УДК 517.9

В. Я. Данілов, О. Є. Лаврова, О. М. Станжицький (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

В'ЯЗКІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ ГАМІЛЬТОНА – ЯКОБІ – БЕЛЛМАНА НА ЧАСОВИХ ШКАЛАХ

We introduce the concept of viscous solution for the Bellman equation on time scales and establish conditions for the existence and uniqueness of this solution.

Введена концепция вязкого решения уравнения Беллмана на временных шкалах. Получены условия существования и единственности такого решения.

Вступ. Метод динамічного програмування Беллмана є одним із основних методів дослідження задач оптимального керування. Основну роль тут відіграє функція Беллмана (функція ціни), що є мінімальним значенням критерію якості. Для звичайних диференціальних рівнянь функція Беллмана, у випадку її гладкості, задовольняє рівняння динамічного програмування — нелінійне диференціальне рівняння першого порядку в частинних похідних типу Гамільтона – Якобі — рівняння Беллмана. Більш того, гладка функція Беллмана є єдиним розв'язком такого рівняння з відповідними крайовими умовами [9]. З іншого боку, існування гладкого розв'язку рівняння Беллмана дозволяє досить просто знайти оптимальне керування у формі оберненого зв'язку (див. [9, 14]). Зазначимо, що в цьому випадку можна розв'язувати задачі оптимального керування не лише для звичайних рівнянь, але, наприклад, і для імпульсних [15]. Однак дана процедура реалізується досить рідко, оскільки, як правило, функція Беллмана не є гладкою, що є наслідком нелінійності рівняння Беллмана.

Ця обставина змусила шукати більш слабке поняття розв'язку рівняння Беллмана. У 1983 році Crandall і Lions [8] увели поняття в'язкого розв'язку рівняння Гамільтона – Якобі – Беллмана. При цьому виявилось, що при досить широких умовах неперервна функція Беллмана є єдиним, в такому сенсі, розв'язком крайової задачі (задачі Коші) для рівняння Беллмана.

Аналогічні питання для рівнянь на ейлерових часових шкалах $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}_+$, $h > 0$, тобто для різницевих рівнянь з кроком h, розглядалися, наприклад, у роботах [6, 7, 10]. При цьому відповідні рівняння Беллмана є різницевими рівняннями, розв'язки яких можна розглядати у класі неперервних функцій. Основним результатом цих робот є доведення збіжності даних розв'язків при $h \to 0$ до єдиного в'язкого розв'язку рівняння Беллмана відповідної задачі оптимізації для звичайного диференціального рівняння.

Щодо рівнянь на загальних часових шкалах зауважимо, що їх теорія почалася з роботи [12], де було введено поняття Δ-похідної. Останнє дало змогу з єдиної точки зору розглянути неперервний і дискретний аналіз. Основи цієї теорії викладено в монографіях [2, 3]. У англомовній літературі такі рівняння називаються динамічними.

У роботах [5, 17] для задач оптимального керування на часових шкалах отримано певні варіанти принципу максимуму, а в роботах [13, 16] виведено аналог для часових шкал рівняння Беллмана.

В даній роботі розвинуто концепцію в'язких розв'язків рівняння Беллмана на часових шкалах. Тут основна складність дослідження пов'язана зі складною топологічною структурою часової шкали, що зумовлює нетривіальну взаємну поведінку граничних і ізольованих точок. При цьому в граничних і ізольованих точках тип рівняння Беллмана різний: в граничних точках — це диференціальне рівняння, а в ізольованих — різницеве.

Робота складається зі вступу і трьох пунктів. У першому пункті наведено основні поняття, пов'язані з теорією часових шкал. У другому пункті дано постановку задачі та вивчено деякі властивості функції Беллмана. Означенню в'язкого розв'язку та встановленню умов його існування і єдиності присвячено третій пункт.

1. Основні поняття, пов'язані з теорією часових шкал. Наведемо необхідні для подальших досліджень поняття і означення з теорії рівнянь на часових шкалах.

Часовою шкалою $\mathbb{T}$ називається довільна, непорожня, замкнена підмножина дійсних чисел. Для кожної множини $A \subset \mathbb{R}$ позначимо $A_{\mathbb{T}} = A \cap \mathbb{T}$.

Визначимо прямий і обернений оператори стрибка $\sigma, \rho \colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ таким чином: $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} \colon s > t\}$ і $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} \colon s < t\}$ (причому $\inf \varnothing := \sup \mathbb{T}$ і $\sup \varnothing := \inf \mathbb{T}$). Функція зернистості $\mu \colon \mathbb{T} \to [0, \infty)$ визначається як $\mu(t) = \sigma(t) - t$. Точка $t \in \mathbb{T}$ називається ліво-граничною (LD) $\big($ліво-розсіяною (LS), право-граничною (RD) або право-розсіяною (RS)$\big)$, якщо $\rho(t) = t$ $\big(\rho(t) < t,\ \sigma(t) = t$ або $\sigma(t) > t\big)$. Якщо $\mathbb{T}$ має ліво-розсіяний максимум M, то визначимо $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} \setminus \{M\}$; у протилежному випадку покладемо $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$.

Функція $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^d$ називається Δ-диференційовною в точці $t \in \mathbb{T}^k$, якщо границя

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

існує в $\mathbb{R}^d$. Нагадаємо відомі результати (див. [3]):

a) якщо $t \in \mathbb{T}^k$ — право-гранична точка $\mathbb{T}$, то f — Δ-диференційовна в t тоді і тільки тоді, коли границя

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

існує в $\mathbb{R}^d$;

b) якщо $t \in \mathbb{T}^k$ — право-розсіяна точка $\mathbb{T}$ і f є неперервною по t, тоf — Δ-диференційовна в t і

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}.$$

Наступна теорема є аналогом похідної складної функції.

Теорема 1 [16]. *Нехай* $V \colon \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $V \in C^1(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ *і функція* $x \colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *є* Δ-*диференційовною. Припустимо, що* $z \colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $z(\cdot) = V(\cdot, x(\cdot))$. *Тоді для* $t_0 \in \mathbb{T}^k$ *і* $x_0 = x(t_0)$ *функція* z *є* Δ-*диференційовною і має місце формула*

$$z^{\Delta}(t_0) = \int_0^1 \frac{\partial V}{\partial x}\big(\sigma(t_0), x_0 + h\mu(t_0)x^{\Delta}(t_0)\big) dh x^{\Delta}(t_0) + \frac{\partial V}{\Delta t}(t_0, x_0).$$

Для будь-яких $a, b \in \mathbb{T}$ і довільного $s \in [a, b)_{\mathbb{T}} \cap \mathrm{RD}$ покладемо

$$\mathcal{V}_s^b = \big\{\beta \geq 0 \colon s + \beta \in [s, b)_{\mathbb{T}}\big\}.$$

2. Постановка задачі. Властивості функції Беллмана. Нехай $\mathbb{T}$ — така часова шкала, що $\sup \mathbb{T} = +\infty$ і $t_0, t_1 \in \mathbb{T}$; $Q = [t_0, t_1)_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^d$, $\overline{Q} = [t_0, t_1]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^d$; замикання множини Q, а $\partial Q = \{t_1\} \times \mathbb{R}^d$ — її границя.

Розглянемо сім'ю задач оптимального керування на відрізку $[t, t_1]_{\mathbb{T}}$, $t \in [t_0, t_1)_{\mathbb{T}}$:

$$x^{\Delta} = f(t, x, u), \tag{1}$$

$$x(t) = x, \tag{2}$$

$$J(t,x,u) = \int\limits_{[t,t_1)_{\mathbb{T}}} L\big(s, x(s), u(s)\big)\,\Delta s + \psi\big(x(t_1)\big) \to \inf. \tag{3}$$

Тут $x \in \mathbb{R}^d$ — фазовий вектор, $u = u(t)$ — вектор керування. Нехай $U \subset \mathbb{R}^m$ — компакт в $\mathbb{R}^m$. Допустимими керуваннями $u = u(t)$ вважаємо функції з класу $\mathcal{U}(t) = L^\infty([t,t_1]_{\mathbb{T}}, U)$ обмежених, Δ-вимірних [3] функцій, які визначені на $[t,t_1]_{\mathbb{T}}$ і набувають значень в U. Стандартним чином вводиться функція Беллмана

$$V(t,x) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}(t)} J(t,x,u). \tag{4}$$

Відносно функцій $f\colon [t_0,t_1]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}^d$, $L\colon [t_0,t_1]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}^1$ і $\psi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^1$ будемо вважати виконаними такі умови:

1) f — неперервна за сукупністю аргументів функція, задовольняє глобальну по x умову Ліпшиця зі сталою K;

2) L і ψ — неперервні за своїми аргументами функції, що задовольняють за змінною x глобальну умову Ліпшиця зі сталою K.

