УДК 517.925.7

О. В. Шавала (Дрогобиц. держ. пед. ун-т ім. І. Франка)

ПРО ПОБУДОВУ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПО ЗАДАНИХ ПОСЛІДОВНОСТЯХ

We consider the problem under what conditions the equation $f'' + Af = 0$ possesses an entire (meromorphic) solution with given sequences of zeros (poles) and critical points. The results are extended to equations of higher orders.

Рассматривается вопрос, когда уравнение $f'' + Af = 0$ имеет целое (мероморфное) решение с заданными последовательностями нулей (полюсов) и критических точек. Результаты распространены на уравнения высшего порядка.

Нехай Λ — послідовність різних комплексних чисел λ_k з їхніми кратностями $p_k \in \mathbb{N}$, яка не має точок скупчення в $\mathbb{C}$, і M — послідовність різних комплексних чисел μ_k з їхніми кратностями $q_k \in \mathbb{N}$, яка не має точок скупчення в $\mathbb{C}$. Зокрема, будемо розглядати окремі випадки Λ_1, коли $p_k = 1$, і M_1, коли $q_k = 1$.

У статті [1] доведено, що для будь-якої послідовності Λ_1 існує ціла функція A така, що рівняння

$$f'' + Af = 0 \tag{1}$$

має цілий розв'язок f з нулями в точках λ_k. Цей результат було розвинуто у кількох напрямках:

1. Якщо у рівнянні (1) A — ціла чи аналітична у крузі функція, то результати продовжено у працях [2–6]. Слід виокремити випадок [7–9], коли A — аналітична у крузі функція, а послідовність нулів розв'язку задовольняє умову Бляшке.

2. Випадок, коли у рівнянні (1) A є мероморфною функцією, розглянуто у роботах [10, 11].

3. Випадкок, коли у рівнянні (1) A є цілою функцією і $f(\lambda_k) = b_k$, де b_k — послідовність комплексних чисел, розглянуто у роботах [12, 13].

4. Для рівняння вищого порядку — у статті [14].

У роботі [1] було отримано також наступний результат.

Теорема A [1, с. 242]. *Для довільних послідовностей* Λ_1 *та* M_1 *таких, що* $\lambda_n \neq \mu_k$, $n, k \in \in \mathbb{N}$, *існує ціла функція* A *така, що рівняння* (1) *має цілий розв'язок* f *з нулями в точках* λ_k, *похідна якого* f' *має нулі в точках* μ_k.

Цей результат було розвинено в [7], де автор розглянув концецію Бляшке-критичних рівнянь, тобто таких, коли послідовність нулів f' ненульового розв'язку рівняння (1) задовольняє умову Бляшке.

Нашою метою є доведення такого твердження.

Теорема 1 [15]. *Для довільних послідовностей* Λ *та* M, *де* $p_k > 1$, $\lambda_n \neq \mu_k$, $n, k \in \mathbb{N}$, *існує мероморфна функція* A *з полюсами другого порядку в точках* λ_k *така, що рівняння* (1) *має цілий розв'язок* f *з нулями в точках* λ_k *кратності* p_k, *похідна якого* f' *окрім нулів у точках* λ_k *має нулі в точках* μ_k *кратності* q_k.

Проф. $\boxed{\text{А. Кондратюк}}$ звернув увагу на те, щоб розглядати питання, коли рівняння (1) має розв'язок з заданою послідовністю полюсів. У цьому зв'язку одержано таке твердження.

Теорема 2. *Для довільних послідовностей* Λ *та* M *комплексних чисел,* $\lambda_n \neq \mu_k$, $n, k \in \mathbb{N}$, *існує мероморфна функція* A *з полюсами другого порядку в точках* λ_k *така, що рівняння* (1) *має мероморфний розв'язок* f *без нулів із полюсами в точках* λ_k *кратності* p_k, *похідна якого* f' *має нулі в точках* μ_k *кратності* q_k.

