УДК 517.98

Ю. Г. Ковалев (Восточноукр. нац. ун-т им. В. Даля, Северодонецк)

О КРИТЕРИЯХ ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТИ И ДИЗЪЮНКТНОСТИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ РАСШИРЕНИЙ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОГО СИММЕТРИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

We propose criteria of transversality and disjointness for the Friedrichs and Krein extensions of a nonnegative symmetric operator in terms of the vectors $\{\varphi_j, j \in \mathbb{J}\}$ that form a Riesz basis of the defect subspace. The criterion is applied to the Friedrichs and Krein extensions of the minimal Schrödinger operator $\mathcal{A}_d$ with point potentials. We also present a new proof of the fact that the Friedrichs extension of the operator $\mathcal{A}_d$ is a free Hamiltonian.

Запропоновано критерій трансверсальності та диз'юнктності розширень Фрідріхса та Крейна невід'ємного симетричного оператора у термінах векторів $\{\varphi_j, j \in \mathbb{J}\}$, що утворюють базис Рісса дефектного підпростору. Критерій застосовується до розширень Фрідріхса та Крейна мінімального оператора Шрьодінгера $\mathcal{A}_d$ з точковими потенціалами. Дано нове доведення того, що фрідріхсове розширення оператора $\mathcal{A}_d$ є вільним гамільтоніаном.

1. Введение. Пусть $\mathcal{A}$ — неотрицательный симметрический оператор в гильбертовом пространстве H.

Два самосопряженных расширения $\widetilde{\mathcal{A}}_1$ и $\widetilde{\mathcal{A}}_2$ симметрического оператора $\mathcal{A}$ называются *дизъюнктными*, если $\mathrm{dom}(\widetilde{\mathcal{A}}_1) \cap \mathrm{dom}(\widetilde{\mathcal{A}}_2) = \mathrm{dom}(\mathcal{A})$, и *трансверсальными*, если $\mathrm{dom}(\widetilde{\mathcal{A}}_1) \dotplus \mathrm{dom}(\widetilde{\mathcal{A}}_2) = \mathrm{dom}(\mathcal{A}^*)$. Если дефектные числа оператора $\mathcal{A}$ конечны, то дизъюнктность эквивалентна трансверсальности.

Свойства дизъюнктности и трансверсальности неотрицательных самосопряженных расширений неотрицательных симметрических операторов играют важную роль в исследовании и описании операторов: при построении граничных троек и исследовании спектра самосопряженных расширений [9], при факторизации плотно и неплотно заданных неотрицательных симметрических операторов [4], при описании неотрицательных самосопряженных расширений неплотно заданного неотрицательного симметрического оператора с выходом из пространства [3].

Пусть $\mathbb{J}$ — конечная или счетная монотонная последовательность индексов, $\mathfrak{N}_z(\mathcal{A}) = \ker(\mathcal{A} - zI)$ — дефектное подпространство для оператора $\mathcal{A}$ и система векторов $\{\varphi_j, j \in \mathbb{J}\}$ образует базис Рисса в $\mathfrak{N}_{-1} = \mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A})$.

В работе предлагается критерий трансверсальности и дизъюнктности неотрицательных самосопряженных расширений в терминах векторов системы $\{\varphi_j, j \in \mathbb{J}\}$. Данный критерий применяется к расширениям Фридрихса и Крейна минимальных операторов Шредингера $\mathcal{A}_d$ с точечными потенциалами на прямой, на плоскости и в пространстве, с использованием преобразования Фурье. Предложено еще одно доказательство того, что расширение по Фридрихсу оператора $\mathcal{A}_d$ является свободным гамильтонианом.

