УДК 519.21

**А. В. Нікітін** (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка),
**У. Т. Хімка** (Нац. ун-т „Львів. політехніка”)

# АСИМПТОТИКА НОРМОВАНОГО КЕРУВАННЯ З МАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕМИКАННЯМИ

We study the process of transfer of Markov perturbations and control over this process under the condition of existence of the equilibrium point of the quality criterion. For this control, we construct a normalized process and establish its asymptotic normality in the form of the Ornstein – Uhlenbeck process in the case where the transfer process changes under the influence of Markov switchings along a new trajectory of evolution from the state in which it was at the time of switching.

Рассмотрен процесс переноса с марковскими возмущениями и управления для него в условиях существования точки равновесия критерия качества. Для такого управления построен нормированный процесс и установлена его асимптотическая нормальность в виде процесса Орнштейна – Уленбека в случае, когда процесс переноса меняется под влиянием марковского переключения по траектории новой эволюции из состояния, в котором она была в момент переключения.

**Вступ.** Для процесу переносу, що описується стохастичним диференціальним рівнянням [1] із дифузійним процесом керування, отримано умови існування такого керування [2]. Частковим є випадок існування точки рівноваги критерію якості керування, який зустрічається в багатьох прикладних задачах [3, 4]. Для такого керування можна розглянути процедуру стохастичної апроксимації, яка визначає умови збіжності до точки рівноваги критерію якості [3]. Окремою задачею в цьому випадку є встановлення закону розподілу граничного нормованого процесу керування в умовах збіжності побудованої п роцедури [4, 5]. При цьому нові результати застосування малого параметра та розв’язку проблеми сингулярного збурення [6] дозволили встановити асимптотичну нормальність процедури стохастичної апроксимації з марковськими збуреннями [7] та напівмарковськими перемиканнями [8], з відповідним нормуванням як за часом, так і за малим параметром $\varepsilon > 0$.

У цій роботі розглянуто процес переносу з марковськими збуреннями та керування для нього в умовах існування точки рівноваги критерію якості з марковськими перемиканнями [6]. Для керування побудовано нормований процес та встановлено асимптотичну нормальність такого процесу у вигляді процесу Орнштейна – Уленбека.

Тут будемо розглядати випадок, коли процес переносу, як випадкова еволюція, змінюється під впливом марковського перемикання по траєкторії нової еволюції з стану, в якому вона перебувала в момент перемикання, як початкового [6].

**Постановка задачі.** Нехай процес переносу $y^{\varepsilon}(t) \in \mathrm{R}^d$ визначається стохастичним диференціальним рівнянням

$$dy^{\varepsilon}(t) = a\left( y^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon^2)\right) dt + \sigma\left( y^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon^2), u^{\varepsilon}(t)\right) dw(t), \tag{1}$$

де $x(t)$, $t > 0$, – рівномірно ергодичний марковський процес у вимірному фазовому просторі станів $(X, \boldsymbol{X})$, визначений генератором [6]

$$\boldsymbol{Q}\varphi(x) = q(x)\int_X P(x,dy)[\varphi(y) - \varphi(x)]$$

на банаховому просторі $B(X)$ дійснозначних обмежених функцій $\varphi(x)$ з супремум-нормою

$$\|\varphi(x)\| = \sup_{x\in X} |\varphi(x)|\,.$$

Генератор $\boldsymbol{Q}$ є зведено-оборотним на $B(X)$ з проектором

$$\Pi\varphi(x) := \int_X \pi(dx)\varphi(x)\,,$$

де $\pi(B)$, $B \in \boldsymbol{X}$, — стаціонарний розподіл марковського процесу $x(t)$, $t \geq 0$, який визначається із співвідношення

$$\pi(dx)q(x) = qp(dx)\,, \qquad q = \int_X \pi(dx)q(x)$$

($\rho(dx)$ — стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга Маркова $x_n$, $n \geq 0$) і потенціалом $\mathbf{R}_0$, що має операторне зображення

$$\mathbf{R}_0 = \Pi - [\mathbf{Q} + \Pi]^{-1}\,.$$

Функції $a(y,x) = (a_k(y,x), k = \overline{1,d})$, $\sigma(y,x,u) = (\sigma_k(y,x,u), k = \overline{1,d})$, $y \in \mathrm{R}^d$, $x \in X$, задовольняють умови існування глобального розв'язку еволюційних рівнянь

$$dy_x(t) = a(y_x(t),x)dt + \sigma(y_x(t),x,u_x(t))dw(t)\,, \quad x \in X\,,$$

для к ожного ф іксованого значення $x$ марковського процесу $x(t)$, $t \geq 0$, на інтервалі $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ перебування процесу $x(t)$, $t \geq 0$, у стані $x \in X$.

