналогично получаем

$$(\mathfrak{L}_s T_1) \overset{s}{\times} T_2 = T_1 \overset{s}{\times} (\mathfrak{L}_{-s} T_2) \tag{4.8}$$

(см. (3.7) и (4.1)). Поскольку $\mathfrak{L}_{-s}T = \mathfrak{L}_s T$ для любого $T \in \mathcal{D}'_{\natural}(\mathbb{H}^2)$, из (3.10), (4.5) и (4.8) имеем

$$\mathfrak{L}_s(T_1 \overset{s}{\times} T_2) = \mathfrak{L}_s(T_1 \overset{s}{\times} T_2^{\natural}) = T_1 \overset{s}{\times} \mathfrak{L}_s(T_2^{\natural}) = T_1 \overset{s}{\times} \mathfrak{L}_{-s}(T_2^{\natural}) = (\mathfrak{L}_s T_1) \overset{s}{\times} T_2^{\natural} = (\mathfrak{L}_s T_1) \overset{s}{\times} T_2.$$

Таким образом, лемма 4.2 доказана.

***Следствие* 4.1.** *Пусть* $\kappa \in \mathbb{Z}$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{H}^2)$. *Тогда*

$$(\mathfrak{L}_s T)^{\kappa} = \mathfrak{L}_s(T^{\kappa}). \tag{4.9}$$

Доказательство. Учитывая (3.3), (3.12) и (4.5), имеем

$$(\mathfrak{L}_s T)^{\kappa} = (\mathfrak{L}_s(T \overset{s}{\times} \delta))^{\kappa} = (T \overset{s}{\times} \mathfrak{L}_s \delta)^{\kappa} = T^{\kappa} \overset{s}{\times} \mathfrak{L}_s \delta = \mathfrak{L}_s(T^{\kappa} \overset{s}{\times} \delta) = \mathfrak{L}_s(T^{\kappa}),$$

что и требовалось доказать.

Обозначим через ρ, φ полярные координаты точки $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Равенство (4.9) показывает, что действие $\mathfrak{L}_s$ на функции вида $h(\rho)\, e^{i\kappa\varphi}$ осуществляется по правилу

$$\mathfrak{L}_s(h(\rho)\, e^{i\kappa\varphi}) = (l_{s,\kappa}\, h)(\rho)\, e^{i\kappa\varphi}, \tag{4.10}$$

где $l_{s,\kappa}$ — некоторый оператор. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}(l_{s,\kappa} h)(\rho) = (1-\rho^2)^2 h''(\rho) + \frac{(1-\rho^2)^2}{\rho} h'(\rho) - \left((2s-\kappa)^2\rho^2 + \frac{\kappa^2}{\rho^2} + 2\kappa(2s-\kappa)\right) h(\rho) = \\ = (d_{\kappa+1}\, D_\kappa h)(\rho) + 4(\kappa^2 + \kappa(1-2s) - s)h(\rho),\end{aligned} \tag{4.11}$$

где

$$\begin{aligned}(D_\kappa h)(\rho) &= \rho^{\kappa}(1-\rho^2)^{s-\kappa+1} \frac{d}{d\rho}\left(\frac{h(\rho)}{\rho^{\kappa}(1-\rho^2)^{s-\kappa}}\right), \\ (d_\kappa h)(\rho) &= \frac{(1-\rho^2)^{\kappa-s+1}}{\rho^{\kappa}} \frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho^{\kappa} h(\rho)}{(1-\rho^2)^{\kappa-s}}\right).\end{aligned} \tag{4.12}$$

Для $0 \le \rho < 1$ положим

$$H^s_{\lambda,\kappa}(\rho) = \rho^{|\kappa|}(1-\rho^2)^{\nu} F\left(\nu + s + \frac{|\kappa|-\kappa}{2},\, \nu - s + \frac{|\kappa|+\kappa}{2};\, |\kappa|+1;\, \rho^2\right). \tag{4.13}$$

Здесь и далее $\lambda \in \mathbb{C}$, $\nu = \nu(\lambda) = \dfrac{1-i\lambda}{2}$ и F — гипергеометрическая функция Гаусса.