2. Неотрицательные самосопряженные расширения и критерии дизъюнктности и трансверсальности. Базис $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ пространства $\mathfrak{H}$, получаемый из ортонормированного базиса с помощью преобразования ограниченным обратимым оператором, называется *базисом, эквивалентным ортонормированному*, или *базисом Рисса* [10]. Если $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ образует базис Рисса в $\mathfrak{H}$, то каждый $f \in \mathfrak{H}$ имеет разложение $f = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j e_j$ такое, что $\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_j|^2 < \infty$, и наоборот, если $\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_j|^2 < \infty$, то ряд $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j e_j$ сходится в $\mathfrak{H}$.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство и $\mathcal{A}$ — плотно определенный неотрицательный симметрический оператор в H $((\mathcal{A}f, f) \geq 0$ для всех $f \in \mathrm{dom}(\mathcal{A}))$. Тогда оператор $\mathcal{A}$ имеет хотя бы одно неотрицательное самосопряженное расширение $\mathcal{A}_F$ — *фридрихсово расширение* (*расширение по Фридрихсу*) [1, 11]. Обозначим через $\mathcal{A}[\cdot,\cdot]$ замыкание полуторалинейной формы

$$\mathcal{A}[f,g] = (\mathcal{A}f, g), \quad f, g \in \mathrm{dom}(\mathcal{A}),$$

и пусть $\mathcal{D}[\mathcal{A}]$ — область определения этого замыкания. Согласно первой теореме о представлении [11], существует неотрицательный самосопряженный оператор $\mathcal{A}_F$, ассоциированный с формой $\mathcal{A}[\cdot,\cdot]$:

$$(\mathcal{A}_F h, \psi) = \mathcal{A}[h, \psi], \qquad \psi \in \mathcal{D}[\mathcal{A}], \quad h \in \mathrm{dom}(\mathcal{A}_F).$$

Очевидно, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_F \subset \mathcal{A}^*$, где $\mathcal{A}^*$ — сопряженный оператор к $\mathcal{A}$. Отметим, что

$$\mathrm{dom}(\mathcal{A}_F) = \mathcal{D}[\mathcal{A}] \cap \mathrm{dom}(\mathcal{A}^*).$$

М. Г. Крейн в [16] установил еще одно расширение с экстремальным свойством минимальности; это расширение называют *расширением Крейна* оператора $\mathcal{A}$ и обозначают $\mathcal{A}_K$. Оператор $\widetilde{\mathcal{A}}$ является неотрицательным самосопряженным расширением оператора $\mathcal{A}$ в том и только в том случае, когда выполняется неравенство $\mathcal{A}_K \leq \widetilde{\mathcal{A}} \leq \mathcal{A}_F$ в смысле ассоциированных замкнутых квадратичных форм [16]. В этом смысле расширение по Фридрихсу является максимальным, а расширение Крейна — минимальным.

Предложение 1 [3, 5]. *Следующие условия эквивалентны*:

1) *расширения Фридрихса $\mathcal{A}_F$ и Крейна $\mathcal{A}_K$ оператора $\mathcal{A}$* ***трансверсальны*** (*соответственно*, ***дизъюнктны***);

2) *оператор $\mathcal{A}$ имеет два неотрицательных самосопряженных трансверсальных* (*соответственно*, *дизъюнктных*) *расширения*;

3) *хотя бы для одного* (*а значит*, *для всех*) $z \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty) : \mathfrak{N}_z(\mathcal{A}) \subset \mathrm{dom}(\mathcal{A}_K^{1/2})$ (*соответственно*, $\mathfrak{N}_z(\mathcal{A}) \cap \mathrm{dom}(\mathcal{A}_K^{1/2})$ *плотно в* $\mathfrak{N}_z(\mathcal{A})$);

4) *хотя бы для одного* (*а значит*, *для всех*) $z \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty) : \mathfrak{N}_z(\mathcal{A}) \subset \mathrm{ran}(\mathcal{A}_F^{1/2})$ (*соответственно*, $\mathfrak{N}_z(\mathcal{A}) \cap \mathrm{ran}(\mathcal{A}_F^{1/2})$ *плотно в* $\mathfrak{N}_z(\mathcal{A})$);