Нехай у загальному зображенні (1) керування $u(t)$ визначається умовою

$$du^\varepsilon(t) = \alpha(t)\, G\big(y^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2), u^\varepsilon(t)\big)\, dt\,, \tag{2}$$

де умови на функцію $\alpha(t)$ мають вигляд

$$\int_0^\infty \alpha(t)\,dt = \infty\,, \qquad \int_0^\infty \alpha^2(t)\,dt < \infty\,. \tag{3}$$

Зокрема, умови (3) виконуються при $\alpha(t) = \dfrac{\alpha}{t}$, що буде розглядатись далі.

Зазначимо [3, 7, 8], що умови (3) забезпечують збіжність керування $u^\varepsilon(t)$ до точки рівноваги критерію якості керування, тобто до точки $u^*$, що визначається з умови

$$G(y,u^*)=0\,, \qquad G(y,u)=\int\limits_X \pi(dx)G(y,x,u)\,.$$

Нормоване керування має вигляд

$$v^\varepsilon(t)=\frac{\sqrt{t}}{\varepsilon}u^\varepsilon(t)\,, \tag{4}$$

а умова балансу

$$\Pi G(y,x,0)=\int\limits_X \pi(dx)G(y,x,0)=0\,. \tag{5}$$

**Теорема.** *При умовах збіжності* (3) *задачі* (1), (2) *та додаткових умовах*

D$_1$) $\hat\sigma_v^2(y)=2\int_X \pi(dx)\,G(y,x,0)\,\mathbf{R}_0 G(y,x,0)>0$,

D$_2$) $\alpha g(y)<-\dfrac{1}{2}$, $\quad g(y)=\int_X \pi(dx)\,G'_V(y,x,0)$,

*має місце слабка збіжність*

$$v^\varepsilon(t)\Rightarrow\zeta(t)\,, \qquad \varepsilon\to 0\,,$$

*у кожному скінченному інтервалі* $(0<t_0<t<T)$.

*Граничний процес* $\zeta(t)$, $t>0$, *є процесом Орнштейна – Уленбека, що визначається генератором*

$$\mathbf{L}_v\varphi(y,v)=v\left(\alpha g(y)+\frac{1}{2}\right)\varphi'_v(y,v)+\frac{1}{2}\alpha^2\hat\sigma_v^2(y)\,\varphi''_{vv}(y,v)\,.$$

Встановимо кілька допоміжних властивостей процесу переносу $y^\varepsilon(t)$ та нормованого керування $v^\varepsilon(t)$.

**Лема 1.** *Процеси* $y^\varepsilon(t)$ *та* $v^\varepsilon(t)$ *є розв'язками стохастичних диференціальних рівнянь*

$$dy^\varepsilon(t)=a(y^\varepsilon(t),x_t^\varepsilon)dt+\sigma\left(y^\varepsilon(t),x_t^\varepsilon,\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}v^\varepsilon(t)\right)dw(t)\,, \tag{6}$$

$$dv^\varepsilon(t)=\varepsilon^{-1}\frac{\alpha}{\sqrt{t}}G\left(y^\varepsilon(t),x_t^\varepsilon,\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}v^\varepsilon(t)\right)dt+\frac{v^\varepsilon(t)}{2t}dt\,, \tag{7}$$

*де*

$$x_t^\varepsilon:=x(t/\varepsilon^2)\,.$$

***Доведення.*** З формули (4) маємо

$$u^{\varepsilon}(t) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{t}} v^{\varepsilon}(t).$$

Тому, враховуючи (2), отримуємо (5) та (6).

