УДК 517.5

С. Б. Вакарчук (Днепропетр. ун-т им. А. Нобеля),
М. Б. Вакарчук (Днепропетр. нац. ун-т им. О. Гончара)

О ПОЛНЫХ МОДУЛЯХ НЕПРЕРЫВНОСТИ 2π-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_{2,2}$

The description of the total moduli of continuity of 2π-periodic functions of two variables are obtained in the space $L_{2,2}$. The proposed description can be regarded as an extension of the famous results by O. V. Besov, S. B. Stechkin, V. A. Yudin on the moduli of continuity in L_2 in the two-dimensional case.

Наведено опис повних модулів неперервності 2π-періодичних функцій двох змінних у просторі $L_{2,2}$, який можна розглядати як поширення відомих результатів О. В. Бєсова, С. Б. Стєчкіна, В. А. Юдіна про модулі неперервності в L_2 на двовимірний випадок.

1. Введение. Пусть функция f является непрерывной на отрезке $[a,b]$, где $a,\ b$ — конечные числа, т. е. принадлежит пространству $C([a,b])$. Ее модуль непрерывности определяется формулой

$$\omega(f,t)_{C([a,b])}:=\sup\left\{|f(x_1)-f(x_2)|: x_1,x_2\in[a,b], |x_1-x_2|\le t\right\},\quad t\in[0,b-a],\qquad(1.1)$$

и удовлетворяет следующим свойствам [1]: $\omega(f,0)_{C([a,b])}=0$; функция (1.1) не убывает вместе с t; $\omega(f,t_1+t_2)_{C([a,b])}\le\omega(f,t_1)_{C([a,b])}+\omega(f,t_2)_{C([a,b])}$, т. е. модуль непрерывности (1.1) является полуаддитивной функцией; $\omega(f,t)_{C([a,b])}\in C([0,b-a])$.

Перечисленные свойства полностью характеризуют произвольную функцию $\omega(t)$, обладающую ими, как модуль непрерывности. При этом $\omega(\omega,t)_{C([a,b])}=\omega(t)$ [2]. Указанное свойство позволило получить описание модулей непрерывности в $C([a,b])$.

Пусть X — пространство C или L_q, $1\le q<\infty$, 2π-периодических функций с соответствующей метрикой. Тогда под модулем непрерывности произвольного элемента f в пространстве X понимают функцию

$$\omega(f,t)_X:=\sup\left\{\|f(\cdot+h)-f(\cdot)\|_X: |h|\le t\right\},\quad t\ge0.\qquad(1.2)$$

Отметим, что характеристика гладкости (1.2) имеет те же свойства, что и модуль непрерывности (1.1), однако в 2π-периодическом случае $\omega(f,t)_X=\omega(f,\pi)_X$ при $t\ge\pi$ [3]. Напомним, что описание модулей непрерывности для пространства C было дано Лебегом [4].

О. В. Бесов и С. Б. Стечкин в работе [5] дали описание модулей непрерывности в пространстве L_2. Напомним его. Пусть $f\in L_2$ и

$$\|f\|_2:=\|f\|_{L_2}=\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(x)|^2dx\right\}^{1/2}<\infty.$$

При этом $\omega(f,t)_2:=\omega(f,t)_{L_2}$ — интегральный L_2-модуль непрерывности функции $f\in L_2$. Тогда

для того чтобы функция $\omega(t)$, $0\le t\le\pi$, была L_2-модулем непрерывности, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление

$$\omega(t) = \sup\Big\{\sqrt{\varphi(0) - \varphi(h)} : |h| \le t\Big\}, \tag{1.3}$$

где $\varphi(h) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos kh$, $c_k \ge 0$ *для любого* $k \in \mathbb{Z}_+$ *и* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty$ [5].

Однако условие (1.3), налагаемое на функцию ω в рассмотренном случае, является трудно-проверяемым. В связи с этим В. А. Юдиным в работе [6] было дано простое необходимое условие для ω, а именно:

пусть ω *— модуль непрерывности в пространстве* L_2, *тогда выполняется неравенство*

$$\omega^2(\pi) \le \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \omega^2(t)\,dt. \tag{1.4}$$

Непосредственное применение соотношения (1.4) к функции $\widetilde{\omega}(t) := t^{\alpha}$, $0 \le t \le \pi$, $\alpha > 0$, показывает, что $\widetilde{\omega}$ не является модулем непрерывности в L_2 при $\alpha > 1/2$ [6].

В последующем указанные исследования были продолжены С. В. Конягиным [7] и В. И. Ивановым [8] для L_p-пространств 1-периодических функций в случаях $1 \le p \le 2$ и $2 < p < \infty$ соответственно.

Цель данной статьи — распространение результатов работ [5, 6] на случай функций двух переменных, являющихся 2π-периодическими по каждой из них.