5) $\mathrm{ran}((\mathcal{A}_K + I) - (\mathcal{A}_F + I)) = \mathfrak{N}_{-1}$ (*соответственно*, $\ker((\mathcal{A}_K + I) - (\mathcal{A}_F + I)) = \mathrm{ran}(\mathcal{A} + I)$);

6) *для плотно определенного* $\mathcal{A}$: $\sup_{f \in \mathrm{dom}(\mathcal{A})} \dfrac{\|(I + \mathcal{A}\mathcal{A}^*)^{-1/2}\mathcal{A}f\|^2}{(\mathcal{A}f, f)} < \infty$ (*соответственно*, *из* $\lim_{n\to\infty}(I + \mathcal{A}\mathcal{A}^*)^{-1/2}\mathcal{A}\varphi_n = g$ *и* $\lim_{n\to\infty}(\mathcal{A}\varphi_n, \varphi_n) = 0$ *следует*, *что* $g = 0$);

7) $\mathrm{ran}(\mathcal{A}^*) \subset \mathrm{ran}\left(\mathcal{A}_F^{1/2}\right)$;

8) $\mathrm{dom}(\mathcal{A}^*) \subset \mathrm{dom}\left(\mathcal{A}_K^{1/2}\right)$.

Пусть A — неограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H и

$$H_{+2} \subset H_{+1} \subset H \subset H_{-1} \subset H_{-2}$$

— цепочка оснащенных гильбертовых пространств [7, 14], построенных с помощью оператора A:

$$H_{+2} = \mathrm{dom}(A), \qquad H_{+1} = \mathrm{dom}(|A|^{1/2})$$

с нормами

$$\|f\|_k = \left(\left\| |A|^{k/2} f \right\|^2 + \|f\|^2 \right)^{1/2}, \quad k = 1, 2.$$

Гильбертовы пространства с отрицательным индексом H_{-k}, $k = 1, 2$, — это пополнения H по нормам $\|f\|_{-k} = \sup_{\|g\|_k = 1} |(f, g)|$. Оператор A имеет непрерывное продолжение $\mathbf{A} \in \in \mathcal{L}(H_k, H_{k-2})$, $k = 0, 1$ $(H_0 := H)$ и $|\mathbf{A}|^{1/2} \in \mathcal{L}(H_k, H_{k-1})$, $k = -1, 0$, — это продолжение $|A|^{1/2}$. Резольвента $\mathrm{R}_z = (A - zI)^{-1}$, $z \in \rho(A)$, имеет продолжение $\mathbf{R}_z = (\mathbf{A} - zI)^{-1} \in \in \mathcal{L}(H_{-k}, H_{-k+2})$, $k = 0, 1, 2$.

Пусть Φ — подпространство в H_{-2} такое, что $\Phi \cap H = \{0\}$, тогда оператор $\mathcal{A}$, определенный следующим образом [14]:

$$\operatorname{dom}(\mathcal{A}) = \Big\{ f \in H_{+2} \colon\ (f, \varphi) = 0 \ \ \forall \varphi \in \Phi \Big\}, \quad \mathcal{A} = A \restriction \operatorname{dom}(\mathcal{A}), \tag{1}$$

является замкнутым плотно определенным симметрическим оператором с индексами дефекта, равными $\dim(\Phi)$. Для дефектного пространства $\mathfrak{N}_z(\mathcal{A}) = \ker(\mathcal{A}^* - zI)$ справедлива формула $\mathfrak{N}_z(\mathcal{A}) = \mathbf{R}_z \Phi$. Более того, если A — неотрицательный самосопряженный оператор и $\mathcal{A}$ определен формулами (1), то справедливы следующие утверждения.