**Лема 2.** *Генератор трикомпонентного марковського процесу*

$$y_t^{\varepsilon} := y^{\varepsilon}(t), \quad x_t^{\varepsilon} := x(t/\varepsilon^2), \quad u_t^{\varepsilon} := u^{\varepsilon}(t), \quad t \geq t_0 > 0, \tag{8}$$

*має вигляд*

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}(x)\,\varphi(y,x,v) = \varepsilon^{-2}\boldsymbol{Q}\,\varphi(y,x,v) + \boldsymbol{V}_t^{\varepsilon}(x)\,\varphi(y,x,v), \tag{9}$$

*де*

$$\boldsymbol{V}_t^{\varepsilon}(x)\,\varphi(y,x,v) = \left[\varepsilon^{-1}\frac{\alpha}{\sqrt{t}}\,G\left(y,x,\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}v\right) + \frac{v}{2t}\right]\varphi'_v(y,x,v) +$$

$$+\ \varphi'_y(y,x,v)\,a(y,x) + \frac{1}{2}\varphi''_{yy}(y,x,v)\,\sigma^2\left(y,x,\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}v\right).$$

***Доведення.*** Для побудови генератора процесу (8) обчислимо умовне математичне сподівання

$$E\left[\varphi(y_{t+\Delta}^{\varepsilon}, x_{t+\Delta}^{\varepsilon}, v_{t+\Delta}^{\varepsilon}) - \varphi(y,x,v)\Big|_{y^{\varepsilon}(t)=y,\ x_t^{\varepsilon}=x,\ v^{\varepsilon}(t)=v}\right] =$$

$$= E_{y,x,v}\left[\varphi(y+\Delta y^{\varepsilon}, x_{t+\Delta}^{\varepsilon}, v+\Delta v^{\varepsilon}) - \varphi(y,x,v)\right] =$$

$$= E_{y,x,v}\left[\varphi(y+\Delta y^{\varepsilon}, x, v+\Delta v^{\varepsilon}) - \varphi(y,x,v)\right] I(\theta > \varepsilon^{-2}\Delta)\ +$$

$$+\ E_{y,x,v}\left[\varphi(y+\Delta y^{\varepsilon}, x_{t+\Delta}^{\varepsilon}, v+\Delta v^{\varepsilon}) - \varphi(y,x,v)\right] I(\theta < \varepsilon^{-2}\Delta), \tag{10}$$

де $\theta$ — час перебування марковського процесу $x(t)$, $t > 0$, у стані $x$.

Врахуємо далі зображення

$$I(\theta \geq \varepsilon^{-2}\Delta) = 1 - \varepsilon^{-2}q(x)\Delta + o(\Delta),$$

$$I(\theta < \varepsilon^{-2}\Delta) = \varepsilon^{-2}q(x)\Delta + o(\Delta).$$

З рівняння (6) маємо

$$y_{t+\Delta}^{\varepsilon} = y + \Delta y^{\varepsilon} = y + \int_t^{t+\Delta} a(y^{\varepsilon}(s), x_s^{\varepsilon})\,ds\ +$$

$$+\int_t^{t+\Delta}\sigma\left(y^{\varepsilon}(s),x_s^{\varepsilon},\frac{\varepsilon}{\sqrt{s}}v^{\varepsilon}(s)\right)dw(s)=\bar{y}+\int_t^{t+\Delta}\sigma\left(y^{\varepsilon}(s),x_s^{\varepsilon},\frac{\varepsilon}{\sqrt{s}}v^{\varepsilon}(s)\right)dw(s),$$

де

$$\bar{y}=y+\int_t^{t+\Delta}a(y^{\varepsilon}(s),x_s^{\varepsilon})ds.$$

Розглянемо

$$\varphi(y+\Delta y^{\varepsilon},x,v+\Delta v^{\varepsilon})=\varphi\left(\bar{y}+\int_t^{t+\Delta}\sigma\left(y^{\varepsilon}(s),x_s^{\varepsilon},\frac{\varepsilon}{\sqrt{s}}v^{\varepsilon}(s)\right)dw(s),x,v+\Delta v^{\varepsilon}\right)=$$

$$=\varphi(\bar{y},x,v+\Delta v^{\varepsilon})+\varphi'_y(\bar{y},x,v+\Delta v^{\varepsilon})\int_t^{t+\Delta}\sigma\left(y^{\varepsilon}(s),x_s^{\varepsilon},\frac{\varepsilon}{\sqrt{s}}v^{\varepsilon}(s)\right)dw(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\varphi''_{yy}(\bar{y},x,v+\Delta v^{\varepsilon})\left[\int_t^{t+\Delta}\sigma\left(y^{\varepsilon}(s),x_s^{\varepsilon},\frac{\varepsilon}{\sqrt{s}}v^{\varepsilon}(s)\right)dw(s)\right]^2+o(\Delta).$$

