УДК 517.5

Т. О. Банах (Львів. нац. ун-т ім І. Франка),
І. В. Протасов, К. Д. Протасова (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ДЕСКРИПТИВНА СКЛАДНІСТЬ РОЗМІРІВ ПІДМНОЖИН ГРУП

We study the Borel complexity of some basic families of subsets of a countable group (large, small, thin, rarefied, etc.) determined by the sizes of their elements. The obtained results are applied to the Czech – Stone compactification βG of the group G. In particular, it is shown that the closure of the minimal ideal βG has the $F_{\sigma\delta}$ type.

Исследуется борелева сложность некоторых основных семейств подмножеств счетной группы (больших, малых, тонких, разреженных и других), определенных размерами ее членов. Полученные результаты применены к чех-стоуновой компактификации βG группы G. В частности, доказано, что замыкание минимального идеала βG имеет тип $F_{\sigma\delta}$.

Для групи G позначимо через $\mathbf{P}_G$ та $\mathbf{F}_G$ булеву алгебру всіх підмножин G та її ідеал всіх скінченних підмножин. Ми наділяємо $\mathbf{P}_G$ топологією, що виникає з ідентифікації (через характеристичні функції) $\mathbf{P}_G$ з $\{0,1\}^G$. Для $K \in \mathbf{F}_G$ множини

$$\{X \in \mathbf{P}_G : K \subseteq X\}, \qquad \{X \in \mathbf{P}_G : X \cap K = \varnothing\}$$

утворюють передбазу цієї топології.

Після топологізації кожну сім'ю $\mathcal{F}$ підмножин групи G можна розглядати як підпростір $\mathbf{P}_G$, тож природно поставити питання про борелеву складність $\mathcal{F}$ (питання типове для *дескриптивної теорії множин* [1]). Ми ставимо відповідні питання для найбільш інтенсивно досліджуваних сімей у *комбінаториці груп*. Щодо витоків цих сімей, означених у пункті 1, див. огляд [2]. Основні результати наведено в пункті 2, а їх застосування до чех-стоунової компактифікації βG дискретної групи G — в пункті 3. Завершується стаття деякими коментарями і відкритими питаннями.

1. Розмаїття підмножин груп. Підмножина A групи G називається:
великою, якщо $G = FA$ для деякої підмножини $F \in \mathbf{F}_G$;
надвеликою, якщо $A \cap L$ велика для кожної великої підмножини L;
малою, якщо $L \setminus A$ велика для кожної великої підмножини L;
товстою, якщо для кожної підмножини $F \in \mathbf{F}_G$ існує такий елемент $g \in G$, що $Fg \subseteq A$;
передтовстою, якщо FA товста для деякої підмножини $F \in \mathbf{F}_G$.

Наведено деякі очевидні або прості (див. [3]) співвідношення між означеними підмножинами: A велика тоді і тільки тоді, коли $G \setminus A$ не є товстою; A мала тоді і тільки тоді, коли A не є передтовстою (еквівалентно, $G \setminus A$ надвелика). Сім'я всіх малих підмножин групи G є ідеалом в $\mathbf{P}_G$.

Підмножина A групи G називається:

P-малою, якщо існує ін'єктивна послідовність $(g_n)_{n\in\omega}$ в G така, що підмножини $\{g_nA : n \in \omega\}$ попарно не перетинаються;

слабко P-малою, якщо для довільного $n \in \omega$ існують такі елементи $g_0, \ldots, g_n$ групи, що підмножини $g_0A, \ldots, g_nA$ попарно не перетинаються;

майже P-малою, якщо існує ін'єктивна послідовність $(g_n)_{n\in\omega}$ в G така, що підмножина $g_nA \cap g_mA$ скінченна для довільних різних n, m;

ледь P-малою, якщо для кожного $n \in \omega$ існують такі елементи $g_0, \ldots, g_n$ групи, що підмножина $g_i A \cap g_j A$ скінченна для довільних різних $i, j \in \{0, \ldots, n\}$.

Кожна нескінченна група G містить слабко P-малу підмножину, що не є P-малою [4]. Кожну майже P-малу підмножину можна розбити на дві P-малі підмножини [5]. Кожна злічення абелева група містить ледь P-малу підмножину, що не є слабко P-малою і майже P-малою [6].

Підмножина A групи G з одиницею e називається:

тонкою, якщо перетин $gA \cap A$ скінченний для кожного $g \in G \setminus \{e\}$;

рідкою, якщо довільна нескінченна підмножина Y групи G містить скінченну підмножину $F \subset Y$ таку, що підмножина $\bigcap_{g \in F} gA$ є скінченною.

Об'єднання двох тонких підмножин може не бути тонким, проте сім'я всіх рідких підмножин є ідеалом в $\mathbf{P}_G$ [7]. Про численні модифікації й узагальнення тонких та рідких підмножин див. [5, 8 – 11].

2. Основні результати. Для групи G позначимо через $\mathbf{L}_G$, $\mathbf{EL}_G$, $\mathbf{S}_G$, $\mathbf{T}_G$ та $\mathbf{PT}_G$ множини всіх великих, надвеликих, малих, товстих і передтовстих підмножин групи G відповідно.