Теорема 1 [14]. *Оператор A является расширением по Фридрихсу оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\Phi \cap H_{-1} = \{0\}$.*

Теорема 2 [5, 16]. *Пусть A — неотрицательный самосопряженный оператор и оператор $\mathcal{A}$ задан формулами* (1). *Предположим, что A является фридрихсовым расширением оператора $\mathcal{A}$. Следующие условия эквивалентны*:

1) *расширение Крейна $\mathcal{A}_K$ оператора $\mathcal{A}$ и оператор A трансверсальны* (*соответственно, дизъюнктны*);

2) $A^{1/2} H_{+1} \supset \mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A})$ (*соответственно*, $A^{1/2} H_{+1} \cap \mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A})$ *плотно в* $\mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A})$ *по норме* H);

3) $A^{1/2} H_{+1} \supset (\mathbf{A}^2 + I)^{-1} \Phi$ (*соответственно*, $A^{1/2} H_{+1} \cap (\mathbf{A}^2 + I)^{-1} \Phi$ *плотно в* $(\mathbf{A}^2 + + I)^{-1} \Phi$ *по норме* H_{+1});

4) $\mathbf{A}^{1/2} H_{-1} \supset \Phi$ (*соответственно*, $\mathbf{A}^{1/2} H_{-1} \cap \Phi$ *плотно в* Φ *по норме* H_{-2}).

3. Критерий дизъюнктности и трансверсальности. Обозначим через $\mathbb{J}$ конечное или счетное множество индексов. Пусть система векторов $\{e_j, j \in \mathbb{J}\}$ образует базис Рисса подпространства $\Phi = \overline{\operatorname{span}}\{e_j, j \in \mathbb{J}\}$ такого, что $\Phi \cap H_{-1} = \{0\}$. Пусть A — неотрицательный самосопряженный оператор такой, что $\operatorname{dom}(A) = H_{+2}$, $\operatorname{dom}(A^{1/2}) = H_{+1}$ и оператор $\mathcal{A}$ определен формулой (1). Тогда $\mathfrak{N}_{-1} = \overline{\operatorname{span}}\{\varphi_j = (\mathbf{A} + I)^{-1} e_j, j \in \mathbb{J}\}$ и система $\{\varphi_j, j \in \mathbb{J}\}$ образует базис Рисса подпространства $\mathfrak{N}_{-1} = (\mathbf{A} + I)^{-1} \Phi$.

Предложение 2. *Расширения A и $\mathcal{A}_K$ оператора $\mathcal{A}$*:

1) *дизъюнктны, если*

$$\varphi_j \in \operatorname{ran}(A^{1/2}) \quad \forall j \in \mathbb{J}; \tag{2}$$

2) *трансверсальны в том и только в том случае, когда выполняется условие* (2) *и в* ℓ_2 *ограничен оператор $\mathcal{B}$, определенный матрицей $B = (b_{jk})_{j,k \in \mathbb{J}}$, где*

$$b_{jk} = (\widehat{A}^{-1/2} \varphi_j, \widehat{A}^{-1/2} \varphi_k), \quad j, k \in \mathbb{J}, \tag{3}$$

оператор $\widehat{A}^{-1/2}$ псевдообратный к $A^{1/2}$.

Доказательство. 1. Поскольку система $\{\varphi_j, j \in \mathbb{J}\}$ образует базис Рисса подпространства $\mathfrak{N}_{-1}$ и $\varphi_j \in \operatorname{ran}(A^{1/2})$ $\forall j \in \mathbb{J}$, то из пункта 2 теоремы 2 следует дизъюнктность операторов A и $\mathcal{A}_K$.