Враховуючи (7), маємо

$$\varphi'_y(\bar{y},x,v+\Delta v^{\varepsilon})=\varphi'_y(\bar{y},x,v)+$$

$$+\varphi''_{yv}(\bar{y},x,v)\left[\varepsilon^{-1}\frac{\alpha}{\sqrt{t}}G(y,x,v)+\frac{v}{t}\right]\Delta+o(\Delta),$$

а також

$$\varphi(\bar{y},x,v+\Delta v^{\varepsilon})=\varphi(y,x,v+\Delta v^{\varepsilon})+$$

$$+\varphi'_y(y,x,v+\Delta v^{\varepsilon})a(y,x)\Delta+o(\Delta)=$$

$$=\varphi(y,x,v)+\varphi'_v(y,x,v)\left[\varepsilon^{-1}\frac{\alpha}{\sqrt{t}}G(y,x,v)+\frac{v}{t}\right]\Delta+$$

$$+\varphi'_y(y,x,v)a(y,x)\Delta+o(\Delta).$$

Аналогічно отримуємо

$$\varphi'_y(\bar{y},x,v+\Delta v^{\varepsilon})=\varphi'_y(y,x,v)+$$

$$+\varphi''_{yv}(y,x,v)\left[\varepsilon^{-1}\frac{\alpha}{\sqrt{t}}G(y,x,v)+\frac{v}{t}\right]\Delta+$$

$$+\ \varphi''_{yy}(y,x,v)a(y,x)\Delta+o(\Delta)$$

і

$$\varphi''_{yv}(\overline{y},x,v+\Delta v^{\varepsilon})=\varphi''_{yy}(y,x,v)\ +$$

$$+\ \varphi'''_{yyv}(y,x,v)\left[\varepsilon^{-1}\frac{\alpha}{\sqrt{t}}G\left(y,x,\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}u\right)+\frac{v}{t}\right]\Delta\ +$$

$$+\ \varphi^{IV}_{yyyy}(y,x,v)a(y,x)\Delta+o(\Delta)\,.$$

Враховуючи останнє, маємо

$$\varphi(y+\Delta y^{\varepsilon},x,v+\Delta v^{\varepsilon})=\varphi(y,x,v)+\varphi'_{v}(y,x,v)\left[\varepsilon^{-1}\frac{\alpha}{\sqrt{t}}G\left(y,x,\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}v\right)+\frac{v}{2t}\right]\Delta\ +$$

$$+\ \varphi'_{y}(y,x,v)\,a(y,x)\Delta\ +$$

$$+\left[\varphi'_{y}(y,x,v)+\varphi''_{yv}(y,x,v)\left[\varepsilon^{-1}\frac{\alpha}{\sqrt{t}}G\left(y,x,\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}v\right)+\frac{v}{t}\right]\Delta\ +\right.$$

$$\left.+\ \varphi''_{yy}(y,x,v)a(y,x)\Delta\right]\int_{t}^{t+\Delta}\sigma\left(y^{\varepsilon}(s),x^{\varepsilon}_{s},\frac{\varepsilon}{\sqrt{s}}v^{\varepsilon}(s)\right)dw(s)\ +$$

$$+\ \frac{1}{2}\left[\varphi''_{yy}(y,x,v)+\varphi'''_{yyv}(y,x,v)\left[\varepsilon^{-1}\frac{\alpha}{\sqrt{t}}G\left(y,x,\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}v\right)+\frac{v}{2t}\right]\Delta\ +\right.$$

$$\left.+\ \varphi^{IV}_{yyyy}(y,x,v)a(y,x)\Delta\right]\left[\int_{t}^{t+\Delta}\sigma\left(y^{\varepsilon}(s),x^{\varepsilon}_{s},\frac{\varepsilon}{\sqrt{s}}v^{\varepsilon}(s)\right)dw(s)\right]^{2}+o(\Delta)\,.$$