Лемма 4.3. *Имеют место равенства*

$$D_\kappa H^s_{\lambda,\kappa} = c_{\kappa,\lambda} H^s_{\lambda,\kappa+1}, \qquad d_\kappa H^s_{\lambda,\kappa} = \gamma_{\kappa,\lambda} H^s_{\lambda,\kappa-1}, \tag{4.14}$$

где

$$c_{\kappa,\lambda} = \begin{cases} \dfrac{2(\nu-s+\kappa)(\nu+s-\kappa-1)}{\kappa+1}, & \kappa \ge 0, \\ -2\kappa, & \kappa < 0, \end{cases}$$

$$\gamma_{\kappa,\lambda} = \begin{cases} 2\kappa, & \kappa > 0, \\ \dfrac{2(\nu + s - \kappa)(1 - \nu + s - \kappa)}{\kappa - 1}, & \kappa \le 0. \end{cases}$$

Доказательство. Обозначим

$$h(t) = t^{\frac{|\kappa|-\kappa}{2}}(1-t)^{\nu+\kappa-s} F\left(\nu + s + \frac{|\kappa|-\kappa}{2},\, \nu - s + \frac{|\kappa|+\kappa}{2};\, |\kappa|+1;\, t\right).$$

Согласно (4.12)

$$D_\kappa H^s_{\lambda,\kappa}(\rho) = 2\,\rho^{\kappa+1}(1-\rho^2)^{s-\kappa+1} h'(\rho^2). \tag{4.15}$$

Используя формулы 2.8(25), 2.8(26) из [7], находим

$$h'(t) = \frac{c_{\kappa,\lambda}}{2}(1-t)^{\nu-s+\kappa-1} F\left(\nu - s + \kappa + 1,\, \nu + s;\, \kappa + 2;\, t\right), \tag{4.16}$$

если $\kappa \ge 0$, и

$$h'(t) = \frac{c_{\kappa,\lambda}}{2} t^{-\kappa-1}(1-t)^{\nu-s+\kappa-1} F\left(\nu + s - \kappa - 1,\, \nu - s;\, -\kappa;\, t\right), \tag{4.17}$$

если $\kappa < 0$. Из (4.15)–(4.17) получаем первое равенство в (4.14). Второе равенство доказывается аналогично.

Следствие 4.2. *Функция $H^s_{\lambda,\kappa}(\rho)\, e^{i\kappa\varphi}$ является собственной функцией оператора $\mathfrak{L}_s$ с собственным значением $-(\lambda^2 + 4s^2 + 1)$.*

Доказательство. В силу (4.14)

$$d_{\kappa+1} D_\kappa\, H^s_{\lambda,\kappa} = 4(\nu + \kappa - s)(\nu + s - \kappa - 1)\, H^s_{\lambda,\kappa}.$$

Отсюда и из (4.10), (4.11) получаем требуемое утверждение.

Лемма 4.4. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$, $r > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда*

$$\max_{|z| \le \operatorname{th} r} \left| \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta} \left(H^s_{\lambda,\kappa}(\rho)\, e^{i\kappa\varphi}\right) \right| \le \frac{c\, e^{r|\operatorname{Im}\lambda|}}{(1+|\lambda|)^{|\kappa|-\alpha-\beta}}, \tag{4.18}$$

где c не зависит от λ.