2. Допустим, что операторы A и $\mathcal{A}_K$ трансверсальны, тогда по теореме 2 каждый вектор $\varphi = \sum_{j\in\mathbb{J}} c_j\varphi_j$ из $\mathfrak{N}_{-1}$ лежит в $\operatorname{ran}(A^{1/2})$, где $\{c_j\}_{j\in\mathbb{J}} \in \ell_2(\mathbb{J})$. Значит, $\varphi_j \in \operatorname{ran}(A^{1/2})$ $\forall j \in \mathbb{J}$ и существует $f \in H_{+1}$ такой, что $A^{1/2}f = \varphi$. Поскольку $A^{1/2}$ непрерывно действует из H_{+1} в H, то $\widehat{A}^{-1/2}$ — замкнутый оператор из H в H_{+1}. Так как $\mathfrak{N}_{-1}$ — подпространство в H, то по теореме о замкнутом графике сужение $\widehat{A}^{-1/2} \upharpoonright \mathfrak{N}_{-1}$ — ограниченный оператор из $\mathfrak{N}_{-1}$ в H_{+1}, т. е.

$$\|\widehat{A}^{-1/2}\varphi\|_{+1}^2 = \|\widehat{A}^{-1/2}\varphi\|^2 + \|\varphi\|^2 \le \gamma\|\varphi\|^2 \quad \forall\varphi \in \mathfrak{N}_{-1}, \quad \gamma > 0.$$

Поскольку

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{j,k\in\mathbb{J}} (\varphi_j, \varphi_k)c_j\bar{c}_k, \qquad \left\|\widehat{A}^{-1/2}\varphi\right\|^2 = \sum_{j,k\in\mathbb{J}} (\widehat{A}^{-1/2}\varphi_j, \widehat{A}^{-1/2}\varphi_k)c_j\bar{c}_k$$

и матрица Грамма $\|(\varphi_j, \varphi_k)\|_{j,k\in\mathbb{J}}$ порождает в $\ell_2(\mathbb{J})$ ограниченный обратимый оператор [10], то

$$\|\varphi\|^2 \le \gamma' \sum_{j\in\mathbb{J}} |c_j|^2$$

и, согласно (3),

$$\sum_{j,k\in\mathbb{J}} \big(\widehat{A}^{-1/2}\varphi_j, \widehat{A}^{-1/2}\varphi_k\big)c_j\bar{c}_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}c_j\bar{c}_k.$$

Следовательно,

$$0 < \sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}c_j\bar{c}_k \le \gamma'' \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 \quad \forall\{c_1, c_2, c_3, \ldots\} \in \ell_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Значит, B — ограниченный неотрицательный самосопряженный оператор в $\ell_2(\mathbb{N})$ [6].

Предполагая, что оператор B, определенный матрицей с элементами вида (3), ограничен, и проводя рассуждения в обратном порядке, убеждаемся, что расширения A и $\mathcal{A}_K$ трансверсальны.

Предложение 2 доказано.

Из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Если $\varphi_j \notin \operatorname{ran}(A^{1/2})$ $\forall j \in \mathbb{J}$, то операторы A и $\mathcal{A}_K$ дизъюнктны тогда и только тогда, когда в $\operatorname{span}\{\varphi_j, j \in \mathbb{J}\}$ существует такая линейно независимая система векторов $G = \{g_j, j \in \mathbb{J}\}$, что*

$$\overline{\operatorname{span}} G = \mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A}) \quad \textit{и} \quad g_j \in \operatorname{ran}(A^{1/2}) \quad \forall j \in \mathbb{J}.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть операторы A и $\mathcal{A}_K$ дизъюнктны, тогда $\mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A}) \cap A^{1/2}H_{+1}$ плотно в $\mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A})$ по норме H, т. е. в $\mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A})$ существует система векторов $G = \operatorname{span}\{g_j, j \in \mathbb{J}\}$ такая, что

$$G \subset A^{1/2}H_{+1} \qquad \text{и} \qquad \overline{G} = \mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A}) \quad \text{по норме} \quad H.$$

Достаточность. Пусть существует система векторов $G = \operatorname{span}\{g_j, j \in \mathbb{J}\} \subset \mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A})$ такая, что $G \subset A^{1/2}H_{+1}$ и $\overline{G} = \mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A})$ по норме H. Тогда $\mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A}) \cap A^{1/2}H_{+1} \supset G$ и, следовательно, $\mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A}) \cap A^{1/2}H_{+1}$ плотно в $\mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A})$ по норме H.