Це дає можливість для першого доданка з (10) отримати

$$E_{y,x,v}[\varphi(y+\Delta y^{\varepsilon},x,v+\Delta v^{\varepsilon})-\varphi(y,x,v)](1-\varepsilon^{-2}q(x)\Delta+o(\Delta))=$$

$$=\varphi'_{v}(y,x,v)\left[\varepsilon^{-1}\frac{\alpha}{\sqrt{t}}G\left(y,x,\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}v\right)+\frac{v}{t}\right]\Delta\ +$$

$$+\ \varphi'_{y}(y,x,v)a(y,x)\Delta+\frac{1}{2}\varphi''_{yy}(y,x,v)\sigma^{2}\left(y,x,\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}v\right)\Delta+o(\Delta)\,.$$

Аналогічно для другого доданка з (10) одержуємо

$$E_{y,x,v}\Big[\varphi\Big(y+\Delta y^{\varepsilon}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}, v+\Delta v^{\varepsilon}\Big)-\varphi(y,x,v)\Big]\Big[\varepsilon^{-2}q(x)\Delta+o(\Delta)\Big] =$$

$$= \varepsilon^{-2}q(x)E_{y,x,v}\Big[\varphi(y, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}, v)-\varphi(y,x,v)\Big]+o(\Delta)\,.$$

Таким чином, для генератора процесу (8), згідно з означенням, маємо

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_t(x)\varphi(y,x,v) := \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{y,x,v}\Big[\varphi\Big(y+\Delta y^{\varepsilon}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}, v+\Delta v^{\varepsilon}\Big)-\varphi(y,x,v)\Big] =$$

$$= \varepsilon^{-2}\boldsymbol{Q}\varphi(y,x,v)+\boldsymbol{V}^{\varepsilon}_t(x)\varphi(y,x,v)\,,$$

де

$$\boldsymbol{V}^{\varepsilon}_t(x)\,\varphi(y,x,v) = \varphi'_v(y,x,v)\left[\varepsilon^{-1}\frac{\alpha}{\sqrt{t}}G\left(y,x,\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}v\right)+\frac{v}{2t}\right] +$$

$$+\ \varphi'_y(y,x,v)a(y,x)+\frac{1}{2}\varphi''_{yy}(y,x,v)\sigma^2\left(y,x,\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}v\right).$$

**Лема 3.** *Генератор* $\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_t(x)$ *на тест-функціях* $\varphi(y,x,v)\in C^{3,0,3}(R,X,R)$ *має асимптотичне зображення*

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_t(x)\varphi(y,x,v) = \varepsilon^{-2}\boldsymbol{Q}\varphi(y,x,v)+\varepsilon^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}}\boldsymbol{G}_0(y,x)\varphi(y,x,v)\ +$$

$$+\ \frac{1}{t}\boldsymbol{V}(y,x)\varphi(y,x,v)+\boldsymbol{A}(y,x)\varphi(y,x,v)+o(\varepsilon)\,, \tag{11}$$

*де*

$$\boldsymbol{G}_0(y,x)\varphi(y,x,v) = \alpha G(y,x,0)\varphi'_v(y,x,v)\,,$$

$$\boldsymbol{V}(y,x)\varphi(y,x,v) = v\left(\alpha G'_v(y,x,0)+\frac{1}{2}\right)\varphi'_v(y,x,v)\,,$$

$$\boldsymbol{A}(y,x)\varphi(y,x,v) = a(y,x)\varphi'_y(y,x,v)+\frac{1}{2}\sigma^2(y,x,0)\varphi''_{yy}(y,x,v)\,.$$

***Доведення.*** Враховуючи розклади

$$G\left(y,x,\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}v\right) = G(y,x,0)+G'_v(y,x,0)\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}v+o(\varepsilon)\,,$$

$$\sigma^2\left(y,x,\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}v\right) = \sigma^2(y,x,0)+o(\varepsilon)\,,$$

з (9) отримуємо (11).