Доказательство. При $|z| < 1$, $\theta \in \mathbb{R}$ имеем

$$e^{-2\operatorname{arth}|z|} = \frac{1-|z|}{1+|z|} \le \frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\theta}|^2} \le \frac{1+|z|}{1-|z|} = e^{2\operatorname{arth}|z|}.$$

Отсюда

$$\left| \left(\frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\theta}|^2} \right)^\nu \right| = \left(\frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\theta}|^2} \right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{Im}\lambda} \le e^{(1+|\operatorname{Im}\lambda|)\operatorname{arth}|z|}.$$

Из этой оценки и интегрального представления

$$c_{\nu,\kappa,s}\, H^s_{\lambda,\kappa}(|z|) \left(\frac{z}{|z|}\right)^\kappa = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\theta}|^2} \right)^\nu e_s(z, e^{i\theta})\, e^{i\kappa\theta}\, d\theta, \tag{4.19}$$

где

$$c_{\nu,\kappa,s} = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\kappa+\nu-s)}{\kappa!\,\Gamma(\nu-s)}, & \kappa \geq 0, \\ \dfrac{\Gamma(\nu+s-\kappa)}{(-\kappa)!\,\Gamma(\nu+s)}, & \kappa < 0 \end{cases}$$

(см. [8], доказательство теоремы 1), заключаем, что (4.18) выполнено при $\alpha = \beta = 0$. Применяя к (4.19) оператор $\dfrac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta}$ и используя формулу Лейбница, аналогично получаем (4.18) в общем случае.

5. Преобразование $\mathcal{F}_s^\kappa$. Для $T \in \mathcal{E}'_\kappa(\mathbb{H}^2)$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, положим

$$\mathcal{F}_s^\kappa(T)(\lambda) = \langle T, H^s_{\lambda,\kappa}(\rho)\, e^{-i\kappa\varphi}\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{5.1}$$

Из равенства

$$H^s_{\lambda,\kappa}(\rho) =$$

$$= \rho^{|\kappa|}(1-\rho^2)^{\frac{\kappa-|\kappa|}{2}-s} F\left(s + \frac{|\kappa|-\kappa+1-i\lambda}{2},\, s + \frac{|\kappa|-\kappa+1+i\lambda}{2};\, |\kappa|+1;\, \frac{\rho^2}{\rho^2-1}\right)$$

(см. (4.13) и [7], формула 2.9(3)) видно, что $\mathcal{F}_s^\kappa(T)$ является четной целой функцией переменной λ. В случае, когда $T \in (\mathcal{E}'_\kappa \cap L_{\mathrm{loc}})(\mathbb{H}^2)$, имеем

$$\mathcal{F}_s^\kappa(T)(\lambda) = 2\pi \int\limits_0^1 \frac{\rho}{(1-\rho^2)^2}\, \mathfrak{T}(\rho)\, H^s_{\lambda,\kappa}(\rho)\, d\rho,$$

где $\mathfrak{T}(\rho) = T(\rho\, e^{i\varphi})\, e^{-i\kappa\varphi}$.

Лемма 5.1. *Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ имеет место равенство*

$$\mathcal{F}_s^\kappa\left((-1)^\kappa\, \mathfrak{D}_{-\kappa}\, \delta\right)(\lambda) = 1,$$

где

$$\mathfrak{D}_k = \begin{cases} \dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right)^k, & k \geq 0, \\ \dfrac{1}{(-k)!}\left(\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^{-k}, & k < 0. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $T = \mathfrak{D}_{-\kappa}\,\delta$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^2)$. Тогда (см. (3.11) и [8], лемма 1)

$$\langle T^\kappa, \psi\rangle = \langle T, \psi^{-\kappa}\rangle = (-1)^\kappa \left\langle \delta, \frac{(1-|z|^2)^2}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mathfrak{D}_{-\kappa}\left(\frac{\psi(z\, e^{-i\alpha})}{(1-|z|^2)^2}\right)(0)\, e^{-i\kappa\alpha}\, d\alpha \right\rangle =$$

$$= \frac{(-1)^\kappa}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mathfrak{D}_{-\kappa}\left(\psi(z\, e^{-i\alpha})\right)(0)\, e^{-i\kappa\alpha}\, d\alpha = (-1)^\kappa (\mathfrak{D}_{-\kappa}\,\psi)(0).$$