2. Некоторые сведения о модулях непрерывности функций двух переменных. Пусть $D := \big\{(x,y) : a \le x \le b, c \le y \le d\big\}$ — замкнутый ограниченный прямоугольник. Множество функций, непрерывных на множестве D, обозначим символом $C(D)$. Для произвольного элемента $f \in C(D)$ запишем полный модуль непрерывности

$$\omega(f;t,\tau)_{C(D)} :=$$
$$:= \sup\big\{|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| : |x_1 - x_2| \le t, |y_1 - y_2| \le \tau\big\}, \quad t \in [0, b-a], \quad \tau \in [0, d-c]. \tag{2.1}$$

Напомним, что характеристика гладкости (2.1) имеет следующие свойства [1]: $\omega(f;0,0)_{C(D)} = 0$; функция $\omega(f;t,\tau)_{C(D)}$ не убывает вместе с t и τ; $\omega(f;t,\tau)_{C(D)}$ является полуаддитивной функцией, т. е. $\omega(f;t_1+t_2,\tau_1+\tau_2)_{C(D)} \le \omega(f;t_1,\tau_1)_{C(D)} + \omega(f;t_2,\tau_2)_{C(D)}$, $(t_1+t_2, \tau_1+\tau_2) \in D$; функция (2.1) является непрерывной в замкнутом прямоугольнике $[0, b-a] \otimes [0, d-c]$, где символ $\otimes$ обозначает декартово произведение множеств. Перечисленные свойства полностью характеризуют произвольную функцию $\omega(t,\tau)$, удовлетворяющую им, как модуль непрерывности. При этом $\omega(\omega;t,\tau)_{C(D)} = \omega(t,\tau)$, т. е. все приведенное выше дает описание модуля непрерывности в пространстве $C(D)$.

Полный модуль непрерывности (2.1) функции $f \in C(D)$ связан с ее частными модулями непрерывности

$$\omega(f;t,0)_{C(D)} := \sup\big\{\|f(x_1,\cdot) - f(x_2,\cdot)\|_{C([c,d])} : |x_1 - x_2| \le t\big\}, \tag{2.2}$$

$$\omega(f;0,\tau)_{C(D)} := \sup\big\{\|f(\cdot,y_1) - f(\cdot,y_2)\|_{C([a,b])} : |y_1 - y_2| \le \tau\big\} \tag{2.3}$$

двойным неравенством [1]

$$\max\big\{\omega(f;t,0)_{C(D)}, \omega(f;0,\tau)_{C(D)}\big\} \le \omega(f;t,\tau)_{C(D)} \le \omega(f;t,0)_{C(D)} + \omega(f;0,\tau)_{C(D)}. \tag{2.4}$$

Пусть $a = b = 0$ и $c = d = 2\pi$. Тогда полагаем $D_* := \big\{(x,y)\colon 0 \le x, y \le 2\pi\big\}$. Через $L_{q,2} := L_{q,2}(D_*)$, $1 \le q < \infty$, обозначим пространство всех измеримых на D_* функций $f(x,y)$, 2π-периодических по каждой из переменных x и y, q-я степень модуля которых интегрируема по Лебегу на множестве D_*, а конечная норма определяется формулой

$$\|f\|_{q,2} := \|f\|_{L_{q,2}(D_*)} = \left\{\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{D_*}|f(x,y)|^q\,dx\,dy\right\}^{1/q}.$$

Пространство непрерывных 2π-периодических по каждой переменной функций $f(x,y)$ обозначим символом $C_* := C(D_*)$.

По аналогии с (2.1)–(2.3) для произвольной функции $f \in L_{q,2}$ имеют место полный интегральный модуль непрерывности

$$\omega(f;t,\tau)_{q,2} := \omega(f;t,\tau)_{L_{q,2}(D_*)} =$$

$$= \sup\left\{\left(\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{D_*}|f(x+h,y+\mu)-f(x,y)|^q\,dx\,dy\right)^{1/q}\colon |h|\le t, |\mu|\le\tau\right\} =$$

$$= \sup\big\{\|f(\cdot+h,\cdot+\mu)-f(\cdot,\cdot)\|_{q,2}\colon |h|\le t, |\mu|\le\tau\big\} \tag{2.5}$$

и частные модули непрерывности

$$\omega(f;t,0)_{q,2} := \omega(f;t,0)_{L_{q,2}(D_*)} =$$

$$= \sup\left\{\left(\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{D_*}|f(x+h,y)-f(x,y)|^q\,dx\,dy\right)^{1/q}\colon |h|\le t\right\} =$$

$$= \sup\big\{\|f(\cdot+h,\cdot)-f(\cdot,\cdot)\|_{q,2}\colon |h|\le t\big\}, \tag{2.6}$$

$$\omega(f;0,\tau)_{q,2} := \omega(f;0,\tau)_{L_{q,2}(D_*)} =$$

$$= \sup\left\{\left(\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{D_*}|f(x,y+\mu)-f(x,y)|^q dxdy\right)^{1/q}\colon |\mu|\le\tau\right\} =$$

$$= \sup\big\{\|f(\cdot,\cdot+\mu)-f(\cdot,\cdot)\|_{q,2}\colon |\mu|\le\tau\big\}. \tag{2.7}$$

Характеристика гладкости (2.5) при любом $1 \le q < \infty$ удовлетворяет таким же четырем свойствам, что и модуль непрерывности (2.1). При этом неравенство (2.4) будет иметь место, если в нем модули непрерывности (2.1) и (2.2), (2.3) заменить соответственно на (2.5) и (2.6), (2.7).

