УДК 517.9

А. Ф. Баранник (Помор. академія, Слупськ, Польща),
Т. А. Баранник (Полтав. нац. пед. ун-т),
І. І. Юрик (Нац. ун-т харч. технологій, Київ)

ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ $u_{tt} = a(t)uu_{xx} + b(t)u_x^2 + c(t)u$

Ansätzes that reduce the equation $u_{tt} = a(t)uu_{xx} + b(t)u_x^2 + c(t)u$ to a system of two ordinary differential equations are defined. Also it is shown that the problem of constructing exact solutions of the form $u = \mu_1(t)x^2 + \mu_2(t)x^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, to this equation, reduces to integrating of a system of linear equations $\mu_1'' = \Phi_1(t)\mu_1$, $\mu_2'' = \Phi_2(t)\mu_2$, where $\Phi_1(t)$ and $\Phi_2(t)$ are arbitrary predefined functions.

Найдены анзацы, редуцирующие уравнение $u_{tt} = a(t)uu_{xx} + b(t)u_x^2 + c(t)u$ к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Также показано, что задача построения точных решений вида $u = \mu_1(t)x^2 + \mu_2(t)x^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, этого уравнения сводится к интегрированию системы линейных уравнений $\mu_1'' = \Phi_1(t)\mu_1$, $\mu_2'' = \Phi_2(t)\mu_2$, где $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ — произвольные наперед заданные функции.

1. Вступ. У даній роботі розглядається задача побудови точних розв'язків з узагальненим відокремленням змінних для нелінійного рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a(t)u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(t)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + c(t)u, \tag{1}$$

де $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$ — функції від t. Рівняння цього типу зустрічаються в задачах хвильової і газової динаміки.

У загальному випадку рівняння (1) має точний розв'язок вигляду [5]

$$u = \mu_2(t)x^2 + \mu_1(t)x + \mu_0(t).$$

Частинні випадки даного рівняння вивчалися в [1, 2, 4, 5]. У роботах [1 – 4] запропоновано метод побудови точних розв'язків з узагальненим відокремленням змінних

$$u = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t)\varphi_i(x),$$

який ґрунтується на відшуканні скінченновимірних підпросторів, інваріантних відносно нелінійного диференціального оператора, що відповідає рівнянню (1). При цьому система координатних функцій $\varphi_i(x)$ задавалася апріорно, а для визначення функцій $\psi_i(t)$ застосовувався метод невизначених коефіцієнтів.

У роботах [6, 7] для побудови точних розв'язків рівняння (1) використовувався анзац вигляду

$$u = d(x)\omega(t) + f(t, x), \tag{2}$$

де невідомі функції $d = d(x)$, $\omega = \omega(t)$ і $f = f(t, x)$ визначалися з умови, що анзац (2) редукує рівняння (1) до звичайного диференціального рівняння з невідомою функцією $\omega = \omega(t)$.

У даній роботі за допомогою анзацу (2) знайдено системи координатних функцій для точних розв'язків рівняння (1), що зводить задачу побудови таких розв'язків до інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь. Так, у випадку

$$a(t) = \frac{\alpha}{1-\alpha}b(t), \qquad \alpha \in \mathbf{R}, \quad \alpha \neq 1, 2, 3,$$

систему координатних функцій утворюють функції x^2, x^α, а якщо $a(t) = -2b(t)$, то координатну систему утворюють функції x^2, $x^2 \ln|x|$. Показано, зокрема, що відшукання точних розв'язків рівняння (1) вигляду

$$u = \mu_1(t)x^2 + \mu_2(t)x^\alpha$$

зводиться до інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\mu_1'' = \Phi_1(t)\mu_1, \qquad \mu_2'' = \Phi_2(t)\mu_2, \tag{3}$$

де $\Phi_1(t)$ і $\Phi_2(t)$ — довільні наперед задані функції. У багатьох випадках система (3) може бути зінтегрована.