Щодо властивостей функції Беллмана справедливою є така теорема.

Теорема 2. *Нехай функції f, L і ψ задовольняють умови* 1 *і* 2. *Тоді функція Беллмана є локально обмеженою і локально ліпшицевою в $\overline{Q}$.*

Доведення. Зафіксуємо $r > 0$ і розглянемо $B_r = \{x \in \mathbb{R}^d \colon |x| \le r\}$ — кулю радіуса r. Виберемо $(t,x),(t,y) \in \overline{Q}$ так, щоб $x, y \in B_r$ і $u(\cdot) \in \mathcal{U}(t)$. Нехай $x(\cdot)$ і $y(\cdot)$ — такі розв'язки рівняння (1), що $x(t) = x$, $y(t) = y$ відповідно. Тоді для $s \in [t,t_1]_{\mathbb{T}}$ внаслідок неперервності функції f і компактності U маємо

$$\big|x(s)\big| \le |x| + \int\limits_{[t,s)_{\mathbb{T}}} K\,|x(s)|\,\Delta s + \int\limits_{[t,s)_{\mathbb{T}}} \big|f(s,0,u(s))\big|\,\Delta s \le |x| + A + \int\limits_{[t,s)_{\mathbb{T}}} K\,|x(s)|\,\Delta s. \tag{5}$$

З аналога нерівності Гроноулла для часових шкал [2, с. 257] при $s \in [t,t_1]_{\mathbb{T}}$ отримуємо

$$|x(t)| \le (r + A)e_K(s,t), \tag{6}$$

де $e_K(s,t)$ — експоненціальна функція [1, 2]. Для подальшого доведення нам потрібна така лема.

Лема 1. *Експоненціальна функція $e_K(t,t_0)$ обмежена на $[t_0,t_1]_{\mathbb{T}}$ з оцінкою, що не залежить від часової шкали.*

Доведення. Відомо, що $e_K(t,t_0)$ — розв'язок задачі Коші

$$x^\Delta = Kx, \qquad x(t_0) = 1.$$

Тоді

$$x(t) = 1 + K \int\limits_{[t_0,t)_{\mathbb{T}}} x(\tau)\,\Delta\tau. \tag{7}$$

Розв'язуючи (7) методом послідовних наближень, маємо

$$|x_1(t)| \leq 1 + K \int\limits_{[t_0,t)_{\mathbb{T}}} \Delta s \leq 1 + K(t - t_0).$$

Тому з леми 3 [4] отримуємо

$$|x_2(t)| \leq 1 + K \int\limits_{[t_0,t)_{\mathbb{T}}} |x_1(s)|\Delta s \leq 1 + K(t - t_0) + \frac{K^2(t - t_0)^2}{2}.$$

Отже, для всіх $n \in \mathbb{N}$

$$|x_n(t)| \leq e^{K(t - t_0)},$$

що і доводить лему 1.

Звідси і з леми 1 для $t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$ і $x \in B_r$ випливає нерівність

$$|x(t)| \leq (r + A)e^{K(t_1 - t_0)} = A_1. \tag{8}$$

Тоді локальна обмеженість функції Беллмана легко випливає з обмеженості L і ψ для $t \in \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}},\ |x| \leq A_1$ і $u \in U$. Для $s \in [t, t_1]_{\mathbb{T}}$ справджується оцінка

$$|x(s) - y(s)| \leq |x - y| e_K(s, t). \tag{9}$$

З (9) і леми 1 отримуємо оцінку

$$\big|x(s) - y(s)\big| \leq C_1|x - y| \tag{10}$$

для довільних $s \in [t, t_1]_{\mathbb{T}},\ x \in \mathbb{R}^d$ і деякої сталої $C_1 > 0$, що не залежить від $t,\ x,\ u$. Отже,

$$\big|J(t,x,u) - J(t,y,u)\big| \leq \int\limits_{[t,t_1)_{\mathbb{T}}} \big|L(s,x(s),u(s)) - L(s,y(s),u(s))\big|\Delta s + \big|\psi(x(t_1)) - \psi(y(t_1))\big| \leq$$

$$\leq KC_1(t_1 - t)|x - y| + KC_1|x - y| \leq C_2|x - y|. \tag{11}$$

Таким чином, з (11) випливає, що

$$\big|V(t,x) - V(t,y)\big| \leq \sup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}(t)} \big|J(t,x,u) - J(t,y,u)\big| \leq C_3|x - y|. \tag{12}$$

Зафіксуємо $(t,x) \in \overline{Q},\ |x| \leq r,\ \tau \in [t, t_1]_{\mathbb{T}}$ і $u(\cdot) \in \mathcal{U}(t)$. Звуження $u(\cdot)$ на $[\tau, t_1]$ є елементом $\mathcal{U}(\tau)$, яке ми знову позначимо через $u(\cdot)$. В цих позначеннях з урахуванням (11) маємо

$$\big|J(t,x,u) - J(\tau,x,u)\big| \leq \big|J(t,x,u) - J(\tau,x(\tau),u)\big| + \big|J(\tau,x(\tau),u) - J(\tau,x,u)\big| \leq$$

$$\leq \left|\int\limits_{[t,\tau)_{\mathbb{T}}} L(s,x(s),u(s))\Delta s\right| + \big|J(\tau,x(\tau),u) - J(\tau,x,u)\big| \leq C(r)|\tau - t| + C_2|x(\tau) - x|. \tag{13}$$

Стала $C(r)$ внаслідок локальної обмеженості L залежить від r, але

$$x(\tau) = x + \int\limits_{[t,\tau)_{\mathbb{T}}} f(s,x(s),u(s))\,\Delta s.$$

Тоді з обмеженості f на $t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}},\ |x| \le r,\ u \in U$ маємо

$$\big|x(\tau) - x\big| \le C(r)|\tau - t|.$$

Таким чином із (13) отримуємо

$$\big|V(t,x) - V(\tau,x)\big| \le \sup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}(t)} \big|J(t,x,u) - J(\tau,x,u)\big| \le C(r)|\tau - t| + C_2 C|\tau - t| = C_4(r)|\tau - t|. \tag{14}$$

Тоді з (12) і (14) для (t,x) і $(s,y) \in \overline{Q}$ маємо

$$\big|V(t,x) - V(s,y)\big| \le \big|V(t,x) - V(s,x)\big| + \big|V(s,x) - V(s,y)\big| \le C_4(r)|t - s| + C_3|x - y|,$$

що і доводить теорему.

***Зауваження* 1.** Якщо функції f, L, ψ обмежені, то з доведення теореми в цьому випадку можна легко отримати, що функція Беллмана є глобально ліпшицевою по $x,\ t$ і глобально обмеженою.

3. В'язкі розв'язки на часових шкалах. ***3.1. Абстрактний принцип динамічного програмування.*** В роботі [16] для часової шкали отримано аналог принципу динамічного програмування

$$V(t,x) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}(t)} \left[\ \int\limits_{[t,\tau)_{\mathbb{T}}} L(s, x(s), u(s))\, \Delta s + V(\tau, x(\tau))\right] \quad \forall \tau \in [t, t_1]_{\mathbb{T}}. \tag{15}$$

Там же, а також у роботі [13] для більш загальної ситуації введено аналог рівняння Гамільтона – Якобі – Беллмана на часових шкалах

$$V_t^{\Delta}(t,x) + \min_{v\in U} \left\{ \int\limits_0^1 V_x'(\sigma(t), x + h\mu(t) f(t,x,v)) dh f(t,x,v) + L(t,x,v) \right\} = 0 \tag{16}$$

з граничною умовою

$$V(t_1, x) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{17}$$

Рівняння (16) запишемо у більш природному вигляді, що фігурує в неперервному випадку:

$$-V_t^{\Delta}(t,x) + \sup_{v\in U} \left\{ -\int\limits_0^1 V_x'(\sigma(t), x + h\mu(t) f(t,x,v)) dh f(t,x,v) - L(t,x,v) \right\} = 0. \tag{18}$$

Останнє рівняння в право-граничних точках набирає вигляду класичного рівняння Гамільтона – Якобі – Беллмана

$$-\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right) = 0,$$

де $H(t,x,p) = \sup_{v\in V} \big\{-f(t,x,v)p - L(t,x,v)\big\}$ — гамільтоніан.