Те же преобразования показывают, что $\langle T, \psi\rangle = (-1)^\kappa(\mathfrak{D}_{-\kappa}\,\psi)(0)$, т. е. $T = T^\kappa$ и $T \in \mathcal{E}'_\kappa(\mathbb{H}^2)$. Далее, если $\kappa \geq 0$, то

$$\mathcal{F}_s^{\kappa}\big((-1)^{\kappa}\,\mathfrak{D}_{-\kappa}\,\delta\big)(\lambda)=\frac{(-1)^{\kappa}}{\kappa!}\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\right)^{\kappa}\delta,(1-|z|^2)^{\nu}F(\nu+s,\,\nu-s+\kappa;\,\kappa+1;\,|z|^2)\,\overline{z}^{\,\kappa}\right\rangle=$$

$$=\frac{1}{\kappa!}\left\langle\delta,(1-|z|^2)^2\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\right)^{\kappa}(\overline{z}^{\,\kappa}(1-|z|^2)^{\nu-2}F(\nu+s,\,\nu-s+\kappa;\,\kappa+1;\,|z|^2))\right\rangle=$$

$$=\frac{1}{\kappa!}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\right)^{\kappa}(\overline{z}^{\,\kappa}(1-|z|^2)^{\nu-2}F(\nu+s,\,\nu-s+\kappa;\,\kappa+1;\,|z|^2))(0).$$

Теперь согласно лемме 1 из [8]

$$\mathcal{F}_s^{\kappa}\left((-1)^{\kappa}\,\mathfrak{D}_{-\kappa}\,\delta\right)(\lambda)=\mathfrak{D}_{-\kappa}(\overline{z}^{\,\kappa})(0)=1,$$

что доказывает лемму при $\kappa\geq 0$. Случай $\kappa<0$ рассматривается аналогично.

Лемма 5.2. *Пусть* $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{H}^2)$, $T\in\mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{H}^2)$ *и* $\mathfrak{L}_s f=-(\lambda^2+4s^2+1)f$ *при некотором* $\lambda\in\mathbb{C}$. *Тогда*

$$f\overset{s}{\times}T=\mathcal{F}_s^{\,0}(T)(\lambda)f. \tag{5.2}$$

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{L}_s$ является эллиптическим оператором, распределение f является вещественно-аналитической функцией на $\mathbb{H}^2$ (см. [9], гл. 8.6). Тогда по лемме 3.4

$$(f\overset{s}{\times}T)(go)=\langle T(z),f(gz)\,e_s(z,g^{-1}o)\rangle,\quad g\in G.$$

Теперь (5.2) следует из теоремы 1 [3].

Лемма 5.3. *Пусть* $f\in\mathcal{E}'_{\kappa}(\mathbb{H}^2)$, $T\in\mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{H}^2)$. *Тогда*

$$\mathcal{F}_s^{\kappa}(f\overset{s}{\times}T)=\mathcal{F}_s^{\kappa}(f)\,\mathcal{F}_s^{\,0}(T). \tag{5.3}$$

В частности,

$$\mathcal{F}_s^{\kappa}(p(\mathfrak{L}_s)f)(\lambda)=p(-\lambda^2-s^2-1)\mathcal{F}_s^{\kappa}(f)(\lambda) \tag{5.4}$$

для любого алгебраического многочлена p.

Доказательство. Прежде всего отметим, что $f\overset{s}{\times}T\in\mathcal{E}'_{\kappa}(\mathbb{H}^2)$ (см. лемму 3.6). Далее, по лемме 3.5 (iii)

$$\mathcal{F}_s^{\kappa}(f\overset{s}{\times}T)(\lambda)=\langle f\overset{s}{\times}T,H^s_{\lambda,\kappa}(\rho)\,e^{-i\kappa\varphi}\rangle=\langle f,(H^s_{\lambda,\kappa}(\rho)\,e^{-i\kappa\varphi})\overset{-s}{\times}T\rangle. \tag{5.5}$$