Для доведення теореми 1 нам знадобиться така лема.

Лема 1 [1, с. 300 – 301; 16, с. 201]. *Для будь-якої послідовності* Λ_1 *і для будь-якої послідовності* $\{a_k\}$ *комплексних чисел існує ціла функція* h *така, що*

$$h(\lambda_k) = a_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

***Доведення теореми* 1.** Скористаємось деякими ідеями з праці [1, с. 239, 240]. Візьмемо цілу функцію P з нулями в точках λ_k кратності p_k. За теоремою Вейєрштрасса [17, с. 296] така функція існує. Нехай $f = Pe^g$, де g — ціла функція, яку знайдемо пізніше. Тоді $f' = P'e^g + Pg'e^g$,

$$f'/f = P'/P + g'.$$

Функція f'/f має прості полюси в точках λ_k і нулі в точках μ_k кратності q_k. Позначимо

$$P' + Pg' = P_1 e^h, \tag{2}$$

де h — ціла функція, яку знайдемо пізніше. Функція P_1 має нулі в точках λ_k кратності $p_k - 1$ і нулі в точках μ_k кратності q_k. За теоремою Вейєрштрасса [17, с. 296] така функція існує. З (2) отримуємо

$$g' = (P_1 e^h - P')/P. \tag{3}$$

Функція g' є цілою, якщо кожен нуль P є нулем $P_1 e^h - P'$. Але P' і P_1 мають нулі в точках λ_k кратності $p_k - 1$. Тому

$$h(\lambda_k) = \log\left(\frac{P'}{P_1}\right)\Bigg|_{z=\lambda_k}, \tag{4}$$

де $\log v = \log|v| + i\theta$, $\theta = \arg v \in [-\pi; \pi)$. З леми 1 випливає, що така функція h існує. Тоді з (3) знаходимо g',

$$g(z) = \int\limits_{z_0}^{z} \frac{P_1 e^h - P'}{P}\, dz + g(z_0) \tag{5}$$

і з формули $f = Pe^g$ знаходимо розв'язок рівняння (1). Таким чином, з рівності $A = -f''/f$ одержуємо, що A — мероморфна функція з полюсами другого порядку в точках λ_k.

***Приклад* 1.** Нехай $f = \sin^2 z$. Тоді $f' = \sin 2z$ і f є розв'язком рівняння (1), де $A = 2 - 2\cot^2 z$.

Для доведення теореми 2 скористаємось методом доведення теореми 1. Коротко зазначимо лише деякі етапи доведення. Нехай $f = Pe^g$, де $P = 1/\tilde{P}$, $\tilde{P}$ — ціла функція з нулями в точках λ_k кратності p_k, g — ціла функція, яку знаходимо пізніше. Тоді з рівності (2) отримаємо, що функція P_1 має полюси в точках λ_k кратності $p_k + 1$ і нулі в точках μ_k кратності q_k. З рівності (3) бачимо, що функція g' є цілою, якщо виконується (4). Тоді шуканий мероморфний розв'язок має вигляд $f = Pe^g$, де g знаходимо з (5). Таким чином, з формули $A = -f''/f$ одержуємо, що A — мероморфна функція з полюсами другого порядку в точках λ_k.

***Приклад* 2.** Нехай $f = \sin^{-2} z$. Тоді $f' = -2\sin^{-3} z \cos z$ і f є розв'язком рівняння (1), де $A = -2 - 6\cot^2 z$.

Аналогічно, використовуючи метод доведення теореми 1, можна отримати наступний результат.

Теорема 3. *Для довільних послідовностей* Λ_1 *та* M *комплексних чисел таких, що* $\lambda_n \neq \mu_k$, $n, k \in \mathbb{N}$, *існує мероморфна функція* A *з полюсами* n*-го порядку в точках* λ_k *така, що рівняння*

$$f^{(n)} + Af = 0$$

має розв'язок f *такий, що* $f^{1/\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, *є цілою функцією з простими нулями в точках* λ_k, *похідна якого* f' *має нулі в точках* μ_k *кратності* q_k.