Нехай $t_0 \le t \le r \le t_1,\ t, r \in \mathbb{T}$. Визначимо для обмеженої знизу функції $\psi(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^1$ і функції $u(\cdot) \in \mathcal{U}(t)$

$$T_{t,r;u}\psi(x) = \int\limits_{[t,r)_{\mathbb{T}}} L(s, x(s), u(s))\Delta s + \psi(x(r)). \tag{19}$$

Тут $x(s)$ — розв'язок рівняння (1) з початковою умовою $x(t) = x$. За допомогою (19) утворимо нелінійну напівгрупу

$$(\mathcal{T}_{t,r}\psi)(x) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}(t)} T_{t,r;u}\psi(x). \tag{20}$$

Оскільки L і ψ — обмежені знизу функції, то і $\mathcal{T}_{t,r}\psi$ також обмежена знизу. Зрозуміло, що $\mathcal{T}_{t,r}$ — монотонний оператор, тобто

$$\mathcal{T}_{t,r}\phi \le \mathcal{T}_{t,r}\psi, \qquad \text{якщо} \quad \phi \le \psi. \tag{21}$$

Таким чином, принцип динамічного програмування можна записати у вигляді

$$\big(\mathcal{T}_{t,t_1}\psi\big)(x) = \big(\mathcal{T}_{t,r}(\mathcal{T}_{r,t_1}\psi)\big)(x) \tag{22}$$

для довільного $t_0 \le t \le r \le t_1$, $t_0, t, r, t_1 \in \mathbb{T}$. Отже, напівгрупова властивість для $\mathcal{T}_{t,r}$ виконується при $r = t_1$. Неважко бачити, що без будь-яких змін можна отримати (15) на довільному відрізку $[t, s]_{\mathbb{T}}$, $s \in \mathbb{T}$, $s \in [t, t_1]_{\mathbb{T}}$. Звідси випливає напівгрупова властивість

$$(\mathcal{T}_{t,s}\psi)(x) = \big(\mathcal{T}_{t,r}(\mathcal{T}_{r,s}\psi)\big)(x). \tag{23}$$

З (20) випливає, що функція Беллмана має вигляд $V(t,x) = (\mathcal{T}_{t,t_1}\psi)(x)$. Тоді, використовуючи напівгрупову властивість (23), переконуємося, що функція Беллмана задовольняє співвідношення

$$V(t,x) = \big(\mathcal{T}_{t,r}V(r,\cdot)\big)(x) \tag{24}$$

для довільного $x \in \mathbb{R}^d$, $t_0 \le t \le r \le t_1$, $t_0, t, r, t_1 \in \mathbb{T}$.

Співвідношення (24) назвемо абстрактним принципом динамічного програмування.

3.2. Генератор напівгрупи $\{\mathcal{T}_{t,r}\}$ і означення в'язкого розв'язку. Введемо поняття генератора G_t напівгрупи $\{\mathcal{T}_{t,r}\}$. На відміну від неперервної часової шкали $(\mathbb{R}^1)$ (див., наприклад, [9]) тут потрібно розрізняти випадки $\mu(t) > 0$ і $\mu(t) = 0$.

Візьмемо довільне $t \in [t_0, t_1)_{\mathbb{T}}$, тоді:

1) якщо $\mu(t) > 0$, то покладемо

$$(G_t w(t,\cdot))(x) = \frac{1}{\mu(t)}\big[(\mathcal{T}_{t,\sigma(t)}w(\sigma(t),\cdot))(x) - w(t,x)\big]; \tag{25}$$

2) якщо $\mu(t) = 0$, то

$$(G_t w(t,\cdot))(x) = \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\big[(\mathcal{T}_{t,t+h}w(t+h,\cdot))(x) - w(t,x)\big], \tag{26}$$

де $h \in \mathcal{V}_t^{t_1} = \big\{\beta \ge 0 \colon t + \beta \in [t, t_1]_{\mathbb{T}}\big\}$.

Позначимо через D_t область визначення генератора G_t, тобто ті функції $w(t,x)$, для яких мають зміст співвідношення (25), (26).

Якщо $W(t,\cdot) \in D_t$ для всіх $t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$, то з (24) формально отримуємо

$$(G_t W(t,\cdot))(x) = 0, \quad (t,x) \in Q. \tag{27}$$

Означення 1. *Рівняння* (27) *називається абстрактним рівнянням динамічного програмування.*

Означення 2. *Функція* $W(t,x) \in D_t$ *називається класичним розв'язком рівняння* (27), *якщо* W *задовольняє* (27) *для всіх* $(t,x) \in Q$.

Взагалі, функція Беллмана не завжди належить D_t і, таким чином, вона не є класичним розв'язком рівняння (27). У зв'язку з цим, як і в неперервному випадку, введемо поняття в'язкого розв'язку. Однак у розглядуваному випадку, у порівнянні з неперервним випадком, є деяка відмінність в області D_t визначення генератора G_t. Звісно, якщо $\mu(t) = 0$, то для існування границі (26) вимагається деяка гладкість функції $w(t,x)$. Але якщо $\mu(t) > 0$, то генератор G_t визначається співвідношенням (25), яке визначене, наприклад, для неперервних, обмежених знизу функцій, зокрема і для самої функції Беллмана V. Останнє приводить до наступної концепції в'язкого розв'язку.

Нехай $Q = [t_0, t_1)_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^d$, D_t — область визначення G_t. Покладемо:

1) якщо $\mu(t) > 0$, то $D_t = C(Q) \cap M(\overline{Q})$, тут $M(\overline{Q})$ — множина всіх обмежених знизу функцій;

2) якщо $\mu(t) = 0$, то $D_t = C^1(Q) \cap M(\overline{Q})$, при цьому похідна по t розуміється, звісно, як Δ-похідна.

Означення 3. *Нехай* $W \in C(\overline{Q}) \cap M(\overline{Q})$. *Тоді*:

1) W — *в'язкий суброзв'язок рівняння* (27) *у* Q, *якщо*:

а) *в довільній точці* $(t,x) \in Q$ *такій, що* $\mu(t) > 0$, $W(t,x)$ *задовольняє* (27);

б) *для довільного* $w \in D_t$

$$(G_t w(\bar{t}, \cdot))(\bar{x}) \geq 0 \tag{28}$$

в кожній точці $(\bar{t}, \bar{x}) \in Q$ *такій, що* $\mu(\bar{t}) = 0$ *і* $(\bar{t}, \bar{x})$ *є точкою максимуму* $W - w$ *в* $\overline{Q}$, *а також* $W(\bar{t}, \bar{x}) = w(\bar{t}, \bar{x})$;

2) W — *в'язкий суперрозв'язок рівняння* (27) *у* Q, *якщо*:

в) *виконано умову* а) *з пункту* 1;

г) *для кожного* $w \in D_t$

$$(G_t w(\bar{t}, \cdot))(\bar{x}) \leq 0 \tag{29}$$

в кожній точці $(\bar{t}, \bar{x}) \in Q$ *такій, що* $\mu(\bar{t}) = 0$ *і* $(\bar{t}, \bar{x})$ *є точкою мінімуму* $W - w$ *в* $\overline{Q}$, *а також* $W(\bar{t}, \bar{x}) = w(\bar{t}, \bar{x})$;

3) *функція* W *є в'язким розв'язком рівняння* (27) *у* Q, *якщо вона одночасно є і суброзв'язком, і суперрозв'язком рівняння* (27) *в* Q.

Встановимо умови, при яких функція Беллмана є в'язким розв'язком.