Утверждение 1. *Пусть X — пространство C_* или пространство $L_{q,2}$, где $1 \le q < \infty$. Тогда полный модуль непрерывности $\omega(f;t,\tau)$ функции $f \in X$ при $0 \le t,\tau \le 2\pi$ принимает следующие значения*:

$$\omega(f;t,\tau)_X, \qquad \text{*если*} \quad 0 \le t,\tau \le \pi, \tag{2.8}$$

$$\omega(f;t,\pi)_X, \qquad \text{если} \quad 0 \le t \le \pi \quad \text{и} \quad \tau \ge \pi, \tag{2.9}$$

$$\omega(f;\pi,\tau)_X, \qquad \text{если} \quad t \ge \pi \quad \text{и} \quad 0 \le \tau \le \pi, \tag{2.10}$$

$$\omega(f;\pi,\pi)_X, \qquad \text{если} \quad t,\tau \ge \pi. \tag{2.11}$$

Доказательство. Поскольку представление (2.8) очевидно, то покажем справедливость представления (2.9). Исходя из отмеченных ранее свойств характеристики гладкости $\omega(f;t,\tau)_X$, при $0 \le t \le \pi$ и $\tau \ge \pi$ получаем

$$\omega(f;t,\pi)_X \le \omega(f;t,\tau)_X. \tag{2.12}$$

Для вычисления оценки сверху величины $\omega(f;t,\tau)_X$ вначале полагаем, что $|h| \le t \le \pi$ и $|\mu| \le \pi \le \tau$. Тогда в силу определения полного модуля непрерывности имеем

$$\big\|f(\cdot+h,\cdot+\mu)-f(\cdot,\cdot)\big\|_X \le \omega(f;|h|,|\mu|)_X \le \omega(f;t,\pi)_X. \tag{2.13}$$

Пусть теперь $|h| \le t \le \pi$ и $\pi \le |\mu| \le \tau$. Очевидно, что существует такое число $k_* \in \mathbb{Z}$, для которого $|2\pi k_* - \mu| \le \pi$, и в силу 2π-периодичности функции $f(x,y)$ по аргументу y имеем

$$\big\|f(\cdot+h,\cdot+\mu)-f(\cdot,\cdot)\big\|_X = \big\|f(\cdot+h,\cdot+\mu)-f(\cdot,\cdot+2\pi k_*)\big\|_X \le$$
$$\le \omega(f;|h|,|2\pi k_*-\mu|)_X \le \omega(f;t,\pi)_X. \tag{2.14}$$

Из соотношений (2.13), (2.14) и определения характеристики гладкости $\omega(f;t,\tau)_X$ в рассматриваемом случае получаем

$$\omega(f;t,\tau)_X \le \omega(f;t,\pi)_X. \tag{2.15}$$

Представление (2.9) следует из неравенств (2.12) и (2.15).

Отметим, что доказательство представления (2.10) проводится практически аналогичным образом.

Покажем справедливость представления (2.11), когда $t,\tau \ge \pi$. Вследствие свойств рассматриваемой характеристики гладкости выполняется неравенство

$$\omega(f;\pi,\pi)_X \le \omega(f;t,\tau)_X. \tag{2.16}$$

Докажем, что имеет место неравенство, противоположное (2.16). Пусть $|h|,|\mu| \le \pi$. Тогда

$$\big\|f(\cdot+h,\cdot+\mu)-f(\cdot,\cdot)\big\|_X \le \omega(f;|h|,|\mu|)_X \le \omega(f;\pi,\pi)_X. \tag{2.17}$$

Пусть далее $|h| \le \pi \le t$ и $\pi \le |\mu| \le \tau$. Повторяя часть рассуждений из доказательства представления (2.9), записываем

$$\big\|f(\cdot+h,\cdot+\mu)-f(\cdot,\cdot)\big\|_X = \big\|f(\cdot+h,\cdot+\mu)-f(\cdot,\cdot+2\pi k_*)\big\|_X \le$$
$$\le \omega(f;|h|,|2\pi k_*-\mu|)_X \le \omega(f;\pi,\pi)_X. \tag{2.18}$$

Случай $\pi \le |h| \le t$ и $|\mu| \le \pi \le \tau$ рассматривается практически аналогично предыдущему, в результате чего имеем

$$\|f(\cdot+h,\cdot+\mu)-f(\cdot,\cdot)\|_X \le \omega(f;\pi,\pi)_X. \tag{2.19}$$