Учитывая, что $H^s_{\lambda,\kappa}=H^{-s}_{\lambda,-\kappa}$, из следствия 4.2, леммы 5.2 и (5.5) имеем

$$\mathcal{F}_s^{\kappa}(f\overset{s}{\times}T)(\lambda)=\langle f,\mathcal{F}^{\,0}_{-s}(T)(\lambda)\,H^s_{\lambda,\kappa}(\rho)\,e^{-i\kappa\varphi}\rangle=\mathcal{F}_s^{\kappa}(f)(\lambda)\,\mathcal{F}^{\,0}_{-s}(T)(\lambda).$$

Для доказательства (5.3) осталось заметить, что

$$\mathcal{F}^{\,0}_{-s}(T)(\lambda)=\langle T,H^{-s}_{\lambda,0}\rangle=\langle T,H^s_{\lambda,0}\rangle=\mathcal{F}^{\,0}_{s}(T)(\lambda).$$

Полагая в (5.3) $T=p(\mathfrak{L}_s)\,\delta$ и используя (4.1), (4.5) и следствие 4.2, получаем (5.4).

Лемма 5.4. *Преобразование* $\mathcal{F}_s^{\kappa}$ *является инъективным на* $\mathcal{E}'_{\kappa}(\mathbb{H}^2)$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{E}'_\kappa(\mathbb{H}^2)$ и $\mathcal{F}^\kappa_s(f) = 0$. В силу леммы 5.3 для любой функции $\psi \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)$ имеем $\mathcal{F}^\kappa_s(f \overset{s}{\times} \psi) = 0$. Записывая $f \overset{s}{\times} \psi$ в виде $(f \overset{s}{\times} \psi)(z) = u(\rho)\, e^{i\kappa\varphi}$ (см. лемму 3.6) и используя интегральное представление

$$H^s_{\lambda,\kappa}(\mathrm{th}t) = \frac{2^{\,3/2}\Gamma(|\kappa|+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(|\kappa|+\frac{1}{2})}\frac{1}{(\mathrm{sh}2t)^{|\kappa|}}\int\limits_0^t \cos(\lambda\,\xi)(\mathrm{ch}2t - \mathrm{ch}2\xi)^{|\kappa|-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times F\left(2s+|\kappa|-\kappa,\ |\kappa|+\kappa-2s;\ |\kappa|+\frac{1}{2};\ \frac{\mathrm{ch}t-\mathrm{ch}\xi}{2\mathrm{ch}t}\right) d\xi \tag{5.6}$$

(см. [5], предложение 7.3), получаем

$$\int\limits_0^\infty \cos(\lambda\,\xi) \int\limits_\xi^\infty \frac{u(\mathrm{th}t)}{(\mathrm{sh}2t)^{|\kappa|-1}}(\mathrm{ch}2t-\mathrm{ch}2\xi)^{|\kappa|-\frac{1}{2}}\, F_{\kappa,s}\left(\frac{\mathrm{ch}t-\mathrm{ch}\xi}{2\mathrm{ch}t}\right) dt\, d\xi = 0, \tag{5.7}$$

где $F_{\kappa,s}$ — гипергеометрическая функция из (5.6). Отсюда

$$\int\limits_\xi^\infty \frac{u(\mathrm{th}t)}{(\mathrm{sh}2t)^{|\kappa|-1}}(\mathrm{ch}2t-\mathrm{ch}2\xi)^{|\kappa|-\frac{1}{2}}\, F_{\kappa,s}\left(\frac{\mathrm{ch}t-\mathrm{ch}\xi}{2\mathrm{ch}t}\right) dt = 0, \quad \xi > 0.$$

После замены $\mathrm{ch}t = y$ это уравнение преобразуется к виду

$$\int\limits_x^\infty u\left(\frac{\sqrt{y^2-1}}{y}\right)\frac{y^{|\kappa|}}{(y^2-1)^{|\kappa|/2}}\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)^{|\kappa|-\frac{1}{2}} F_{\kappa,s}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{2y}\right) dy = 0, \quad x > 1.$$