Теорема 3. *Нехай виконуються такі умови*:

1) $f\colon [t_0, t_1]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}^d$, $L\colon [t_0, t_1]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}^1$ *і* $\psi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^1$;

2) f — *неперервна по* (t,x,u)*функція із області визначення*, L *і* ψ — *рівномірно неперервні функції в* $\overline{Q} \times U$ *і* $\mathbb{R}^d$ *відповідно*;

3) f, L, ψ — *глобально обмежені функції зі сталою* C, *що задовольняють за змінною* x *глобальну умову Ліпшиця зі сталою* K.

Тоді функція Беллмана $V(t,x)$ *є в'язким розв'язком рівняння* (27) *у* Q.

Доведення. Функція Беллмана визначається таким чином:

$$V(t,x) = (\mathcal{T}_{t,t_1}\psi)(x).$$

Згідно із зауваженням 1, функція Беллмана є глобально ліпшицевою по x, t і глобально обмеженою. Покажемо, що $V(t,x)$ є в'язким суброзв'язком. Якщо точка $t \in \mathrm{RS}$, то з (24) і (25) маємо (27). Нехай точка $\bar{t} \in \mathrm{RD}$, $w \in D_t$ і $(\bar{t},\overline{x}) \in Q$ є точкою максимуму $V - w$ в $\overline{Q}$, що задовольняє $V(\bar{t},\overline{x}) = w(\bar{t},\overline{x})$. Тоді $w(t,x) \geq V(t,x)$. Використовуючи напівгрупову властивість (23) для $s = t_1$ і $r \in [\bar{t}, t_1]_{\mathbb{T}}$, отримуємо

$$w(r,x) \geq V(r,x) = (\mathcal{T}_{r,t_1}\psi(\cdot))(x).$$

Тоді з властивості монотонності (21) маємо

$$\big(\mathcal{T}_{\bar{t},r} w(r,\cdot)\big)(x) \geq \mathcal{T}_{\bar{t},r}\left(\mathcal{T}_{r,t_1}\psi(\cdot)\right)(x).$$

Отже,

$$\big(\mathcal{T}_{\bar{t},r} w(r,\cdot)\big)(\overline{x}) \geq \big(\mathcal{T}_{\bar{t},t_1}\psi(\cdot)\big)(\overline{x}) = V(\bar{t},\overline{x}) = w(\bar{t},\overline{x}).$$

Таким чином, для довільного $h \in \mathcal{V}_{\bar{t}}^{t_1}$, поклавши $r = \bar{t} + h$, одержимо

$$\big(G_{\bar{t}} w(\bar{t},\cdot)\big)(\overline{x}) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}\left[(\mathcal{T}_{\bar{t},\bar{t}+h} w(\bar{t}+h,\cdot))(\overline{x}) - w(\bar{t},\overline{x})\right] \geq 0.$$

Отже, функція V є в'язким суброзв'язком рівняння (27). Той факт, що функція V є суперрозв'язком, доводиться аналогічно.

Вивчимо тепер зв'язок між поняттям класичного розв'язку і поняттям в'язкого розв'язку. Як і в класичному (неперервному) випадку (див., наприклад, [9], лема 5.1) має місце наступна пропозиція.

Пропозиція 1. *Припустимо, що* $W(t,x) \in D_t$. W *є в'язким розв'язком рівняння* (27) *у* Q *тоді і тільки тоді, коли* W *є класичним розв'язком рівняння* (27).

Доведення. Згідно з означенням 3, в право-розсіяних точках має виконуватись рівність $(G_t W(t,\cdot))(x) = 0$ як для суброзв'язку, так і суперрозв'язку. Але, згідно з означенням 2, така ж рівність виконується і для класичного розв'язку рівняння (27). Для право-граничних точок доведення аналогічне неперервному випадку ([9], лема 5.1).

З'ясуємо тепер вигляд генератора G_t в розглядуваному випадку. Знову будемо розрізняти випадки право-розсіяних і право-граничних точок. Візьмемо довільне $(t,x) \in Q$.

1. *Випадок* $\mu(t) > 0$. Нехай v — довільна точка з U, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ — таке керування, що $u(t) = v$, і $x(t)$ — траєкторія, що відповідає керуванню $u(\cdot)$ і початковій умові $x(t) = x$. Нехай $w(t,x) \in D_t$, тобто $w \in C(Q) \cap M(\overline{Q})$. Тоді, згідно з (25), отримуємо

$$(G_t w(t,\cdot))(x) = \frac{1}{\mu(t)}\left[\big(\mathcal{T}_{t,\sigma(t)} w(\sigma(t),\cdot)\big)(x) - w(t,x)\right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{\mu(t)}\left[\int\limits_{[t,\sigma(t))_{\mathbb{T}}} L(s,x(s),u(s))\Delta s + w(\sigma(t),x(\sigma(t))) - w(t,x)\right] =$$

$$= \frac{1}{\mu(t)}\big[-w(t,x) - (-w(\sigma(t), x+\mu(t)f(t,x,v)) - L(t,x,v)\mu(t))\big].$$

Отже,

$$(G_t w(t,\cdot))(x) \le \frac{1}{\mu(t)}\big[-w(t,x) - \{-w(\sigma(t), x+\mu(t)f(t,x,v)) - L(t,x,v)\mu(t)\}\big].$$

Ця нерівність виконується для всіх $v \in U$, а тому

$$(G_t w(t,\cdot))(x) \le \frac{1}{\mu(t)}\Big[-w(t,x) - \sup_{v\in U}\{-w(\sigma(t), x+\mu(t)f(t,x,v)) - L(t,x,v)\mu(t)\}\Big]. \tag{30}$$

З іншого боку, оскільки

$$\big(\mathcal{T}_{t,\sigma(t)} w(\sigma(t),\cdot)\big)(x) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}(t)}\left\{\int\limits_{[t,\sigma(t))_{\mathbb{T}}} L(s,x(s),u(s))\Delta s + w\big(\sigma(t), x(\sigma(t))\big)\right\},$$

то для довільного $\varepsilon > 0$ існують допустиме керування $u_\varepsilon(\cdot)$ і відповідна траєкторія $x_\varepsilon(\cdot)$ такі, що

$$\big(\mathcal{T}_{t,\sigma(t)} w(\sigma(t),\cdot)\big)(x) \ge \int\limits_{[t,\sigma(t))_{\mathbb{T}}} L(s,x_\varepsilon(s),u_\varepsilon(s))\Delta s + w\big(\sigma(t), x_\varepsilon(\sigma(t))\big) - \varepsilon.$$

Тоді

$$\frac{1}{\mu(t)}\big[(\mathcal{T}_{t,\sigma(t)} w(\sigma(t),\cdot))(x) - w(t,x)\big] \ge L(t,x,u_\varepsilon(t)) - \frac{\varepsilon}{\mu(t)} + \frac{1}{\mu(t)}\big[w\big(\sigma(t), x_\varepsilon(\sigma(t))\big) - w(t,x)\big] =$$

$$= \frac{1}{\mu(t)}\big[-w(t,x) + \big\{w\big(\sigma(t), x+\mu(t)f(t,x,u_\varepsilon(t))\big) + L(t,x,u_\varepsilon(t))\mu(t)\big\}\big] - \frac{\varepsilon}{\mu(t)} \ge$$

$$\ge \frac{1}{\mu(t)}\left[-w(t,x) + \inf_{v\in U}\big\{w(\sigma(t), x+\mu(t)f(t,x,v)) + L(t,x,v)\mu(t)\big\}\right] - \frac{\varepsilon}{\mu(t)}. \tag{31}$$

Остання нерівність виконується для довільного $\varepsilon > 0$, отже, маємо

$$\frac{1}{\mu(t)}\big[(\mathcal{T}_{t,\sigma(t)} w(\sigma(t),\cdot))(x) - w(t,x)\big] \ge$$

$$\ge \frac{1}{\mu(t)}\left[-w(t,x) - \sup_{v\in U}\big\{-w(\sigma(t), x+\mu(t)f(t,x,v)) - L(t,x,v)\mu(t)\big\}\right].$$

Звідси і з (30) для право-розсіяних точок отримуємо

$$(G_t w(t,\cdot))(x) = \frac{1}{\mu(t)}\left[-w(t,x) - \sup_{v\in U}\big\{-w(\sigma(t), x+\mu(t)f(t,x,v)) - L(t,x,v)\mu(t)\big\}\right]. \tag{32}$$