Если $\pi \le |h| \le t$ и $\pi \le |\mu| \le \tau$, то существуют такие числа $\widetilde{k}$ и k_*, принадлежащие $\mathbb{Z}$, для которых $|2\pi\widetilde{k} - h| \le \pi$ и $|2\pi k_* - \mu| \le \pi$. Тогда

$$\big\|f(\cdot + h, \cdot + \mu) - f(\cdot, \cdot)\big\|_X = \big\|f(\cdot + h, \cdot + \mu) - f(\cdot + 2\pi\widetilde{k}, \cdot + 2\pi k_*)\big\|_X \le$$
$$\le \omega\left(f; |2\pi\widetilde{k} - h|, |2\pi k_* - \mu|\right)_X \le \omega(f; \pi, \pi)_X. \tag{2.20}$$

Используя определение характеристик гладкости $\omega(f; t, \tau)_X$ и соотношения (2.17) – (2.20), при $t, \tau \ge \pi$ имеем

$$\omega(f; t, \tau)_X \le \omega(f; \pi, \pi)_X. \tag{2.21}$$

Представление (2.11) следует из формул (2.16) и (2.21).

Утверждение 1 доказано.

Используя (2.8) – (2.10), для частных модулей непрерывности (2.2), (2.3), (2.6), (2.7), когда $X = C_*$ или $X = L_{q,2}$, при $0 \le t \le 2\pi$ и $0 \le \tau \le 2\pi$ соответственно получаем

$$\begin{aligned} &\omega(f; t, 0)_X, \quad \text{если} \quad 0 \le t \le \pi, \\ &\omega(f; \pi, 0)_X, \quad \text{если} \quad t \ge \pi, \end{aligned} \tag{2.22}$$

и

$$\begin{aligned} &\omega(f; 0, \tau)_X, \quad \text{если} \quad 0 \le \tau \le \pi, \\ &\omega(f; 0, \pi)_X, \quad \text{если} \quad \tau \ge \pi. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Из утверждения 1 и (2.22), (2.23) следует, что для аналитического описания полного и частных модулей непрерывности на множествах D_* и $[0, 2\pi]$ соответственно для $f \in X$ достаточно иметь аналитическое представление характеристики гладкости $\omega(f; t, \tau)_X$, когда $0 \le t,\ \tau \le \pi$.

3. Описание полного модуля непрерывности в пространстве $L_{2,2}$.

Теорема 1. *Функция $\omega(t, \tau)$, $0 \le t,\ \tau \le \pi$, является полным модулем непрерывности некоторой функции из $L_{2,2}$ тогда и только тогда, когда она допускает представление*

$$\omega(t, \tau) = \sup\left\{\sqrt{\varphi(0,0) - \varphi(h, \mu)} \colon |h| \le t, |\mu| \le \tau\right\}, \tag{3.1}$$

где

$$\varphi(h, \mu) := \sum_{k,m=0}^{\infty} (\alpha_{km} \cos(kh + m\mu) + \beta_{km} \cos(kh - m\mu)). \tag{3.2}$$

При этом α_{km} и β_{km} — такие неотрицательные числа, что

$$\sum_{k,m=0}^{\infty} (\alpha_{km} + \beta_{km}) < \infty. \tag{3.3}$$

Доказательство. Покажем сначала необходимость представления (3.1), полагая для этого, что $\omega(t, \tau)$ является полным модулем непрерывности некоторой функции $f \in L_{2,2}$, т. е. $\omega(f; t, \tau)_{2,2} = \omega(t, \tau)$ для любых $t, \tau \in [0, \pi]$. В смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,2}$ представим функцию f в виде суммы двойного ряда Фурье в комплексной форме

$$f(x,y) = \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} \widehat{\mathbf{c}}_{km}(f) e^{i(kx+my)}, \tag{3.4}$$

где

$$\widehat{\mathbf{c}}_{km}(f) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{D_*} f(x,y) e^{-i(kx+my)}\, dx\, dy. \tag{3.5}$$

Собрав попарно сопряженные члены ряда (3.4), представим его в действительной форме

$$f(x,y) = \sum_{k,m=0}^{\infty} \lambda_{km}(a_{km}(f)\cos kx \cos my + b_{km}(f)\sin kx \cos my +$$

$$+ c_{km}(f)\cos kx \sin my + d_{km}(f)\sin kx \sin my), \tag{3.6}$$

где

$$\lambda_{km} = \begin{cases} 1/4, & \text{если} \quad k = m = 0, \\ 1/2, & \text{если} \quad k = 0, \ \ m \in \mathbb{N} \quad \text{или} \quad k \in \mathbb{N}, \ \ m = 0, \\ 1, & \text{если} \quad k, m \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} a_{km}(f) &= \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{D_*} f(x,y)\cos kx \cos my\, dx\, dy, \\ b_{km}(f) &= \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{D_*} f(x,y)\sin kx \cos my\, dx\, dy, \\ c_{km}(f) &= \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{D_*} f(x,y)\cos kx \sin my\, dx\, dy, \\ d_{km}(f) &= \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{D_*} f(x,y)\sin kx \sin my\, dx\, dy. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Отметим, что равенство (3.6) также понимаем в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,2}$. При этом для коэффициентов Фурье (3.5) и (3.8) функции $f \in L_{2,2}$ при $n, m \in \mathbb{N}$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathbf{c}}_{km}(f) = \frac{1}{4}(a_{km}(f) - d_{km}(f) - i(c_{km}(f) + b_{km}(f))), \\ &\widehat{\mathbf{c}}_{-k,-m}(f) = \overline{\widehat{\mathbf{c}}_{km}(f)}, \\ &\widehat{\mathbf{c}}_{k,-m}(f) = \frac{1}{4}(a_{km}(f) + d_{km}(f) + i(c_{km}(f) - b_{km}(f))), \\ &\widehat{\mathbf{c}}_{-k,m}(f) = \overline{\widehat{\mathbf{c}}_{k,-m}(f)}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