2. Редукція рівняння (1) до системи звичайних диференціальних рівнянь. Почнемо розгляд частинного випадку рівняння (1):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a(t)u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(t)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2. \tag{4}$$

Для побудови точних розв'язків рівняння (4) використаємо анзац (2). Анзац (2) редукує (4) до рівняння

$$\omega'' d - \omega(af_{xx}d + 2bf_x d' + afd'') - \omega^2(add'' + bd'^2) + f_{tt} - aff_{xx} - bf_x^2 = 0. \tag{5}$$

Враховуючи, що рівняння (5) повинно бути звичайним диференціальним рівнянням з невідомою функцією $\omega = \omega(f)$, отримуємо

$$add'' + b(d')^2 = \beta(t)d, \tag{6}$$

$$adf_{xx} + 2bd'f_x + ad''f = \tilde{\gamma}(t)d. \tag{7}$$

Питання про знаходження розв'язків рівняння (4) вигляду (2) ми звели до інтегрування системи двох звичайних диференціальних рівнянь, одне з яких є лінійним. Рівняння (6) має частинний розв'язок

$$d(x) = x^\alpha, \qquad a(t) = \frac{\alpha}{1-\alpha}b(t), \qquad \beta = 0, \quad \alpha \neq 1. \tag{8}$$

Підставивши $d = x^\alpha$ у рівняння (7), отримаємо

$$x^2 f_{xx} + 2(1-\alpha)xf_x + \alpha(\alpha-1)f = \gamma(t)x^2, \tag{9}$$

де $\gamma(t) = \dfrac{1-d}{b}\tilde{\gamma}(t)$.

Розглянемо три випадки.

Випадок $\boldsymbol{\alpha = 2}$. З (8) випливає, що $a(t) = -2b(t)$. Загальним розв'язком рівняння (9) для $\alpha = 2$ є функція

$$f = \gamma(t)x^2 \ln|x| + \tilde{\beta}(t)x^2 + \sigma(t)x,$$

і на підставі (2)

$$u = \gamma(t)x^2 \ln|x| + \beta(t)x^2 + \delta(t)x, \tag{10}$$

де $\beta(t) = \tilde{\beta}(t) + \omega(t)$. Підставивши (10) у (4), знайдемо $\delta(t) = 0$ і систему рівнянь для визначення функцій $\beta(t)$ і $\gamma(t)$:

$$\gamma'' = -2b\gamma^2, \qquad \beta'' = -2b\gamma\beta + b\gamma^2.$$

Випадок $\boldsymbol{\alpha = 3.}$ З (8) випливає, що $a(t) = \dfrac{3}{2}b(t)$. Загальним розв'язком рівняння (9) для $\alpha = 3$ є функція

$$f = -\gamma(t)x^2 \ln|x| + \beta(t)x^2 + \tilde{\delta}(t)x^3,$$

а тому на підставі (2)

$$u = -\gamma(t)x^2 \ln|x| + \beta(t)x^2 + \delta(t)x^3, \tag{11}$$

де $\delta(t) = \tilde{\delta}(t) + \omega(t)$. Підставивши (11) у (4), отримаємо $\gamma(t) = 0$, а тому розв'язок (11) має вигляд

$$u = \beta(t)x^2 + \delta(t)x^3.$$

Він є частинним випадком більш загального розв'язку

$$u = \mu_3(t)x^3 + \mu_2(t)x^2 + \mu_1(t)x + \mu_0(t),$$

який наведено в [4].

Випадок $\boldsymbol{\alpha \neq 1, 2, 3.}$ Загальним розв'язком рівняння (9) є функція

$$f = \frac{\gamma(t)}{(\alpha-2)(\alpha-3)}x^2 + \tilde{\mu}_2(t)x^\alpha + \mu_0(t)x^{-1+\alpha},$$

і відповідно до (2)

$$u = \mu_1(t)x^2 + \mu_2(t)x^\alpha + \mu_0(t)x^{-1+\alpha}, \tag{12}$$

де невідомі функції $\mu_0(t)$, $\mu_1(t) = \dfrac{\gamma(t)}{(\alpha-2)(\alpha-3)}$ і $\mu_2(t) = \tilde{\mu}_2(t) + \omega(t)$ необхідно визначити. Підставивши (12) в (4), знайдемо $\mu_0(t) = 0$ і систему рівнянь для визначення функцій $\mu_1(t)$ і $\mu_2(t)$:

$$\mu_1'' = (2a + 4b)\mu_1^2, \tag{13}$$

$$\mu_2'' = \left(-\frac{a^2 b}{(a+b)^2} + \frac{2a^2 + 6ab}{a+b}\right)\mu_1\mu_2. \tag{14}$$

Результати, отримані для рівняння (4), можна узагальнити на рівняння (1). Маємо такі випадки.