2. *Випадок* $\mu(t) = 0$. В цьому випадку $D_t = C^1(Q) \cap M(\overline{Q})$. Нехай знову v — довільна точка з U, $u(\cdot) \in \mathcal{U}(t)$ — таке керування, що $\lim_{s\downarrow t} u(s) = v$, а $x(\cdot)$ — фазова траєкторія, яка відповідає керуванню $u(\cdot)$ і початковій умові $x(t) = x$. Для $h \in \mathcal{V}_t^{t_1}$ маємо

$$\frac{1}{h}\big[(\mathcal{T}_{t,t+h} w(t+h,\cdot))(x) - w(t,x)\big] \le$$

$$\leq \frac{1}{h} \int\limits_{[t,t+h)_{\mathbb{T}}} L(s,x(s),u(s))\Delta s + \frac{1}{h}\big[w(t+h,x(t+h)) - w(t,x)\big] =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int\limits_{[t,t+h)_{\mathbb{T}}} L(s,x(s),u(s))\Delta s + \int\limits_{[t,t+h)_{\mathbb{T}}} \frac{d}{\Delta t} w(s,x(s))\Delta s \right) =$$

$$= \frac{1}{h} \int\limits_{[t,t+h)_{\mathbb{T}}} L(s,x(s),u(s))\Delta s +$$

$$+\frac{1}{h} \int\limits_{(t,t+h]_{\mathbb{T}}} \left[\frac{\partial w}{\partial \Delta t}(s,x(s)) + \int\limits_0^1 \frac{\partial w}{\partial x}(\sigma(s), x(s) + \mu(s)\tau x^{\Delta}(s)) d\tau \cdot x^{\Delta}(s) \right] \Delta s. \qquad (33)$$

Перетворення другого інтеграла проведено за допомогою аналога формули диференціювання складної функції (теорема 1). Але $\big(x(s),u(s)\big) \to \big(x(t),u(t)\big)$ при $s \downarrow t,$ а L є неперервною, тому з (33) отримуємо

$$\left| \frac{1}{h} \int\limits_{[t,t+h)_{\mathbb{T}}} L(s,x(s),u(s))\,\Delta s - L(t,x,v) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{h} \int\limits_{[t,t+h)_{\mathbb{T}}} |L(s,x(s),u(s)) - L(t,x,v)|\;\Delta s \to 0, \quad h \to 0.$$

Тоді

$$\frac{1}{h} \int\limits_{[t,t+h)_{\mathbb{T}}} L(s,x(s),u(s))\,\Delta s \to L(t,x,v), \quad h \to 0. \qquad (34)$$

Аналогічно, враховуючи гладкість $w(t,x),$ одержуємо

$$\frac{1}{h} \int\limits_{[t,t+h)_{\mathbb{T}}} \frac{\partial}{\Delta t} w(s,x(s))\,\Delta s \to \frac{\partial}{\Delta t} w(t,x). \qquad (35)$$

Далі

$$\left| \frac{1}{h} \int\limits_{[t,t+h)_{\mathbb{T}}} \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial x} w(\sigma(s), x(s) + \mu(s) f(s,x(s),u(s))\tau)\, d\tau \times \right.$$

$$\left. \times\, f(s,x(s),u(s))\,\Delta s - \frac{\partial}{\partial x} w(t,x) f(t,x,v) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{h} \int\limits_{[t,t+h)_{\mathbb{T}}} \left(\int\limits_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial x} w(\sigma(s), x(s) + \mu(s) f(s,x(s),u(s))\tau) - \frac{\partial}{\partial x} w(t,x) \right| \times \right.$$

$$\times\big|f(s,x(s),u(s))\big|d\tau \ + \left|\frac{\partial}{\partial x}w(t,x)\right|\big|f(s,x(s),u(s))-f(t,x,v)\big|\Bigg)\Delta s. \tag{36}$$

Очевидно, що $\sigma(s)\to t$ при $s\to t$ і $\mu(s)\to 0$ при $s\to t$. Тоді з обмеженості і неперервності f, а також із гладкості w випливає, що вираз (36) прямує до нуля при $h\to 0$. Отже, з (33) – (36) маємо

$$\limsup_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\Big[\big(\mathcal{T}_{t,t+h}w(t+h,\cdot)\big)(x)-w(t,x)\Big]\le$$

$$\le\frac{\partial w}{\Delta t}(t,x)-\sup_{v\in U}\left\{-\frac{\partial w}{\partial x}(t,x)f(t,x,v)-L(t,x,v)\right\}=$$

$$=\frac{\partial w}{\Delta t}(t,x)-H\bigg(t,x,\frac{\partial w}{\partial x}(t,x)\bigg). \tag{37}$$

Тут $H(t,x,p)=\sup_{v\in U}\big\{-f(t,x,v)p-L(t,x,v)\big\}$ — гамільтоніан.

Зафіксуємо $(t,x)\in Q$, $u(\cdot)\in\mathcal{U}(t)$. Нехай $x(\cdot)$ — розв'язок рівняння (1), який відповідає керуванню $u(\cdot)$. Оскільки точка t є право-граничною, то існує послідовність $h_n\in\mathcal{V}_t^{t_1}$ $(h_n\to\to 0, n\to\infty)$. Виберемо допустиме керування $u^n(\cdot)\in\mathcal{U}(t)$ і через $x^n(s)$ позначимо траєкторію, яка відповідає керуванню $u^n(\cdot)$ з виконанням нерівності

$$\big(\mathcal{T}_{t,t+h_n}w(t+h_n,\cdot)\big)(x)\ge -h_n^2+\int\limits_{[t,t+h_n)_{\mathbb{T}}}L\big(s,x^n(s),u^n(s)\big)\,\Delta s+w\big(t+h_n,x^n(t+h_n)\big). \tag{38}$$

Тоді

$$\frac{1}{h_n}\Big[\big(\mathcal{T}_{t,t+h_n}w(t+h_n,\cdot)\big)(x)-w(t,x)\Big]\ge$$

$$\ge -h_n+\frac{1}{h_n}\int\limits_{[t,t+h_n)_{\mathbb{T}}}L\big(s,x^n(s),u^n(s)\big)\,\Delta s+\frac{1}{h_n}\Big[w\big(t+h_n,x^n(t+h_n)\big)-w(t,x)\Big]=$$

$$=-h_n+\frac{1}{h_n}\int\limits_{[t,t+h_n)_{\mathbb{T}}}\Bigg[L\big(s,x^n(s),u^n(s)\big)+\int\limits_0^1\frac{\partial}{\partial x}w(\sigma(s),x^n(s)+\mu(s)f\big(s,x^n(s),u^n(s)\big)\tau)\,d\tau\,\times$$

$$\times\, f\big(s,x^n(s),u^n(s)\big)+\frac{\partial}{\Delta t}w\big(s,x^n(s)\big)\Bigg]\Delta s=$$

$$=\frac{\partial}{\Delta t}w(t,x)+\frac{1}{h_n}\int\limits_{[t,t+h_n)_{\mathbb{T}}}L\big(t,x,u^n(s)\big)\,\Delta s+$$

$$+\frac{1}{h_n}\int\limits_{[t,t+h_n)_{\mathbb{T}}}\frac{\partial}{\partial x}w(t,x)f\big(t,x,u^n(s)\big)\,\Delta s+p(n), \tag{39}$$

де

$$p(n) = -h_n + \frac{1}{h_n} \int\limits_{[t,t+h_n)_{\mathbb{T}}} \Big(L\big(s, x^n(s), u^n(s)\big) - L\big(t, x, u^n(s)\big) \Big) \Delta s +$$

$$+ \frac{1}{h_n} \int\limits_{[t,t+h_n)_{\mathbb{T}}} \left[\frac{\partial}{\Delta t} w(s, x^n(s)) - \frac{\partial}{\Delta t} w(t, x) \right] \Delta s -$$

$$- \frac{1}{h_n} \int\limits_{[t,t+h_n)_{\mathbb{T}}} \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial x} w(t, x) f\big(t, x, u^n(s)\big) \Delta s +$$

$$+ \frac{1}{h_n} \int\limits_{[t,t+h_n)_{\mathbb{T}}} \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial x} w\Big(\sigma(s), x^n(s) + \mu(s) f\big(s, x^n(s), u^n(s)\big)\tau\Big)\, d\tau\, f\big(s, x^n(s), u^n(s)\big) \Delta s. \qquad (40)$$