В случаях $k=0,\ m\in\mathbb{N}$ и $k\in\mathbb{N},\ m=0$ получаем соответственно

$$\widehat{\mathbf{c}}_{0m}(f)=\frac{1}{4}(a_{0m}(f)-ic_{0m}(f)),\qquad \widehat{\mathbf{c}}_{0,-m}(f)=\overline{\widehat{\mathbf{c}}_{0m}(f)} \tag{3.10}$$

и

$$\widehat{\mathbf{c}}_{k0}(f)=\frac{1}{4}(a_{k0}(f)-ib_{k0}(f)),\qquad \widehat{\mathbf{c}}_{-k,0}(f)=\overline{\widehat{\mathbf{c}}_{k0}(f)}. \tag{3.11}$$

Используя разложение в ряд Фурье (3.4), в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,2}$ записываем равенство

$$f(x+h,y+\mu)-f(x,y)=\sum_{k,m=-\infty}^{\infty}\widehat{\mathbf{c}}_{km}(f)\big(e^{i(kh+m\mu)}-1\big)e^{i(kx+my)}.$$

Отсюда получаем

$$\|f(\cdot+h,\cdot+\mu)-f(\cdot,\cdot)\|_{2,2}^2=4\sum_{k,m=-\infty}^{\infty}|\widehat{\mathbf{c}}_{km}(f)|^2\cdot\big|1-e^{i(kh+m\mu)}\big|^2=$$

$$=8\sum_{k,m=-\infty}^{\infty}|\widehat{\mathbf{c}}_{km}(f)|^2\big(1-\cos(kh+m\mu)\big). \tag{3.12}$$

Далее полагаем

$$\begin{aligned} r_{km}^2(f)&:=(a_{km}(f)-d_{km}(f))^2+(b_{km}(f)+c_{km}(f))^2,\\ \rho_{km}^2(f)&:=(a_{km}(f)+d_{km}(f))^2+(b_{km}(f)-c_{km}(f))^2, \end{aligned} \tag{3.13}$$

где $k,m\in\mathbb{Z}_+$. Используя соотношения (3.9) – (3.11) и учитывая обозначения (3.13), записываем равенство (3.12) в виде

$$\|f(\cdot+h,\cdot+\mu)-f(\cdot,\cdot)\|_{2,2}^2=$$

$$=\sum_{k,m=0}^{\infty}\big\{r_{km}^2(f)(1-\cos(kh+m\mu))+\rho_{km}^2(f)(1-\cos(kh-m\mu))\big\}. \tag{3.14}$$

Поскольку для функции $f\in L_{2,2}$ в силу формулы (3.6) и равенства Парсеваля имеем

$$\|f\|_{2,2}^2=\sum_{k,m=0}^{\infty}\lambda_{km}\big(a_{km}^2(f)+b_{km}^2(f)+c_{km}^2(f)+d_{km}^2\big)<\infty,$$

где числа λ_{km} определяются соотношением (3.7), то, используя (3.13), отсюда получаем

$$\sum_{k,m=0}^{\infty}\big\{r_{km}^2(f)+\rho_{km}^2(f)\big\}=\sum_{k,m=0}^{\infty}\big(a_{km}^2(f)+b_{km}^2(f)+c_{km}^2(f)+d_{km}^2\big)<\infty. \tag{3.15}$$

В формуле (3.2) полагаем

$$\alpha_{km}:=r_{km}^2(f),\qquad \beta_{km}:=\rho_{km}^2(f), \tag{3.16}$$

где $k, m \in \mathbb{Z}_+$. Учитывая, что для выбранных таким образом α_{km} и β_{km} на основании (3.15) условие (3.3) выполняется, формулу (3.14) с учетом (3.2) и (3.16) записываем в виде

$$\big\|f(\cdot+h,\cdot+\mu)-f(\cdot,\cdot)\big\|_{2,2}^2=\varphi(0,0)-\varphi(h,\mu). \tag{3.17}$$

Используя определение полного модуля непрерывности, для функции $f \in L_{2,2}$ из (3.17) получаем

$$\omega(f;t,\tau)_{2,2}=\sup\Big\{\sqrt{\varphi(0,0)-\varphi(h,\mu)}\colon |h|\le t, |\mu|\le\tau\Big\}, \tag{3.18}$$

где $0 \le t,\ \tau \le \pi$. Поскольку, как полагалось ранее, $\omega(f;t,\tau)_{2,2}=\omega(t,\tau);\ t,\tau\in[0,\pi]$, то для функции ω справедливо представление (3.1).