Випадок $\boldsymbol{a(t) = -2b(t).}$ Анзац

$$u = \gamma(t)x^2 \ln|x| + \beta(t)x^2$$

редукує рівняння (1) до системи

$$\gamma'' = -2b\gamma^2 + c\gamma, \qquad \beta'' = -2b\gamma\beta + b\gamma^2 + c\beta.$$

Випадок $\boldsymbol{a(t) = -\dfrac{3}{2}b(t).}$ Анзац

$$u = \beta(t)x^2 + \delta(t)x^3$$

редукує рівняння (1) до системи

$$\delta'' = c\delta, \qquad \beta'' = b\beta^2 + c\beta.$$

Випадок $\boldsymbol{a(t) \neq -b(t),\ -2b(t),\ -\frac{3}{2}b(t).}$ Анзац

$$u = \mu_1(t)x^2 + \mu_2(t)x^\alpha, \qquad \alpha = \frac{a}{a+b}, \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

редукує рівняння (1) до системи

$$\mu_1'' = (2a+4b)\mu_1^2 + c\mu_1, \tag{15}$$

$$\mu_2'' = \left(-\frac{a^2b}{(a+b)^2} + \frac{2a^2+6ab}{a+b}\right)\mu_1\mu_2 + c\mu_2. \tag{16}$$

3. Точні розв'язки рівняння $\boldsymbol{u_{tt} = a(t)uu_{xx} + b(t)u_x^2.}$ Розглянемо випадок $a(t) = \frac{\alpha}{1-\alpha}b(t)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 1, 2, 3$. Систему рівнянь (13), (14) для визначення розв'язків вигляду

$$u = \mu_1(t)x^2 + \mu_2(t)x^\alpha$$

даного рівняння запишемо у вигляді

$$\mu_1'' = \frac{4-2\alpha}{\alpha}a\mu_1^2, \tag{17}$$

$$\mu_2'' = (\alpha-2)(\alpha-3)a\mu_1\mu_2. \tag{18}$$

Систему (17), (18) можна зінтегрувати не для кожної функції $a = a(t)$. У випадку $a = \mathrm{const}$ деякі класи точних розв'язків цієї системи наведено в [6]. Нашою задачею є виділення тих функцій $a = a(t)$, для яких система (17), (18) є інтегровною. За допомогою функції

$$(\alpha-2)(\alpha-3)a\mu_1 = \Phi(t) \tag{19}$$

систему рівнянь (17), (18) запишемо так:

$$\mu_1'' = -\frac{2}{\alpha(\alpha-3)}\Phi(t)\mu_1, \tag{20}$$

$$\mu_2'' = \Phi(t)\mu_2. \tag{21}$$

Рівняння (21) є лінійним відносно μ_2 (для відомих функцій a і μ_1). Враховуючи, що функція $a = a(t)$ є довільною, можна вважати, що в системі (20), (21) $\Phi(t)$ є довільною наперед заданою функцією, для якої рівняння (21) цієї системи є інтегровним. Таким чином, знаходження розв'язків системи (17), (18) при умові, що виконується умова (19), де $\Phi(t)$ є довільною наперед заданою функцією, зводиться до інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь (20), (21). Інтегруючи рівняння (20) і використовуючи (19), знаходимо $a = a(t)$.

Розглянемо два найпростіші випадки.