При доведенні будемо вважати, що шуканий розв'язок має вигляд $f = Q^\alpha e^g = Pe^g$, де Q — ціла функція з простими нулями в точках λ_k, і у формулі (2) $P_1 = Q_1^{\alpha-1} P_2$, де функція Q_1 має прості нулі в точках λ_k, а P_2 — нулі в точках μ_k кратності q_k.

Література

1. *Šeda V.* O niektorých vlastnostiach riešeni diferenciálnej rovnice $y'' = Q(z)y$, $Q(z) \not\equiv 0$ je celá funkcia // Acta Fac. rerum. natur. Univ. comen. Math. – 1959. – **4**. – P. 223 – 253.
2. *Bank S.* A note on the zero-sequences of solutions of linear differential equations // Results Math. – 1988. – **13**. – P. 1 – 11.
3. *Heittokangas J., Laine I.* Solutions of $f'' + A(z)f = 0$ with prescribed sequences of zeros // Acta Math. Univ. Comenian. – 2005. – **74**, № 2. – P. 287 – 307.
4. *Sauer A.* A note on the zero-sequences of solutions of $f'' + Af = 0$ // Proc. Amer. Math. Soc. – 1997. – **125**, № 4. – P. 1143 – 1147.
5. *Grohn J.* On non-normal solutions of linear differential equations, available at: https://arxiv.org/pdf/1602.00161.pdf
6. *Chyzhykov I., Sheparovych I.* Interpolation of analytic functions of moderate growth in the unit disc and zeros of solutions of a linear differential equation, available at: http://arxiv.org/pdf/1401.0797.pdf
7. *Heittokangas J.* A survey on Blaschke-oscillatory differential equations, with updates // Blaschke Products and their Applications / Eds J. Mashreghi, E. Fricain. – Springer, 2013. – P. 43 – 98.
8. *Heittokangas J.* Solutions of $f'' + A(z)f = 0$ in the unit disk having Blaschke sequences as the zeros // Comput. Methods and Funct. Theory. – 2005. – **5**, № 1. – P. 49 – 63.
9. *Шавала О.* Про голоморфні розв'язки рівняння $f'' + a_0 f = 0$, нулі яких задовольняють умову Бляшке // Мат. студ. – 2007. – **28**, № 2. – P. 213 – 216.

10. *Винницкий Б., Шавала Е.* О последовательностях нулей голоморфных решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 2008. – **44**, № 10. – P. 1306 – 1310.
11. *Шавала О.* Про послідовності нулів голоморфних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь // XII міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука: Тези доп. – Київ, 2008. – Т. 1. – С. 437.
12. *Vynnyts'kyi B., Shavala O.* Remarks on Šeda theorem // Acta Math. Univ. Comenian. – 2012. – **81**, № 1. – P. 55 – 59.
13. *Vynnyts'kyi B., Shavala O.* On interpolation properties of entire solutions of the equation $f'' + a_0 f = 0$ // Int. Conf. "Complex Analysis and Related Topics": Abstrs. – Lviv, 2013. – P. 90 – 91.
14. *Шавала О.* Про деякі властивості мероморфних розв'язків лінійного диференціального рівняння третього порядку // Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу": Тези доп. – Івано-Франківськ, 2016. – С. 147 – 148.
15. *Shavala O.* On the sequences of zeros and critical points of entire solutions of the equation $f'' + Af = 0$ // Int. V. Skorobohatko Math. Conf.: Abstrs. – Lviv, 2015. – P. 148.
16. *Гельфонд А.* Исчисление конечных разностей. – М.: Наука, 1967.
17. *Saks S., Zygmund A.* Analytic functions. – Warszawa; Wroclaw: Nakladem Polsk. towarzystwa mat., 1952.

Одержано 24.03.17