Переходя к доказательству достаточности, покажем, что если для функции ω на множестве $0 \le t,\ \tau \le \pi$ справедливо представление (3.1), где функция φ имеет вид (3.2) и удовлетворяет условию (3.3), то существует такая функция $\widetilde{f} \in L_{2,2}$, для которой ее полный модуль непрерывности $\omega(\widetilde{f};t,\tau)_{2,2}$ совпадает с $\omega(t,\tau)$ при $t,\tau\in[0,\pi]$. Иными словами, необходимо подобрать такую функцию $\widetilde{f} \in L_{2,2}$, для которой при любых $|h|,|\mu|\le\pi$ будет выполнено соотношение (3.17), где $f\equiv\widetilde{f}$.

Используя формулу (3.2), записываем

$$\varphi(0,0)-\varphi(h,\mu)=\sum_{k,m=0}^{\infty}\big\{\alpha_{km}(1-\cos(kh+m\mu))+\beta_{km}(1-\cos(kh-m\mu))\big\}. \tag{3.19}$$

Дальнейшие рассуждения, связанные с соответствующим выбором коэффициентов Фурье интересующей нас функции $\widetilde{f}$ из $L_{2,2}$, базируются на следующем утверждении.

Теорема А (см., например, [9], глава 2, § 1, теорема 2.3). *Пусть заданы четыре последовательности вещественных чисел* $\{A_{km}\}_{k,m\in\mathbb{Z}_+}$, $\{B_{km}\}_{k,m\in\mathbb{Z}_+}$, $\{C_{km}\}_{k,m\in\mathbb{Z}_+}$, $\{D_{km}\}_{k,m\in\mathbb{Z}_+}$ *такие, что сходится ряд*

$$\sum_{k,m=0}^{\infty}\lambda_{km}\big(A_{km}^2+B_{km}^2+C_{km}^2+D_{km}^2\big). \tag{3.20}$$

Тогда существует такая функция $\widetilde{f}\in L_{2,2}$, *что данные числа* A_{km}, B_{km}, C_{km}, D_{km} *являются ее коэффициентами Фурье, т. е.*

$$a_{km}(\widetilde{f})=A_{km},\qquad b_{km}(\widetilde{f})=B_{km},\qquad c_{km}(\widetilde{f})=C_{km},\qquad d_{km}(\widetilde{f})=D_{km}, \tag{3.21}$$

где $k,m\in\mathbb{Z}_+$. *При этом указанная функция* $\widetilde{f}$, *как элемент пространства* $L_{2,2}$, *единственна.*

Рассмотрим далее две последовательности неотрицательных вещественных чисел $\{\alpha_{km}\}_{k,m\in\mathbb{Z}_+}$ и $\{\beta_{km}\}_{k,m\in\mathbb{Z}_+}$, участвующих в определении функции φ из (3.2). Можно подобрать, причем не единственным способом, такие четыре последовательности вещественных чисел $\{\gamma_{km}\}_{k,m\in\mathbb{Z}_+}$, $\{\delta_{km}\}_{k,m\in\mathbb{Z}_+}$, $\{\sigma_{km}\}_{k,m\in\mathbb{Z}_+}$, $\{\eta_{km}\}_{k,m\in\mathbb{Z}_+}$, для элементов которых будут выполняться равенства

$$\begin{aligned}\gamma_{km}^2+\delta_{km}^2&=\alpha_{km},\\ \sigma_{km}^2+\eta_{km}^2&=\beta_{km},\end{aligned} \tag{3.22}$$

где $k, m \in \mathbb{Z}_+$. Если $\alpha_{km} > 0$ или $\beta_{km} > 0$, то будем полагать, что в левых частях соответствующих равенств из (3.22) оба слагаемых также положительны.

Можно подобрать, причем также не единственным способом, такие четыре последовательности вещественных чисел $\{A_{km}\}_{k,m\in\mathbb{Z}_+}$, $\{B_{km}\}_{k,m\in\mathbb{Z}_+}$, $\{C_{km}\}_{k,m\in\mathbb{Z}_+}$, $\{D_{km}\}_{k,m\in\mathbb{Z}_+}$, чтобы имели место равенства

$$\begin{aligned} &|A_{km} - B_{km}| = |\gamma_{km}|, \\ &|A_{km} + B_{km}| = |\sigma_{km}|, \\ &|C_{km} + D_{km}| = |\delta_{km}|, \\ &|C_{km} - D_{km}| = |\eta_{km}|, \end{aligned} \tag{3.23}$$

где $k, m \in \mathbb{Z}_+$. Укажем один из возможных вариантов выбора элементов числовых последовательностей, для которых равенства (3.23) будут выполнены: $A_{km} := (\sigma_{km} + \gamma_{km})/2$, $B_{km} := (\sigma_{km} - \gamma_{km})/2$, $C_{km} := (\delta_{km} + \eta_{km})/2$, $D_{km} := (\delta_{km} - \eta_{km})/2$.