4. Неотрицательные гамильтонианы, соответствующие точечным взаимодействиям. При исследовании операторов Шредингера в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^d),\ d = 1, 2, 3$, с потенциалами, сосредоточенными на дискретном множестве точек в $\mathbb{R}^d$, необходимо ассоциировать самосопряженные операторы в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с дифференциальными выражениями

$$h_{Y,q,\alpha} = -\Delta + \sum_{j\in\mathbb{J}} \alpha_j \delta(x - y_j), \qquad h_{Y,q,\beta} = -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{j\in\mathbb{J}} \beta_j \langle\cdot, \delta'_j\rangle \delta'_j(x),$$

где $\mathbb{J}$ — монотонная последовательность индексов, $Y = \{y_j\}_{j\in\mathbb{J}} \subset \mathbb{R}^d,\ \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{C},\ \delta'_j = \delta'(x - y_j)\ \forall j \in \mathbb{J}$, $\delta(\cdot)$ и $\delta'(\cdot)$ — дельта-функция Дирака и ее производная.

Существует несколько методов, чтобы ассоциировать самосопряженные операторы с приведенными дифференциальными выражениями. Метод квадратичных форм имеет ограничение, так как дельта-функция $\delta(\cdot)$ не является непрерывным функционалом над $W_2^1(\mathbb{R}^d),\ d = 2, 3$. В дальнейшем $W_2^{\pm1}(\mathbb{R}^d),\ W_2^{\pm2}(\mathbb{R}^d)$ — пространства Соболева [7], где $d = 1, 2$ или 3. Во всех трех случаях $d = 1, 2, 3$ используется метод самосопряженных расширений, предложенный Ф. А. Березиным и Л. Д. Фаддеевым [8]. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ следующие дифференциальные операторы:

$$\mathcal{A}_d := -\Delta, \qquad \mathrm{dom}(\mathcal{A}_d) := \big\{f \in W_2^2(\mathbb{R}^d) \colon f(y) = 0,\ y \in Y\big\}, \quad d = 2, 3,$$

$$\mathcal{A}_1 := -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \mathrm{dom}(\mathcal{A}_1) := \big\{f \in W_2^2(\mathbb{R}) \colon f'(y) = 0,\ y \in Y\big\},$$

где Δ — оператор Лапласа в $L_2(\mathbb{R}^d)$, $d = 2, 3$, и $Y = \{y_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ — конечное или счетное множество точек в $\mathbb{R}^d$ таких, что

$$\inf\big\{|y_j - y_k|, j \neq k\big\} =: \rho(Y) > 0. \tag{4}$$

Оператор $\mathcal{A}_d$ — основа для исследований гамильтонианов в $\mathbb{R}^d$, соответствующих точечным δ ($d = 2$ или 3) и δ' ($d = 1$) взаимодействиям [1] (см. обзор и библиографию в [5], а также [2, 8, 15, 18]). Оператор $\mathcal{A}_d$ линейный, плотно определенный, замкнутый, неотрицательный, симметрический и является сужением самосопряженного неотрицательного оператора A_d (свободного гамильтониана) [1]:

$$A_d = -\Delta, \qquad \mathrm{dom}(A_d) = W_2^2(\mathbb{R}^d), \quad d = 1, 2, 3. \tag{5}$$

Тройки $W_2^2(\mathbb{R}^d) \subset L_2(\mathbb{R}^d) \subset W_2^{-2}(\mathbb{R}^d)$ и $W_2^1(\mathbb{R}^d) \subset L_2(\mathbb{R}^d) \subset W_2^{-1}(\mathbb{R}^d)$ — оснащенные гильбертовы пространства [7], т. е. гильбертово пространство $W_2^{-2}(\mathbb{R}^d)$ $(W_2^{-1}(\mathbb{R}^d))$ — множество всех непрерывных антилинейных функционалов на $W_2^2(\mathbb{R}^d)$ (на $W_2^1(\mathbb{R}^d)$). Имеем цепочку оснащенных гильбертовых пространств $W_2^2(\mathbb{R}^d) \subset W_2^1(\mathbb{R}^d) \subset L_2(\mathbb{R}^d) \subset W_2^{-1}(\mathbb{R}^d) \subset W_2^{-2}(\mathbb{R}^d)$.