Випадок $\boldsymbol{\Phi(t) = -A,\ A = \mathrm{const} \neq 0.}$ Нехай $B = -\frac{2A}{\alpha(\alpha-3)}$. Якщо $A < 0$ і $B < 0$, то система (20), (21) має розв'язок

$$\mu_1 = C_1 \operatorname{ch}\left(\sqrt{|B|}\,t\right) + C_2 \operatorname{sh}\left(\sqrt{|B|}\,t\right),$$
$$\mu_2 = C_3 \operatorname{ch}\left(\sqrt{|A|}\,t\right) + C_4 \operatorname{sh}\left(\sqrt{|A|}\,t\right),$$

де $C_1,\ C_2,\ C_3$ і C_4 — довільні сталі. З рівності (19) знаходимо

$$a(t) = -\frac{A}{(\alpha-2)(\alpha-3)\big[C_1\,\mathrm{ch}\big(\sqrt{|B|}\,t\big) + C_2\,\mathrm{sh}\big(\sqrt{|B|}\,t\big)\big]},$$

де $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$, а відповідне рівняння (4) має розв'язок

$$u = \Big[C_1\,\mathrm{ch}\big(\sqrt{|B|}\,t\big) + C_2\,\mathrm{sh}\big(\sqrt{|B|}\,t\big)\Big]x^2 + \Big[C_3\,\mathrm{ch}\Big(\sqrt{|A|}\,t\Big) + C_4\,\mathrm{sh}\Big(\sqrt{|A|}\,t\Big)\Big]x^\alpha.$$

Випадок $\boldsymbol{\Phi(t) = At^{-2},\ A = \mathrm{const} \neq 0.}$ Нехай $B = -\dfrac{2A}{\alpha(\alpha-3)}$. Якщо $s_1^2 = B + \dfrac{1}{4} > 0$ і $s_2^2 = A + \dfrac{1}{4} > 0$, то система (20), (21) має розв'язок

$$\mu_1 = C_1 t^{1/2+s_1} + C_2 t^{1/2-s_1}, \qquad \mu_2 = C_3 t^{1/2+s_2} + C_4 t^{1/2-s_2},$$

де $C_1,\ C_2,\ C_3$ і C_4 — довільні сталі. З рівності (19) знаходимо

$$a(t) = \frac{A}{(\alpha-2)(\alpha-3)\big[C_1 t^{5/2+s_1} + C_2 t^{5/2-s_1}\big]},$$

де $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$, а відповідне рівняння (4) має розв'язок

$$u = \big[C_1 t^{1/2+s_1} + C_2 t^{1/2-s_1}\big]x^2 + \big[C_3 t^{1/2+s_2} + C_4 t^{1/2-s_2}\big]x^\alpha.$$

Якщо $s_1^2 = -B - \dfrac{1}{4} > 0$ і $s_2^2 = -A - \dfrac{1}{4} > 0$, то система (20), (21) має розв'язок

$$\mu_1 = C_1 t^{1/2}\cos(s_1 \ln t) + C_2 t^{1/2}\sin(s_1 \ln t),$$
$$\mu_2 = C_3 t^{1/2}\cos(s_2 \ln t) + C_4 t^{1/2}\sin(s_2 \ln t),$$

де $C_1,\ C_2,\ C_3$ і C_4 — довільні сталі. З рівності (19) знаходимо

$$a(t) = \frac{A}{(\alpha-2)(\alpha-3)\big[C_1 t^{5/2}\cos(s_1 \ln t) + C_2 t^{5/2}\sin(s_1 \ln t)\big]},$$

де $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$, а відповідне рівняння (4) має розв'язок

$$u = \big[C_1 t^{1/2}\cos(s_1 \ln t) + C_2 t^{1/2}\sin(s_1 \ln t)\big]x^2 + \big[C_3 t^{1/2}\cos(s_2 \ln t) + C_4 t^{1/2}\sin(s_2 \ln t)\big]x^\alpha.$$