Используя формулы (3.3) и (3.22), (3.23), имеем

$$\sum_{k,m=0}^{\infty} \left(A_{km}^2 + B_{km}^2 + C_{km}^2 + D_{km}^2\right) < \infty,$$

т. е. ряд (3.20) будет сходиться при указанном выше способе выбора чисел A_{km}, B_{km}, C_{km}, D_{km}, где $k, m \in \mathbb{Z}_+$. Воспользовавшись, исходя из этого, теоремой **A**, рассмотрим функцию $\widetilde{f} \in L_{2,2}$, у которой коэффициенты Фурье определяются соотношением (3.21) при указанном выше способе выбора чисел A_{km}, B_{km}, C_{km}, D_{km}, $k, m \in \mathbb{Z}_+$. Как уже отмечалось, определенная таким образом функция $\widetilde{f}$ является единственной в $L_{2,2}$. Из формул (3.13) и (3.21)–(3.23) получаем соотношения (3.16), в которых $f \equiv \widetilde{f}$. При этом для $\widetilde{f}$ будет справедливой и формула (3.17), в которой правая часть вычисляется согласно (3.19). Используя определение полного модуля непрерывности и (3.17), видим, что для полученной указанным образом функции $\widetilde{f}$ имеет место формула (3.18). Тогда в силу (3.1) при любых $t, \tau \in [0, \pi]$ получаем $\omega(t, \tau) = \omega(\widetilde{f}; t, \tau)_{2,2}$.

Теорема 1 доказана.

4. Необходимое условие для описания полного модуля непрерывности в пространстве $L_{2,2}$. Условия (3.1)–(3.3), налагаемые в теореме 1 на функцию ω для того, чтобы она была полным модулем непрерывности некоторой функции $f \in L_{2,2}$, являются, с нашей точки зрения, труднопроверяемыми. Поэтому цель данного пункта — получение достаточно простого необходимого условия, касающегося функции ω.

Теорема 2. *Если $\omega(t, \tau)$ — полный модуль непрерывности в пространстве $L_{2,2}$, то имеет место неравенство*

$$\omega^2(\pi, \pi) \leq \frac{2}{\pi^2 - 4} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \omega^2(t, \tau)\, dt\, d\tau. \tag{4.1}$$

Доказательство. Пусть ω — полный модуль непрерывности в $L_{2,2}$. Тогда согласно теореме 1 существует функция $f_* \in L_{2,2}$, для которой $\omega(f_*; t, \tau)_{2,2} = \omega(t, \tau)$, $t, \tau \in [0, \pi]$. При этом, согласно формулам (3.11) и (3.19),

$$\|f_*(\cdot+h,\cdot+\mu)-f_*(\cdot,\cdot)\|_{2,2}^2=$$

$$=\sum_{k,m=0}^{\infty}\big\{\alpha_{km}(1-\cos(kh+m\mu))+\beta_{km}(1-\cos(kh-m\mu))\big\}, \tag{4.2}$$

где последовательности неотрицательных чисел $\{\alpha_{km}\}_{k,m\in\mathbb{Z}_+}$ и $\{\beta_{km}\}_{k,m\in\mathbb{Z}_+}$ удовлетворяют условию (3.3). В формуле (4.2) $\alpha_{km}=r_{km}^2(f_*)$, $\beta_{km}=\rho_{km}^2(f_*)$, $k,m\in\mathbb{Z}_+$, а правые части данных равенств определяются формулами (3.13), в которых $f\equiv f_*$.

Интегрируя обе части равенства (4.2) по переменным h и μ в пределах от 0 до π, получаем

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\|f_*(\cdot+h,\cdot+\mu)-f_*(\cdot,\cdot)\|_{2,2}^2dhd\mu=$$

$$=\sum_{k,m=0}^{\infty}\left\{\alpha_{km}\left(\pi^2-\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\cos(kh+m\mu)dhd\mu\right)+\beta_{km}\left(\pi^2-\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\cos(kh-m\mu)dhd\mu\right)\right\}=$$

$$=\sum_{k,m=1}^{\infty}\left\{\alpha_{km}\left(\pi^2+\frac{(1+(-1)^{k+1})(1+(-1)^{m+1})}{km}\right)+\beta_{km}\left(\pi^2-\frac{(1+(-1)^{k+1})(1+(-1)^{m+1})}{km}\right)\right\}+$$

$$+\pi^2\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_{k0}+\beta_{k0})+\pi^2\sum_{m=1}^{\infty}(\alpha_{0m}+\beta_{0m})=$$

$$=\pi^2\sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}_+^2\setminus(0,0)}(\alpha_{km}+\beta_{km})+4\sum_{p,q=1}^{\infty}\frac{\alpha_{2p-1,2q-1}-\beta_{2p-1,2q-1}}{(2p-1)(2q-1)}\geq$$

$$\geq\pi^2\sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}_+^2\setminus(0,0)}(\alpha_{km}+\beta_{km})-4\sum_{p,q=1}^{\infty}\frac{\alpha_{2p-1,2q-1}+\beta_{2p-1,2q-1}}{(2p-1)(2q-1)}, \tag{4.3}$$

где $\mathbb{Z}_+^2:=\mathbb{Z}_+\otimes\mathbb{Z}_+$, а знак $\otimes$ обозначает декартово произведение множеств.