Оскільки функція f є обмеженою, то

$$|x(s) - x| \le \int\limits_{[t,s)_{\mathbb{T}}} \big| f(\tau, x(\tau), u(\tau)) \big| \Delta\tau \le C(s - t), \qquad (41)$$

а тому

$$x(s) \to x, \quad s \to t. \qquad (42)$$

Оцінка (41) показує, що $x^n(s) \to x$ при $s \to t$ рівномірно по n. Тому з неперервності L і f, як і для (34)–(36), маємо

$$p(n) \to 0, \quad n \to \infty. \qquad (43)$$

Запишемо (39) у формі

$$\frac{1}{h_n} \big[(\mathcal{T}_{t,t+h_n} w(t + h_n, \cdot))(x) - w(t, x) \big] \ge \frac{\partial}{\Delta t} w(t, x) - \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} w(t, x) F^n - L^n \right\} + p(n),$$

де

$$(F^n, L^n) = \frac{1}{h_n} \int\limits_{[t,t+h_n)_{\mathbb{T}}} \big(f(t, x, u^n(s)), L(t, x, u^n(s)) \big) \Delta s.$$

Покладемо

$$FL(t, x) = \Big\{ (f, l) \in \mathbb{R}^{d+1} \colon (f, l) = (f(t, x, v), L(t, x, v)), v \in U \Big\}.$$

Переходом до розширення $\tilde{u}^n(s)$ на ввесь інтервал $[t, t + h_n]$ таким чином:

$$\tilde{u}^n(t) = \begin{cases} u^n(t), & t \in [t, t + h_n], \\ u^n(r), & t \in [r, \sigma(r)), \end{cases}$$

де $r \in \mathrm{RS}$, і переходом до звичайного інтеграла можна показати, що (F^n, L^n) належить опуклій замкненій оболонці $\overline{\mathrm{co}}\big[FL(t, x)\big]$ множини $FL(t, x)$. Отже,

$$\frac{1}{h_n} \big[\big(\mathcal{T}_{t,t+h_n} w(t + h_n, \cdot) \big)(x) - w(t, x) \big] \ge$$

$$\geq \frac{\partial}{\Delta t}w(t,x) - \sup_{v\in U}\left\{-\frac{\partial}{\partial x}w(t,x)f(t,x,v) - L(t,x,v)\right\} + p(n).$$

Звідси та з (37) і (43) випливає, що для $\mu(t) = 0$

$$(G_t w(t,\cdot))(x) = \frac{\partial}{\Delta t}w(t,x) - H\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}w(t,x)\right). \tag{44}$$

Таким чином, ми довели таку теорему.

Теорема 4. *При виконанні умов* 1 – 3 *теореми* 3 *генератор* G_t *нелінійної напівгрупи визначається формулою* (32), *якщо* $\mu(t) > 0$, *і формулою* (44), *якщо* $\mu(t) = 0$.

***Зауваження* 2.** Генератору G_t можна надати однакового вигляду як у випадку право-граничних точок, так і у випадку право-розсіяних точок, якщо в останньому звузити область визначення генератора D_t до класу $C^1(Q) \cap M(\overline{Q})$.

Дійсно, нехай $w(t,x) \in C^1(Q) \cap M(\overline{Q})$, тоді з (30) із використанням формули диференціювання складної функції на $\mathbb{T}$ і (31) при $\mu(t) > 0$ отримуємо генератор G_t у вигляді

$$(G_t w(t,\cdot))(x) = \frac{\partial}{\Delta t}w(t,x) - \sup_{v\in U}\left\{-\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}w(\sigma(t), x + \mu(t)f(t,x,v)\tau)d\tau f(t,x,v) - L(t,x,v)\right\}. \tag{45}$$

Зазначимо, однак, що використання генератора G_t у вигляді (25) є, по-перше, більш зручним для застосування, а по-друге, в цьому випадку він заданий на більш широкому класі функцій. Тому в подальшому ми будемо користуватися генератором G_t у вигляді (32).

***Зауваження* 3.** Формула (44) для вигляду генератора у неперервному випадку формально отримується із (45) при $\mu(t) = 0$. Однак покладати в (45) $\mu(t) = 0$ не можна, оскільки (45) отримано саме за умови $\mu(t) > 0$.

***Зауваження* 4.** З використанням теореми 4 абстрактне рівняння динамічного програмування (27) можна записати в більш зручній класичній формі, а саме:

1) якщо $\mu(t) > 0$, то

$$W(t,x) + \sup_{v\in U}\left\{-W(\sigma(t), x + \mu(t)f(t,x,v)) - L(t,x,v)\mu(t)\right\} = 0,$$

або, використовуючи зв'язок між супремумом і інфімумом, у вигляді

$$W(t,x) = \inf_{u\in U}\left\{W(\sigma(t), x + \mu(t)f(t,x,u)) + L(t,x,u)\mu(t)\right\}; \tag{46}$$

2) якщо $\mu(t) = 0$, то

$$-\frac{\partial}{\Delta t}W(t,x) + H\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}W(t,x)\right) = 0, \tag{47}$$

де $H(t,x,p) = \sup_{u\in U}\left\{-f(t,x,u)p - L(t,x,u)\right\}$ — функція Гамільтона.

У подальшому ми будемо користуватися саме формулами (46) і (47).

***Зауваження* 5.** Для узгодження з класичним означенням (неперервний випадок) в'язкого розв'язку означення 3 для диференціальних операторів переформулюємо у такій еквівалентній формі.

Означення 4. *Нехай* $W \in C(\overline{Q}) \cap M(\overline{Q})$. *Тоді*:

1) W *є в'язким суброзв'язком рівняння динамічного програмування в* Q, *якщо*:

a) *в кожній точці* $(t, x) \in Q$ *такій, що* $\mu(t) > 0$, $W(t, x)$ *задовольняє* (46);

b) *для довільної тестової функції* $w \in C^1(Q) \cap M(\overline{Q})$

$$-\frac{\partial}{\Delta t} w(\bar{t}, \bar{x}) + H\left(\bar{t}, \bar{x}, \frac{\partial}{\partial x} w(\bar{t}, \bar{x})\right) \leq 0 \tag{48}$$

в кожній точці $(\bar{t}, \bar{x}) \in Q$ *такій, що* $\mu(\bar{t}) = 0$ *і* $(\bar{t}, \bar{x})$ *є точкою максимуму* $W - w$ *в* $\overline{Q}$, *а також* $W(\bar{t}, \bar{x}) = w(\bar{t}, \bar{x})$;

2) W *є в'язким суперрозв'язком рівняння динамічного програмування в* Q, *якщо*:

c) *виконано умову* a) *пункту* 1;

d) *для довільної тестової функції* $w \in C^1(Q) \cap M(\overline{Q})$

$$-\frac{\partial}{\Delta t} w(\bar{t}, \bar{x}) + H\left(\bar{t}, \bar{x}, \frac{\partial}{\partial x} w(\bar{t}, \bar{x})\right) \geq 0 \tag{49}$$

в кожній точці $(\bar{t}, \bar{x}) \in Q$ *такій, що* $\mu(\bar{t}) = 0$ *і* $(\bar{t}, \bar{x})$ *є точкою мінімуму* $W - w$ *в* $\overline{Q}$, *а також* $W(\bar{t}, \bar{x}) = w(\bar{t}, \bar{x})$;

3) *функція* W *є в'язким розв'язком рівняння динамічного програмування в* Q, *якщо вона одночасно є і суброзв'язком, і суперрозв'язком.*

Зауваження 6. Оскільки (48) і (49) не змінюються при заміні w на $w + C$, де C — довільна стала, то умову $W(\bar{t}, \bar{x}) = w(\bar{t}, \bar{x})$ в означеннях можна зняти.