Теорема 1. *Для зліченної групи G підмножина $\mathbf{L}_G$ має тип F_σ, $\mathbf{T}_G$ — тип G_δ, $\mathbf{PT}_G$ — тип $G_{\delta\sigma}$, $\mathbf{S}_G$ та $\mathbf{EL}_G$ мають тип $F_{\sigma\delta}$.*

Доведення. Візьмемо довільні $F, H \in \mathbf{F}_G$ і доведемо допоміжне твердження: множина $T(F, H) = \{A \in \mathbf{P}_G : H \subseteq FA\}$ є відкритою.

Дійсно, нехай $F = \{g_1, \ldots, g_n\}$ і $(H_1, \ldots, H_n)$ — розбиття H. Множина $\{A \in \mathbf{P}_G : H_1 \subseteq \subseteq g_1 A, \ldots, H_n \subseteq g_n A\}$ є відкритою, а тому і $T(F, H)$ відкрита як об'єднання скінченних (по всіх розбиттях H) відкритих множин.

Далі, множина $T_H(F) = \bigcup\{T(F, Hg) : g \in G\}$ є відкритою і множина $T(F) = \bigcap\{T_H(F) : H \in \mathbf{F}_G\}$ має тип G_δ. Оскільки $\mathbf{T}_G = T(\{e\})$ і $\mathbf{PT}_G = \bigcup\{T(F) : F \in \mathbf{F}_G\}$, то $\mathbf{T}_G$ має тип G_δ, а $\mathbf{PT}_G$ — тип $G_{\delta\sigma}$.

Оскільки $\mathbf{S}_G = \mathbf{P}_G \setminus \mathbf{PT}_G$, то $\mathbf{S}_G$ має тип $F_{\delta\sigma}$. Відображення, визначене як $A \longmapsto G \setminus A$, є гомеоморфізмом $\mathbf{P}_G$, а тому сім'я $\mathbf{L}_G$ гомеоморфна $\mathbf{P}_G \setminus \mathbf{T}_G$, а $\mathbf{EL}_G$ гомеоморфна $\mathbf{S}_G$. Отже, $\mathbf{L}_G$ має тип F_σ , а $\mathbf{EL}_G$ — тип $F_{\delta\sigma}$.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Для зліченної групи G множини тонких слабко P-малих і ледь P-малих підмножин групи G мають тип $F_{\delta\sigma}$.*

Доведення. Для $F \in \mathbf{F}_G$ і $g \in G \setminus \{e\}$ множина $X(F, g) = \{A \in \mathbf{P}_G : ga \notin A$ для кожного $a \in A \setminus F\}$ є замкненою. Множина $X(g) = \bigcup\{X(F, g) : F \in \mathbf{F}_G\}$ має тип F_σ і $\bigcap\{X(g) : g \in G \setminus \{e\}\}$ — це множина всх тонких підмножин.

Для $n \in \omega$, $\omega = \{0, 1, \ldots\}$, позначимо через $[G]^n$ сім'ю всіх n-підмножин G. Для $F \in [G]^n$ множина $Y(F) = \{A \in \mathbf{P}_G : gA \bigcap hA = \varnothing$ для всіх різних $g, h \in F\}$ є замкненою, а множина слабко P-малих підмножин групи G збігається з

$$\bigcap_{n \in \omega} \bigcup \{Y(F) : F \in [G]^n\}.$$

Для $F \in [G]^n$ і $H \in \mathbf{F}_G$ множина $Y(F, H) = \{A \in \mathbf{P}_G : g(A \setminus H) \bigcap h(A \setminus H) = \varnothing$ для всіх різних $g, h \in F\}$ є замкненою, а множина ледь P-малих підмножин збігається з

$$\bigcap_{n \in \omega} \bigcup \{Y(F, H) : F \in [G]^n, \ H \in \mathbf{F}_G\}.$$

Теорему 2 доведено.

3. Застосування до βG. Чех-стоунову компактифікацію βG дискретної групи G ототожнимо з множиною всіх ультрафільтрів на G і розглянемо βG як правотопологічну напівгрупу (див. [12]). Кожна непорожня замкнена підмножина X простору βG визначається деяким фільтром φ_X на G:

$$X = \bigcap \{\overline{\Phi} : \Phi \in \varphi_X\}, \quad \overline{\Phi} = \{p \in \beta G : \Phi \in p\}.$$

З іншого боку, кожен фільтр Φ на G є підпростором $\mathbf{P}_G$, а тому можна ставити питання про складність X як складність φ_X в $\mathbf{P}_G$.

Напівгрупа βG має мінімальний ідеал K_G, що відіграє ключову роль у комбінаторних застосуваннях βG. За теоремою 1.5 з [3] замикання $\mathrm{cl}\,(K_G)$ визначається фільтром усіх надвеликих підмножин G. Якщо G зліченна, то, застосовуючи теорему 1, приходимо до висновку, що $\mathrm{cl}\,(K_G)$ має тип $F_{\sigma\delta}$.