Учитывая вид правой части соотношения (4.3), записываем оценку снизу двойного интеграла, расположенного в его левой части:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\big\|f_*(\cdot+h,\cdot+\mu)-f_*(\cdot,\cdot)\big\|_{2,2}^2\,dh\,d\mu\geq(\pi^2-4)\sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}_+^2\setminus(0,0)}(\alpha_{km}+\beta_{km}). \tag{4.4}$$

Поскольку

$$\omega(t,\tau)=\omega(f_*;t,\tau)_{2,2}\geq\big\|f_*(\cdot+t,\cdot+\tau)-f_*(\cdot,\cdot)\big\|_{2,2}^2,$$

где $0\leq t,\ \tau\leq\pi$, то из (4.4) и (4.2) получаем

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\omega^2(t,\tau)\,dt\,d\tau=\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\omega^2(f_*;t,\tau)_{2,2}\,dt\,d\tau\geq$$

$$\geq \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi \|f_*(\cdot + t, \cdot + \tau) - f_*(\cdot, \cdot)\|_{2,2}^2 \, dt \, d\tau \geq \frac{\pi^2 - 4}{2} \sum_{(k,m) \in \mathbb{Z}_+^2 \setminus (0,0)} 2(\alpha_{km} + \beta_{km}) \geq$$

$$\geq \frac{\pi^2 - 4}{2} \sum_{k,m=0}^{\infty} \big\{ \alpha_{km}(1 - \cos(kh + m\mu)) + \beta_{km}(1 - \cos(kh - m\mu)) \big\} =$$

$$= \frac{\pi^2 - 4}{2} \, \|f_*(\cdot + h, \cdot + \mu) - f_*(\cdot, \cdot)\|_{2,2}^2, \tag{4.5}$$

где $|h|, |\mu| \leq \pi$. Используя определение полного модуля непрерывности функции f_*, примененное к левой части соотношения (4.5), имеем

$$\int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi \omega^2(t, \tau) dt d\tau \geq \frac{\pi^2 - 4}{2} \, \omega^2(f_*; \pi, \pi)_{2,2} = \frac{\pi^2 - 4}{2} \, \omega^2(\pi, \pi). \tag{4.6}$$

Требуемое неравенство (4.1) следует из соотношения (4.6), что и завершает доказательство теоремы 2.

Непосредственно применяя соотношение (4.1) к $\widetilde{\omega}(t, \tau) := (t + \tau)^\alpha$, где $\alpha > 0$, путем несложных вычислений можно убедиться в том, что при $\alpha > 0,980129$ функция $\widetilde{\omega}$ не является полным модулем непрерывности в пространстве $L_{2,2}$.

В заключение отметим, что константа $2/(\pi^2 - 4)$ в правой части неравенства (4.1), скорее всего, может быть уменьшена. Однако следует особо подчеркнуть, что основной целью данного сообщения была демонстрация того, что основные результаты работ О. В. Бесова, С. Б. Стечкина [5] и В. А. Юдина [6] могут быть соответствующим образом распространены на случай 2π-периодических по обеим переменным функций $f(x, y)$, принадлежащих пространству $L_{2,2}$.

Литература

1. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
2. *Никольский С. М.* Ряд Фурье с заданным модулем непрерывности // Докл. АН СССР. – 1946. – **52**, № 3. – С. 191 – 194.
3. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
4. *Lebesque H.* Sur be representation trigonometrique approchee des functions satisfaisant a une condition de Lipschitz // Bull. Soc. Math. France. – 1910. – **38**. – P. 184 – 210.
5. *Бесов О. В., Стечкин С. Б.* Описание модулей непрерывности в L_2 // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1975. – **134**. – С. 22 – 25.
6. *Юдин В. А.* О модулях непрерывности в L_2 // Сиб. мат. журн. – 1972. – **20**, № 2. – С. 449 – 450.
7. *Конягин С. В.* О модулях непрерывности функций // Всесоюз. школа по теории функций, посвящ. 100-летию со дня рождения акад. Н. Н. Лузина: Тез. докл. (Кемерово, 10 – 19 сент. 1983 г.). – Кемерово, 1983. — С. 59.
8. *Иванов В. И.* О модуле непрерывности в L_p // Мат. заметки. – 1987. – **41**, № 5. – С. 682 – 686.
9. *Янушаускас А. И.* Кратные тригонометрические ряды. – Новосибирск: Наука, 1986. – 272 с.

Получено 09.10.16