3.3. Єдиність в'язкого розв'язку. Як випливає з теореми 3, функція Беллмана є в'язким розв'язком рівняння динамічного програмування (46), (47). Тому важливим є питання єдиності такого розв'язку, що задовольняє крайову умову

$$W(t_1, x) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{50}$$

Єдиність в'язкого розв'язку встановимо при виконанні наступних умов на функції f, L і ψ:

a_1) $f\colon [t_0, t_1]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}^d$, $L\colon [t_0, t_1]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}^1$;

a_2) f неперервна за сукупністю змінних, причому рівномірно по $x \in \mathbb{R}^d$ неперервна по t;

a_3) L, ψ рівномірно неперервні в $\overline{Q} \times U$ і $\mathbb{R}^d$ відповідно;

a_4) f, L, ψ обмежені в своїх областях визначення сталою C і задовольняють по $x \in \mathbb{R}^d$ глобальну умову Ліпшиця зі сталою K.

Накладемо також таку умову на часову шкалу:

a_5) будемо вважати, що будь-яка ліво-гранична точка часової шкали $\mathbb{T}$ є границею або тільки право-граничних точок, або тільки право-розсіяних точок.

Очевидно, що будь-яка неперервна, тотально дискретна або ейлерова часові шкали (в термінології [11]) задовольняють умову a_5). Неважко також навести і більш складні приклади дискретно неперервних часових шкал з виконанням умови a_5). Нагадаємо, що U — компакт в $\mathbb{R}^m$.

Має місце така теорема єдиності.

Теорема 5. *Нехай W і W_1 — в'язкі розв'язки рівняння динамічного програмування* (46), (47) *в області Q, що є обмеженими і рівномірно неперервними в $\overline{Q}$ та задовольняють крайову умову* (50). *Тоді якщо виконано умови* a$_1$) – a$_5$), *то*

$$W(t,x) = W_1(t,x) \quad \forall (t,x) \in Q. \tag{51}$$

***Зауваження* 7.** В умовах теореми 5 виконано умови зауваження 1. Останнє означає, що функція Беллмана є глобально ліпшицевою за своїми змінними і обмеженою. З урахуванням теореми 3 у теоремі 5 стверджується, що в цьому випадку єдиним розв'язком рівняння динамічного програмування (46), (47) є функція Беллмана.

Доведення. По-перше, зауважимо, що, як і у випадку $\mathbb{R}^1$ (див. [9], теорема10.1), при виконанні умов a$_1$) – a$_4$) гамільтоніан задовольняє таку умову: існують стала $M > 0$ і функція $h \in C([0,\infty))$, $h(0) = 0$, такі, що для довільних (t,x), $(s,y) \in \overline{Q}$ і p, $p_1 \in \mathbb{R}^d$ виконується нерівність

$$\big|H(t,x,p) - H(s,y,p_1)\big| \le h\big(|t-s| + |x-y|\big) + h\big(|t-s|\big)|p| + M|x-y||p| + M|p-p_1|. \tag{52}$$

Нерівність (52) відіграє основну роль при доведенні єдиності у випадку дійсної часової шкали.

Нехай тепер $W(t,x)$ і $W_1(t,x)$ — в'язкі розв'язки рівняння (46), (47), що задовольняють умови теореми. З крайової умови (50) маємо $W(t_1,x) = W_1(t_1,x) = \psi(x)$. Точка t_1 може бути або ліво-розсіяною, або ліво-граничною. Розглянемо ці випадки окремо.

I. Нехай $t_1 \in$ LS. Тоді, згідно з означенням в'язкого розв'язку, як W, так і W_1 задовольняють рівняння (46), отже,

$$W(\rho(t_1),x) = \inf_{u\in U}\big\{W(t_1, x + \mu(\rho(t_1))f(\rho(t_1),x,u)) + L(\rho(t_1),x,u)\mu(\rho(t_1))\big\} =$$
$$= \inf_{u\in U}\big\{\psi(x + \mu(\rho(t_1))f(\rho(t_1),x,u)) + L(\rho(t_1),x,u)\mu(\rho(t_1))\big\}. \tag{53}$$

Внаслідок неперервності ψ, f і L та компактності U інфімум в (53) для кожного $x \in \mathbb{R}^d$ досягається, а тому $W(\rho(t_1),x)$ визначено однозначно. Але аналогічне співвідношення задовольняє і функція W_1. Отже, $W(\rho(t_1),x) \equiv W_1(\rho(t_1),x)$.

II. Нехай $t_1 \in$ LD. Тоді, згідно з умовою a$_5$), вона є границею або право-розсіяних точок, або право-граничних точок. Знову ці випадки розглянемо окремо.

1. Нехай t_1 є границею право-розсіяних точок. Отже, існує деякий лівосторонній δ-окіл точки t_1, у якому містяться лише право-розсіяні точки часової шкали, що складають збіжну до t_1 числову послідовність. Позначимо ці точки в порядку зростання $s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots$. При цьому для кожного n маємо $\sigma(s_n) = s_{n+1}$ і $\lim_{n\to\infty} s_n = t_1$.

Оскільки $W(t_n,x)$ задовольняє рівняння (46), то маємо

$$W(s_0,x) = \inf_{u\in U}\big\{W(s_1, x + \mu(s_0)f(s_0,x,u)) + L(s_0,x,u)\mu(s_0)\big\}. \tag{54}$$

Візьмемо довільне $u_0 \in U$. Тоді з (54) отримаємо

$$W(s_0,x) \le W(s_1, x + \mu(s_0)f(s_0,x,u_0)) + L(s_0,x,u_0)\mu(s_0).$$

З рівняння (1) одержуємо $x(s_1) = x + \mu(s_0)f(s_0,x,u_0)$. Тоді

$$W(s_0,x) \le W(s_1, x(s_1)) + L(s_0,x,u_0)\mu(s_0). \tag{55}$$

Далі з (46) знову отримуємо

$$W\big(s_1, x(s_1)\big) = \inf_{u\in U}\big\{W(s_2, x(s_1) + \mu(s_1)f(s_1, x(s_1), u) + L(s_1, x(s_1), u)\mu(s_1))\big\}. \tag{56}$$

Тоді для довільного $u_1 = u(s_1) \in U$ звідси знову одержуємо

$$W(s_1, x(s_1)) \le W(s_2, x(s_2)) + L(s_1, x(s_1), u(s_1))\mu(s_1), \tag{57}$$

де $x(s_2) = x(s_1) + \mu(s_1)f(s_1, x(s_1), u(s_1))$. З (55) та (57) знаходимо

$$W(s_0, x) \le W(s_2, x(s_2)) + \mu(s_0)L(s_0, x, u_0) + \mu(s_1)L(s_1, x(s_1), u(s_1)).$$

Звідси для кожного натурального n отримуємо нерівність

$$W(s_0, x) \le W(s_{n+1}, x(s_{n+1})) + \sum_{k=0}^{n}\mu(s_k)L(s_k, x(s_k), u(s_k)), \tag{58}$$

де $u(s_k),\ k = 0, 1, \ldots,$ — деяке допустиме керування, а $x(s_k)$ — відповідна допустима траєкторія.

Із властивостей Δ-інтеграла [3] (теорема1.29) випливає, що

$$\sum_{k=0}^{n}\mu(s_k)L(s_k, x(s_k), u(s_k)) \to \int\limits_{[s_0,t_1)_{\mathbb{T}}} L(s, x(s), u(s))\,\Delta s. \tag{59}$$

Зауважимо також, що $x(s_k)$ за побудовою є розв'язком на $[s_0, t_1]_{\mathbb{T}}$ системи рівнянь

$$x^{\Delta}(s) = f(s, x(s), u(s)),$$
$$x(s_0) = x,$$

де $s = s_0, s_1, \ldots$. Зазначимо, що внаслідок умов на f і множину допустимих керувань розв'язок задачі Коші

$$x^{\Delta} = f(t, x(t), u(t)),$$
$$x(s_0) = x,$$

існує, єдиний на $[s_0, t_1]_{\mathbb{T}}$ і є там абсолютно неперервною функцією [4] (теорема 4). Отже, існує

$$\lim_{n\to\infty} x(s_n) = x(t_1),$$

а з урахуванням неперервності $W(t, x)$ і граничної умови (50) маємо

$$W(s_{n+1}, x(s_{n+1})) \to W\big(t_1, x(t_1)\big) = \psi(x(t_1)). \tag{60}$$

Переходячи в (58) до границі при $n \to \infty$, з урахуванням (59) і (60) отримуємо

$$W(s_0, x) \le \int\limits_{[s_0,t_1)_{\mathbb{T}}} L\big(t, x(t), u(t)\big)\Delta t + \psi\big(x(t_1)\big). \tag{61}$$