4. Коментарі. 1. Відповідаючи на питання з [13], П. Закржевський довів [14], що для зліченної аменабельної групи G ідеал абсолютно нульових підмножин має борелеву складність $F_{\sigma\delta}$. Кожна абсолютно нульова підмножина є малою, але для довільного $\varepsilon > 0$, існує мала підмножина A групи G така, що $\mu(A) > 1 - \varepsilon$ для деякої банахової міри μ на G (див. [5]).

2. Класифікацію підмножин груп за їх розмірами можна розглядати в загальному контексті *асимптології* (див. [15]). В цьому контексті великі, товсті і малі підмножини відіграють роль щільних, відкритих і ніде не щільних підмножин рівномірних топологічних просторів. Динамічний погляд на підмножини груп викладено в [16].

3. Нагадаємо, що топологічний простір X називають польським, якщо X гомеоморфний деякому повному сепарабельному метричному простору. Підмножину A польського простору X називають *аналітичною*, якщо A є неперервним образом деякого польського простору, і *коаналітичною*, якщо $X \backslash A$ аналітична.

Використовуючи техніку, розроблену в статті [10], можна довести, що ідеал рідких підмножин зліченної групи G коаналітичний, а підпростір P-малих підмножин простору $\mathbf{P}_G$ аналітичний, проте жоден із цих підпросторів не є борелевим.

Ультрафільтр p на групі G називають *строго простим*, якщо $p \notin \mathrm{cl}\,(G^*G^*)$, де G^* — напівгрупа всіх вільних ультрафільтрів на G. Покладемо $X = \mathrm{cl}\,(G^*G^*)$ і позначимо через φ_X фільтр, що визначає X. У [7] доведено, що $A \in \varphi_X$ тоді і тільки тоді, коли подмножина $G \setminus A$ є рідкою. Отже, якщо G зліченна, то підпростір φ_X є аналітичним у $\mathbf{P}_G$.

4. У [17] доведено, що кожна худа (першої категорії) топологічна група G може бути зображена як добуток $G = CN$ деякої зліченної множини C і ніде не щільної множини N. Кожну нескінченну групу G можна подати як об'єднання зліченної сім'ї малих підмножин [3].

Чи кожну нескінченну групу G можна розкласти в добуток $G = CS$ деякої зліченної множини C і малої підмножини S?

Відповідь на це питання є ствердною, якщо G аменабельна або має підгрупу зліченного індексу.

Література

1. *Kechris A.* Classical descriptive set theory. – Springer, 1995.
2. *Protasov I. V.* Selective survey on subset combinatorics of groups // Ukr. Math. Bull. – 2011. – **7**. – P. 220 – 257.
3. *Protasov I., Banakh T.* Ball structures and colorings of graphs and groups // Math. Stud. Monogr. Ser. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – **11**.

4. *Banakh T., Lyaskovska N.* Weakly P-small not P-small subsets in groups // Int. J. Algebra Comput. – 2008. – **18**. – P. 1 – 6.
5. *Lutsenko Ie., Protasov I.* Sparse, thin and other subsets of groups // Int. J. Algebra Comput. – 2009. – **19**. – P. 491 – 510.
6. *Protasov I. V., Protasova K. D.* Around P-small subsets of groups // Carpath. Math. Publ. – 2014. – **6**. – P. 337 – 341.
7. *Filali M., Lutsenko Ie., Protasov I.* Boolean group ideals and the ideal structure of βG // Math. Stud. – 2008. – **30**. – P. 1 – 10.
8. *Lutsenko Ie., Protasov I.* Relatively thin and sparse subsets of groups // Ukr. Math. J. – 2011. – **63**, № 2. – P. 216 – 225.
9. *Protasov I., Slobodianiuk S.* Thin subsets of groups // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 9. – P. 1245 – 1253.
10. *Banakh T., Lyaskovska N.* On thin-complete ideals of subsets of groups // Ukr. Math. J. – 2011. – **63**, № 6. – P. 741 – 754.
11. *Banakh T., Protasov I., Slobodianiuk S.* Scattered subsets of groups // Ukr. Math. J. – 2015. – **65**, № 3. – P. 291 – 298.
12. *Hindman N., Strauss D.* Algebra in the Stone – Čech compactification: theory and applications. – Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1998.
13. *Banakh T., Lyaskovska N.* Completeness of translation-invariant ideals on groups // Ukr. Math. J. – 2010. – **62**, № 8. – P. 1022 – 1031.
14. *Zakrzewski P.* On the complexity of the ideal of absolute null sets // Ukr. Math. J. – 2012. – **64**, № 2. – P. 306 – 308.
15. *Protasov I., Zarichnyi M.* General asymptology // Math Stud. Monogr. Ser. – Lviv: VNTL Publ., 2007. – **12**.
16. *Protasov I., Slobodianiuk S.* The dynamical look at the subsets of a group // Appl. Gen. Top. – 2015. – **16**, № 2. – P. 217 – 224.
17. *Banakh T., Guran I., Ravsky O.* Characterizing meager paratopological groups // Appl. Gen. Top. – 2011. – **12**, № 1. – P. 27 – 33.

Одержано 23.06.16,
після доопрацювання — 19.02.17