4. Точні розв'язки рівняння (1). Відшукання розв'язків вигляду

$$u = \mu_1(t)x^2 + \mu_2(t)x^\alpha \tag{22}$$

для рівняння (1) у випадку $a(t) = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}b(t),\ \alpha \in \mathbf{R},\ \alpha \neq 1, 2, 3,$ ми звели до інтегрування системи рівнянь (15), (16), яку можна записати так:

$$\mu_1'' = \left[\frac{4-2\alpha}{\alpha}a\mu_1 + c\right]\mu_1, \tag{23}$$

$$\mu_2'' = \big[(\alpha-2)(\alpha-3)a\mu_1 + c\big]\mu_2. \tag{24}$$

За допомогою функцій

$$\frac{4-2\alpha}{\alpha}a\mu_1 + c = \Phi_1(t), \tag{25}$$

$$(\alpha-2)(\alpha-3)a\mu_1 + c = \Phi_2(t) \tag{26}$$

система рівнянь (23), (24) набере вигляду

$$\mu_1'' = \Phi_1(t)\mu_1, \qquad \mu_2'' = \Phi_2(t)\mu_2. \tag{27}$$

Друге рівняння системи (27) є лінійним відносно μ_2 (для відомих функцій $a\mu_1$ і c). Так само перше рівняння системи (27) є лінійним відносно μ_1, якщо є відомими функції $a\mu_1$ і c. Враховуючи, що функції $a = a(t)$ і $c = c(t)$ є довільними, можна вважати, що в системі (27) функції $\Phi_1(t)$ і $\Phi_2(t)$ є довільними наперед заданими функціями, для яких обидва рівняння цієї системи є інтегровними. Інтегруючи систему (27), знаходимо функції $\mu_1 = \mu_1(t)$, $\mu_2 = \mu_2(t)$, а отже, і розв'язок рівняння (1). Розв'язавши систему рівнянь (25), (26), визначимо функції $a\mu_1$ і c, а тому і функції $a = a(t)$ і $c = c(t)$ рівняння (1).

Розглянемо, наприклад, випадок $\Phi_1(t) = At^{-2}$, $\Phi_2(t) = -B$, де A і B — сталі, відмінні від нуля. Розв'язуючи систему (25), (26), знаходимо

$$a\mu_1 = \frac{\alpha(-At^{-2}-B)}{(\alpha-1)(\alpha-2)^2}, \tag{28}$$

$$c = -\frac{2B}{(\alpha-1)(\alpha-2)} - \frac{\alpha(\alpha-3)A}{(\alpha-1)(\alpha-2)}t^{-2}. \tag{29}$$

Якщо $s^2 = -A - \dfrac{1}{4} > 0,\ B < 0$, то система (27) має розв'язок

$$\mu_1 = C_1 t^{1/2}\cos(s\ln t) + C_2 t^{1/2}\sin(s\ln t),$$
$$\mu_2 = C_3\,\mathrm{ch}\big(\sqrt{|B|}\,t\big) + C_4\,\mathrm{sh}\big(\sqrt{|B|}\,t\big),$$

де $C_1,\ C_2,\ C_3$ і C_4 — довільні сталі. З рівності (28) отримуємо

$$a = \frac{\alpha(-At^{-2}-B)}{(\alpha-1)(\alpha-2)^2\big[C_1t^{1/2}\cos(s\ln t) + C_2t^{1/2}\sin(s\ln t)\big]}, \tag{30}$$

де $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$. Тому рівняння (1), у якому функції $a = a(t),\ c = c(t)$ визначаються формулами (29), (30), має точний розв'язок

$$u = \Big[C_1t^{1/2}\cos(s\ln t) + C_2t^{1/2}\sin(s\ln t)\Big]x^2 + \Big[C_3\,\mathrm{ch}\big(\sqrt{|B|}\,t\big) + C_4\,\mathrm{sh}\big(\sqrt{|B|}\,t\big)\Big]x^\alpha.$$

Якщо $s^2 = A + \dfrac{1}{4} > 0,\ B > 0$, то система (27) має розв'язок

$$\mu_1 = C_1t^{1/2+s} + C_2t^{1/2-s},$$
$$\mu_2 = C_3\cos\big(\sqrt{B}\,t\big) + C_4\sin\big(\sqrt{B}\,t\big),$$

де $C_1,\ C_2,\ C_3$ і C_4 — довільні сталі. На підставі рівності (28)

$$a = \frac{\alpha(At^{-2} - B)}{(\alpha-1)(\alpha-2)^2[C_1t^{1/2+s} + C_2t^{1/2-s}]}, \qquad C_1^2 + C_2^2 \neq 0. \tag{31}$$