Розглянемо збурену тест-функцію

$$\varphi_t^\varepsilon(y,x,v)=\varphi(y,v)+\varepsilon\frac{1}{\sqrt{t}}\varphi_1(y,x,v)+\varepsilon^2\frac{1}{t}\varphi(y,x,v).$$

**Лема 4.** *Розв'язок проблеми сингулярного збурення для зрізаного генератора*

$$\boldsymbol{L}_{t_0}^\varepsilon(x)\varphi(y,x,v)=\varepsilon^{-2}\boldsymbol{Q}\varphi(y,x,v)+\varepsilon^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}}\boldsymbol{G}_0(y,x)\varphi(y,x,v)\ +$$

$$+\ \frac{1}{t}\boldsymbol{V}(y,x)\varphi(y,x,v)+\boldsymbol{A}(y,x)\varphi(y,x,v) \tag{12}$$

*на тест-функціях* $\varphi_t^\varepsilon(y,x,v)$ *з* $\varphi(y,x)\in C^{3,3}(R\times R)$ *має вигляд*

$$\boldsymbol{L}_{t_0}^\varepsilon(x)\varphi_t^\varepsilon(y,x,v)=\frac{1}{t}\boldsymbol{L}\varphi(y,v)+\varepsilon\theta_t^\varepsilon(x)\varphi(y,v), \tag{13}$$

*де граничний генератор* $\boldsymbol{L}$ *визначається співвідношенням*

$$\boldsymbol{L}\varphi(y,v)=v\left(\alpha g(y)+\frac{1}{2}\right)\varphi'_v(y,v)+\frac{1}{2}\alpha^2\sigma_v^2(y)\varphi''_{vv}(y,v)\ +$$

$$+\ t\hat{a}(y)\varphi'_y(y,v)+\frac{t}{2}\hat{\sigma}_y^2(y)\varphi''_{yy}(y,v), \tag{14}$$

$$\hat{a}(y)=\int_X\pi(dx)a(y,x),\qquad \hat{\sigma}_y^2(y)=\int_X\pi(dx)\sigma^2(y,x,0).$$

***Доведення.*** Згідно зі схемою розв'язку проблеми сингулярного збурення [6] обчислюємо значення генератора (12) на збуреній функції $\varphi_t^\varepsilon(y,x,v)$:

$$\boldsymbol{L}_{t_0}^\varepsilon(x)\varphi_t^\varepsilon(y,x,v)=\varepsilon^{-2}\boldsymbol{Q}\varphi(y,v)+\varepsilon^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}}[\boldsymbol{Q}\varphi_1(y,x,v)\ +$$

$$+\ \boldsymbol{G}_0(y,x)\varphi(y,v)]+\frac{1}{t}\boldsymbol{Q}\varphi_2(y,x,v)+\frac{1}{t}\boldsymbol{G}_0(y,x)\varphi_1(y,x,v)\ +$$

$$+\ \frac{1}{t}(\boldsymbol{V}(y,x)+t\boldsymbol{A}(y,x))\varphi(y,v)+\varepsilon\theta_t^\varepsilon(x)\varphi(y,v),$$

де

$$\theta_t^{\varepsilon}(x)\varphi(y,v) = \boldsymbol{A}(y,x)\varphi_1(y,x,v) + \frac{1}{t^{3/2}}\boldsymbol{G}_0(y,x)\varphi_2(y,x,v) + \varepsilon\frac{1}{t^2}\boldsymbol{V}(y,x)\varphi_2(y,x,v) +$$

$$+ \varepsilon\boldsymbol{A}(y,x)\,\varphi_2(y,x,v).$$

Оскільки $\boldsymbol{Q}\varphi(y,v) = 0$, то для функції $\varphi_1(y,x,v)$ справджується рівняння

$$\boldsymbol{Q}\varphi_1(y,x,v) + \boldsymbol{G}_0(y,x)\varphi(y,v) = 0,$$

розв'язок якого з урахуванням умови балансу [5] має вигляд

$$\varphi_1(y,x,v) = \boldsymbol{R}_0\boldsymbol{G}_0(y,x)\varphi(y,v) \;=\; \alpha\boldsymbol{R}_0 G(y,x,0)\varphi_v'(y,v).$$