Полагая $g_1(y) = u\left(\frac{\sqrt{y^2-1}}{y}\right)\frac{y^{|\kappa|}}{(y^2-1)^{|\kappa|/2}}$, $g_2(\eta) = (1-\eta^2)^{|\kappa|-\frac{1}{2}}\, F_{\kappa,s}\left(\frac{1}{2}-\frac{\eta}{2}\right)$, $G_1(\xi) = g_1(e^\xi)\, e^\xi$, $G_2(\xi) = g_2(e^{-\xi})$, приходим к уравнению свертки

$$\int\limits_t^\infty G_1(\xi)\, G_2(\xi-t)\, d\xi = 0, \quad t > 0,$$

решением которого является нулевая функция (см. [5], следствие 6.1). Таким образом, $f \overset{s}{\times} \psi = 0$. Теперь, аппроксимируя функциями ψ дельта-функцию в нуле, из (3.3) и леммы 3.3 заключаем, что $f = 0$.

Лемма 5.4 доказана.

Для $r > 0$ положим

$$\mathrm{B}_r = \{z \in \mathbb{D} \colon |z| < \mathrm{th}r\}, \qquad \overline{\mathrm{B}}_r = \{z \in \mathbb{D} : |z| \le \mathrm{th}r\}.$$

Следующий результат является аналогом известной теоремы Винера – Пэли – Шварца для классического преобразования Фурье [9] (теорема 7.3.1).

Теорема 5.1. *Для того чтобы четная целая функция w была преобразованием $\mathcal{F}_s^{\kappa}$ от распределения из $\mathcal{E}'_{\kappa}(\mathbb{H}^2)$ с носителем в $\overline{\mathrm{B}}_r$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторых констант C_1 и C_2 имело место неравенство*

$$|w(\lambda)| \leq C_1\,(1+|\lambda|)^{C_2}\,e^{r|\mathrm{Im}\lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{5.8}$$

Доказательство. *Необходимость*. Пусть $w = \mathcal{F}_s^{\kappa}(T)$, где $T \in \mathcal{E}'_{\kappa}(\mathbb{H}^2)$ и $\operatorname{supp} T \subset \overline{\mathrm{B}}_r$. Поскольку $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{H}^2)$, существуют такие константы C и N, что

$$|\langle T, \psi\rangle| \leq C \sum_{\alpha+\beta\leq N} \sup_{z\in\mathbb{D}} \left|\frac{\partial^{\,\alpha+\beta}\psi}{\partial z^{\alpha}\partial\overline{z}^{\beta}}\right|, \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^2). \tag{5.9}$$

Возьмем функцию $h \in C^{\infty}(\mathbb{R}^1)$, которая равна 1 на $(-\infty, 1/2)$ и 0 на $(1,\infty)$. Тогда функция

$$\psi_{\lambda}(z) = H^{s}_{\lambda,\kappa}(\rho)\,e^{-i\kappa\varphi}\,h(|\lambda|(\mathrm{arth}\rho - r))$$

принадлежит $\mathcal{D}(\mathbb{H}^2)$ и совпадает с $H^{s}_{\lambda,\kappa}(\rho)\,e^{-i\kappa\varphi}$ в некоторой окрестности круга $\overline{\mathrm{B}}_r$. Отсюда и из (5.1), (5.9) имеем

$$|w(\lambda)| = |\langle T, \psi_{\lambda}\rangle| \leq C \sum_{\alpha+\beta\leq N} \sup_{z\in \mathrm{B}_{r+\frac{1}{|\lambda|}}} \left|\frac{\partial^{\,\alpha+\beta}\psi_{\lambda}}{\partial z^{\alpha}\partial\overline{z}^{\beta}}\right|.$$

Теперь определение функции ψ_{λ} и доказательство леммы 4.4 показывают, что w удовлетворяет (5.8).