Отже, рівняння (1), у якому функції $a = a(t)$ і $c = c(t)$ визначаються формулами (31) і (29), має такий розв'язок:

$$u = \left[C_1t^{1/2+s} + C_2t^{1/2-s}\right]x^2 + \left[C_3\cos\left(\sqrt{B}\,t\right) + C_4\sin\left(\sqrt{B}\,t\right)\right]x^{\alpha}.$$

5. Висновки. У випадку $b(t) = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}a(t),\ \alpha \in \mathbf{R},\ \alpha \neq 1,2,3,$ анзац

$$u = \mu_1(t)x^2 + \mu_2(t)x^{\alpha} \tag{32}$$

зводить побудову розв'язків рівняння

$$u_{tt} = a(t)uu_{xx} + b(t)u_x^2 + c(t)u \tag{33}$$

до інтегрування системи лінійних рівнянь

$$\mu_1'' = \Phi_1(t)\mu_1, \qquad \mu_2'' = \Phi_2(t)\mu_2, \tag{34}$$

де $\Phi_1(t)$ і $\Phi_2(t)$ — довільні наперед задані функції. Інтегровні рівняння такого типу добре вивчені. До них належать, наприклад, узагальнене рівняння Лежандра, вироджене гіпергеометричне рівняння, а також рівняння Бесселя і рівняння Матьє. Довільний вибір функцій $\Phi_1(t)$ і $\Phi_2(t)$ дозволяє будувати розв'язки, що мають наперед задані властивості. Відповідні функції $a = a(t)$ і $c = c(t)$ рівняння (33) можна визначити, розв'язавши систему рівнянь (25), (26).

Анзац (32) дає можливість знаходити також точні розв'язки рівняння

$$u_{tt} = a(t)uu_{xx} + b(t)u_x^2 + c(t)u + d(t)x^2 + e(t)x^{\alpha}, \tag{35}$$

де $b(t) = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}a(t),\ \alpha \in \mathbf{R},\ \alpha \neq 1,2,3.$ Анзац (32) редукує рівняння (35) до системи

$$\mu_1'' = \Phi_1(t)\mu_1 + d, \qquad \mu_2'' = \Phi_2(t)\mu_2 + e,$$

де $\Phi_1(t)$ і $\Phi_2(t)$ — довільні наперед задані функції, пов'язані з функціями $a = a(t),\ c = c(t)$ і $\mu_1 = \mu_1(t)$ співвідношеннями (25), (26). Функції $\Phi_1(t)$ і $\Phi_2(t)$ потрібно вибирати так, щоб відповідна система лінійних рівнянь (34) була інтегровною.

Література

1. *Галактионов В. А., Посашков С. А.* Точные решения и инвариантные пространства для нелинейных уравнений градиентной диффузии // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1994. – **34**, № 3. – С. 373 – 383.
2. *Galaktionov V. A.* Invariant subspaces and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 1995. – **125**, № 2. – P. 225.
3. *Galaktionov V. A., Posashkov S. A., Svirshchevskii S. R.* Generalized separation of variables for differential equations with polynomial nonlinearities // Different. Equat. – 1995. – **31**. – P. 233 – 240.
4. *Galaktionov V. A., Svirshchevskii S. R.* Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics. – Boca Raton etc.: Chapman & Hall/CRC, 2007.
5. *Polyanin A. D., Zaitsev V. F.* Handbook of nonlinear partial differential equations. – Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2004.
6. *Barannyk A. F., Barannyk T. A., Yuryk I. I.* Separation of variables for nonlinear equations of hyperbolic and Korteweg – de Vries type // Rep. Math. Phys. – 2011. – **68**, № 1. – P. 97.
7. *Barannyk A. F., Barannyk T. A., Yuryk I. I.* Generalized separation of variables for nonlinear equation $u_{tt} = F(u)u_{xx} + aF'(u)u_x^2$ // Rep. Math. Phys. – 2013. – **71**, № 1. – P. 1 – 13.

Одержано 15.11.16