Перейдемо до розгляду рівняння для функції $\varphi_2(y,x,v)$, а саме

$$\boldsymbol{Q}\varphi_2(y,v,x) + \boldsymbol{G}_0(y,x)\varphi_1(y,v,x) + (\boldsymbol{V}(y,v) + t\,\boldsymbol{A}(y,v))\varphi = \boldsymbol{L}\varphi(y,v), \tag{15}$$

де граничний оператор $\boldsymbol{L}$ визначається з умови розв'язності рівняння (14)

$$\boldsymbol{L} = \Pi\boldsymbol{G}_0(y,x)\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{G}_0(y,x) + \Pi\boldsymbol{V}(y,x) + t\Pi\boldsymbol{A}(y,x). \tag{16}$$

Обчислюючи праву частину (16), отримуємо (14).

Рівняння (15) має зображення

$$\boldsymbol{Q}\varphi_2 + \boldsymbol{L}(y,x)\varphi(y,x) = \boldsymbol{L}\varphi(y,x),$$

де

$$\boldsymbol{L}(y,x) = \boldsymbol{G}_0(y,x)\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{G}_0(y,x) + (\boldsymbol{V}(y,x) + t\,\boldsymbol{A}(y,x)).$$

З останнього зображення з урахуванням (14) маємо

$$\varphi_2(y,x,v) = \boldsymbol{R}_0\tilde{\boldsymbol{L}}(y,x)\varphi(y,v),$$

де $\tilde{\boldsymbol{L}}(y,x) = \boldsymbol{L}(y,x) - \boldsymbol{L}$ [8].

***Доведення теореми.*** Враховуючи гладкість складових системи (1), (2), зображень функцій $\varphi_1$ та $\varphi_2$, отримуємо обмеженість залишкового члена

$$\left|\theta_t^{\varepsilon}(x)\,\varphi(y,v)\right| < M\,, \quad M > 0\,. \tag{17}$$

Збіжність процесів $y^{\varepsilon}(t)$ та $v^{\varepsilon}(t)$ до процесів $\xi(t)$ та $\zeta(t)$ випливає з (13) та (17) згідно з модельною теоремою Королюка [6]. Тут генератор процесу $\xi(t)$ має вигляд

$$\boldsymbol{L}_y\varphi(y,v) = t\hat{a}(y)\varphi'_y(y,v) + \frac{t}{2}\hat{\sigma}^2_y(y)\varphi''_{yy}(y,v)\,.$$

Генератор граничного процесу $\zeta(t)$ має вигляд (14) і є генератором процесу Орнштейна – Уленбека.

**Висновки.** Розглянуто випадок, коли процес переносу, як випадкова еволюція, змінюється під впливом марковського перемикання по траєкторії нової еволюції разом із керуванням. За припущення існування точки рівноваги для керування в ергодичному марковському середовищі побудовано процедуру стохастичної апроксимації для такого керування. Для нормованого керування отримано умови асимптотичної нормальності у вигляді процесу Орнштейна – Уленбека через встановлення генератора граничного процесу керування.

Отриманий результат дає можливість розглянути пошук оптимального розв'язку задачі керування дифузійного процесу переносу з марковськими перемиканнями.

## Література


1. *Гихман И. И., Скороход А. В., Гихман И. И.* Управляемые случайные процессы. – Киев: Наук. думка, 1977. – 252 с.
2. *Жакод Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов: В 2 т. – М.: Физматгиз, 1994. – Т. 1. – 544 с.
3. *Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1972. – 304 с.
4. *Колмановский В. Б.* Задачи оптимального оценивания // Сорос. образов. журн. – 1999. – № 11. – С. 122 – 127.
5. *Скороход А. В.* Асимптотические методи теории стохастических дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1987. – 328 с.
6. *Koroliuk V., Limnios N.* Stochastic systems in merging phase space. – World Sci. Publ., 2005. – 330 p.
7. *Чабанюк Я . М.* Асимптотична нормальність для неперервної процедури стохастичної апроксимації в марковському середовищі // Доп. НАН України. – 2005. – № 11. – С. 29 – 34 .
8. *Чабанюк Я. М.* Неперервна процедура стохастичної апроксимації у напівмарковському середовищі // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 5. – С. 713 – 720.


Одержано 24.10.15,
після доопрацювання — 01.06.16