Достаточность.Если w имеет конечное число нулей, то в силу условия (5.8) и теоремы Адамара о факторизации (см. [10], гл.1, § 3, п. 8) $w(\lambda) = p(-\lambda^2 - s^2 - 1)$ для некоторого многочлена p. Тогда согласно леммам 5.1 и 5.3

$$w = \mathcal{F}_s^{\kappa}((-1)^{\kappa}\,p(\mathfrak{L}_s)\,\mathfrak{D}_{-\kappa}\delta),$$

что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что w имеет бесконечно много нулей. Положим

$$W(\lambda) = \frac{w(\lambda)}{q(-\lambda^2 - s^2 - 1)},$$

где многочлен q выбран таким образом, чтобы функция W была целой и

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} |W(\lambda)|\,(1+|\lambda|)^2\,e^{-r|\mathrm{Im}\lambda|} < \infty.$$

По теореме Винера – Пэли для косинус-преобразования Фурье существует четная функция $\varphi \in$ $\in C(\mathbb{R}^1)$ такая, что $\operatorname{supp}\varphi \in [-r, r]$ и

$$W(\lambda) = \int\limits_0^r \varphi(t)\cos(\lambda\,t)\,dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Обозначим через Φ непрерывное решение уравнения

$$\int_y^\infty \frac{\Phi(x)}{\sqrt{x-y}} F_{0,s}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+y}{1+x}}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi\left(\operatorname{arch}\sqrt{\frac{1+y}{2}}\right), \quad y \geq 1,$$

где $F_{0,s}$ определено в (5.7) (см., например, [11], гл. 3, § 4, теорема 4.6). Полагая $y = \mathrm{ch}2\xi$ и выполняя в интеграле замену переменной $x = \mathrm{ch}2t$, имеем

$$2^{3/2}\int_\xi^\infty \frac{f_0(\mathrm{th}t)\,\mathrm{sh}(2t)}{\sqrt{\mathrm{ch}2t-\mathrm{ch}2\xi}} F_{0,s}\left(\frac{\mathrm{ch}t-\mathrm{ch}\xi}{2\mathrm{ch}t}\right) dt = \varphi(\xi), \quad \xi \geq 0,$$

где $f_0(\mathrm{th}t) = \Phi(\mathrm{ch}2t)$. Отсюда и из (5.6) следует, что носитель функции $f(z) = f_0(|z|)$ содержится в $\overline{B}_r$ и $\mathcal{F}_s^0 f = W$. Используя теперь леммы 5.1 и 5.3, получаем

$$\mathcal{F}_s^\kappa((-1)^\kappa\,\mathfrak{D}_{-\kappa}\delta \overset{s}{\times} q(\mathfrak{L}_s)f) = w,$$

что и завершает доказательство теоремы 5.1.

Литература

1. *Постников М. М.* Гладкие многообразия. – М.: Наука, 1987. – 478 с.
2. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987. – 735 с.
3. *Трипольская Н. А., Волчков Вит. В.* Об одном обобщении теоремы о среднем // Труды Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2012. – **24**. – С. 225 – 233.
4. *Volchkov V. V.* Integral geometry and convolution equations. – Dordrecht: Klüwer, 2003. – 454 p.
5. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. – London: Springer, 2009. – 671 p.
6. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Offbeat integral geometry on symmetric spaces. – Basel: Birkhäuser, 2013. – 592 p.
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1973. – Т. 1. – 294 с.
8. *Василянская В. С., Волчков Вит. В.* Интегралы типа Эйзенштейна на сфере и их обобщения // Труды Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2012. – **25**. – С. 42 – 49.
9. *Hörmander L.* The analysis of linear partial differential operators. – New York: Springer, 1983. – Vols 1, 2.
10. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – 175 с.
11. *Helgason S.* Integral geometry and Radon transforms. – New York: Springer, 2010. – 301 p.

Получено 10.10.13,
после доработки — 18.01.16