Але, з іншого боку, внаслідок неперервності $W,$ f і L і компактності множини U інфімум у правій частині (54) досягається для кожного s і x. Нехай $u^* = u^*(s_0)$ — точка, в якій інфімум досягається (звичайно, вона залежить від x). Тоді

$$W(s_0, x) = W(s_1, x + \mu(s_0) f(s_0, x, u^*(s_0))) + L(s_0, x, u^*(s_0))\, \mu(s_0) =$$
$$= W(s_1, x^*(s_1)) + L(s_0, x, u^*(s_0))\, \mu(s_0).$$

Аналогічно з (56) одержуємо

$$W\big(s_1, x^*(s_1)\big) = W\big(s_2, x^*(s_2)\big) + \mu(s_1) L\big(s_1, x^*(s_1), u^*(s_1)\big).$$

Звідси для кожного натурального n отримуємо рівність

$$W(s_0, x) = W(s_{n+1}, x^*(s_{n+1})) + \sum_{k=0}^{n} \mu(s_k) L(s_k, x^*(s_k), u^*(s_k)), \tag{62}$$

де $u^*(s_k)$ — оптимальне керування, а $x^*(s_k)$ — відповідна траєкторія, що визначається із системи

$$(x^*)^{\Delta}(s) = f(s, x^*(s), u^*(s)),$$
$$x^*(s_0) = x,$$

на $[s_0, t_1]_{\mathbb{T}}$. Переходячи в (62) до границі при $n \to \infty$, аналогічно попередньому, отримуємо рівність

$$W(s_0, x) = \int\limits_{[t_0, t_1)_{\mathbb{T}}} L(t, x^*(t), u^*(t)) \Delta t + \psi(x^*(t_1)). \tag{63}$$

Із (60) і (63) з огляду на довільність $u(t)$ одержуємо

$$W(s_0, x) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}(s_0)} \left\{ \int\limits_{[s_0, t_1)_{\mathbb{T}}} L(t, x(t), u(t)) \Delta t + \psi(x(t_1)) \right\}.$$

Але аналогічні міркування можна провести і для розв'язку W_1 і отримати для нього нерівність

$$W_1(s_0, x) \leq \int\limits_{[s_0, t_1)_{\mathbb{T}}} L(t, x(t), u(t)) \Delta t + \psi(x(t_1)), \tag{64}$$

справедливу для довільного керування $u(\cdot) \in \mathcal{U}(s_0)$, а також рівність

$$W_1(s_0, x) = \int\limits_{[t_0, t_1)_{\mathbb{T}}} L(t, y^*(t), v^*(t)) \Delta t + \psi(y^*(t_1)) \tag{65}$$

$\big($при цьому, взагалі кажучи, $u^*(t) \neq v^*(t)\big)$. З (64) і (65) отримуємо

$$W_1(s_0, x) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}(s_0)} \left\{ \int\limits_{[s_0, t_1)_{\mathbb{T}}} L(t, x(t), u(t)) \Delta t + \psi(x(t_1)) \right\}.$$

Отже,

$$W(s_0, x) = W_1(s_0, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

і маємо в цьому випадку єдиність.

2. Нехай t_1 є границею право-граничних точок. Отже, існує відрізок $[t_1 - \delta, t_1]_{\mathbb{T}}$ (причому $t_1 - \delta \in \mathbb{T}$), що повністю складається із право-граничних точок, в кожній з яких Δ-похідна по t збігається зі звичайною похідною, тобто $\dfrac{\partial}{\Delta t} w(t,x) = \dfrac{\partial}{\partial t} w(t,x)$. Зауважимо, що $[t_1 - \delta, t_1]_{\mathbb{T}}$ — компакт. За цих обставин доведення єдиності повністю збігається з доведенням аналогічного результату у класичному (неперервному) випадку (див., наприклад, [9], теорема 9.1), тому ми його не наводимо.

Отже, у всіх випадках I, II існує $\delta > 0$ таке, що на відрізку $[t_1 - \delta, t_1]_{\mathbb{T}}$ (причому $t_1 - \delta \in \mathbb{T}$) $W(t,x) = W_1(t,x)$, а отже,

$$W(t_1 - \delta, x) = W_1(t_1 - \delta, x). \qquad (66)$$

Проводячи тепер для точки $t_1 - \delta$ ті ж міркування, що і для точки t_1, і враховуючи (66), отримуємо єдиність розв'язку на деякому відрізку $[t_1 - \delta - \delta_1, t_1 - \delta]_{\mathbb{T}}$. Продовжуючи цю процедуру, через скінченну кількість кроків одержуємо рівність $W(t,x) = W_1(t,x)$ для $t \in \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$, $x \in \mathbb{R}^d$, що і доводить теорему.

Література

1. *Agarwal R., Bohner M., Boichuk A., Strakh O.* Fredholm boundary value problems for perturbed systems of dynamic equations on time scales // Math. Methods Appl. Sci., DOI: 10.1002/mma.3356, 2014.
2. *Bohner M., Peterson A.* Dynamic equations on time scales. An introduction with applications. – Boston, MA: Birkhäuser Boston Inc., 2001.
3. *Bohner M., Peterson A.* Advances in dynamic equations on time scales. – Boston, MA: Birkhäuser Boston Inc., 2003.
4. *Bourdin L., Trelat L.* General Cauchy – Lipschitz theory for Δ-Cauchy problems with Caratheodory dynamics on time scales // J. Difference Equat. and Appl. – 2014. – **20**, № 4. – P. 526 – 547.
5. *Bourdin L., Trelat L.* Pontryagin maximum principle for finite dimensional nonlinear optimal control problems on time scales // SIAM J. Control Optim. – 2013. – **51**, № 5. – P. 3781 – 3813.
6. *Capuzzo Dolcetta I.* On discrete approximation of the Hamilton – Jacobi equation of dynamic programming // Appl. Math. and Optim. – 1983. – **10**. – P. 367 – 377.
7. *Capuzzo Dolcetta I., Ishii H.* Approximate solutions of the Bellman equation of deterministic control theory // Appl. Math. and Optim. – 1984. – **11**. – P. 161 – 181.
8. *Crandal M. G., Lions P. L.* Viscosity solutions of Hamilton – Belman – Jacobi equations // Trans Amer. Math. Soc. – 1983. – **277**. – P. 1 – 45.
9. *Fleming W. H., Soner H. M.* Controlled Markov processes and viscosity solution. – Springer Sci. and Business Media, Inc., 2006.
10. *Gonzales R. L., Tidball M. M.* On discrete time approximation of the Hamilton – Jacobi equation of dynamics programming // INRIA Rapports de Recherch. – 1991. – № 1375.
11. *Hall K., Oberste-Vorth R.* Totally discrete and Eulerian time scales // Difference Equat., Spec. Funct. and Orthogonal Polynomials. – World Sci., 2007. – P. 462 – 470.
12. *Hilger S.* Ein Maßkettenkalkül mit Anwendungen auf Zentrums: PhD thesis. – Univ. Würzburg, 1988.
13. *Lastivka L., Lavrova O.* The method of dynamic programming for systems of differential equations on time scales // Bull. Kyiv Taras Shevchenko Nat. Univ. – 2014. – № 2. – P. 71 – 76 (in Ukrainian).
14. *Lee E. B., Markus L.* Foundations of optimal control theory. – New York: J. Wiley, 1967.
15. *Samoilenko A. M., Perestyuk M. O.* Impulsive differential equations. – Singapore etc.: World Sci., Inc., 1995.
16. *Zhan Z., Wei W., Xu H.* Hamilton – Jacobi – Bellman equations on time scales // Math. and Comput. Modelling. – 2009. – **49**. – P. 2019 – 2028.
17. *Zhan Z., Wei W.* On existence of optimal control governed by a class of the first-order linear dynamic systems on time scales // Appl. Math. and Comput. – 2009. – **215**, № 6. – P. 2070 – 2081.

Одержано 21.10.16