Известно, что $\delta(\cdot - y) \in W_2^{-2}(\mathbb{R}^d) \setminus W_2^{-1}(\mathbb{R}^d)\ \forall y \in \mathbb{R}^d,\ d = 2, 3$, и $\delta'(\cdot - y) \in W_2^{-2}(\mathbb{R}) \setminus W_2^{-1}(\mathbb{R})$ при любом $y \in \mathbb{R}$ [1]. Определим следующие подпространства в $W_2^{-2}(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned} \Phi_d &:= \overline{\mathrm{span}}\{\delta(\cdot - y),\ y \in Y\} \ \text{— замыкание в } W_2^{-2}(\mathbb{R}^d), \quad d = 2, 3, \\ \Phi_1 &:= \overline{\mathrm{span}}\{\delta'(\cdot - y),\ y \in Y\} \ \text{— замыкание в } W_2^{-2}(\mathbb{R}). \end{aligned} \tag{6}$$

Тогда $\Phi_d \cap L_2(\mathbb{R}^d) = \{0\}$ [1], а область определения оператора $\mathcal{A}_d$ можно записать так:

$$\mathrm{dom}(\mathcal{A}_d) = \{f \in W_2^2(\mathbb{R}^d) : \ (f, \varphi) = 0, \ \varphi \in \Phi_d\}, \quad d = 1, 2, 3.$$

Оператор A_d, заданный формулами (5), неотрицательный самосопряженный в $H = L_2(\mathbb{R}^d)$ и является расширением по Фридрихсу оператора $\mathcal{A}_d$ (см., например, [12, 13, 17]). Положим

$$H_{+2} = \mathrm{dom}(A_d) = W_2^2(\mathbb{R}^d), \qquad H_{+1} = \mathrm{dom}(A_d^{1/2}) = W_2^1(\mathbb{R}^d),$$

$$H_{-1} = W_2^{-1}(\mathbb{R}^d), \qquad H_{-2} = W_2^{-2}(\mathbb{R}^d), \quad d = 1, 2, 3,$$

$$\|f\|_k = \left(\left\||A|^{k/2} f\right\|^2 + \|f\|^2\right)^{1/2}, \qquad \|f\|_{-k} = \sup_{\|g\|_k = 1} |(f, g)|, \quad k = 1, 2.$$

Система производных дельта-функций $\{\delta'(\cdot - y), \ y \in Y \subset \mathbb{R}\}$ и системы дельта-функций $\{\delta(\cdot - - y), \ y \in Y \subset \mathbb{R}^d\}$, $d = 2, 3$, образуют базисы Рисса в замыкании своих линейных оболочек (6) в гильбертовых пространствах $W_2^{-2}(\mathbb{R}^d)$, $d = 1, 2, 3$ [12, 13]. Приведем еще одно доказательство того факта, что оператор A_d является расширением по Фридрихсу оператора $\mathcal{A}_d$.

Теорема 3. *Пусть множество точек Y удовлетворяет условию* (4). *Тогда свободный гамильтониан A_d является расширением по Фридрихсу оператора $\mathcal{A}_d$.*

Доказательство (*получено совместно с Ю. М. Арлинским*). Допустим, что существует $\vec{c} = \{c_j\} \in \ell_2(\mathbb{N})$ и

$$\mu_d(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \delta(x - y_j) \in W_2^{-1}(\mathbb{R}^d), \quad d = 2, 3, \qquad \mu_1(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \delta'(x - y_j) \in W_2^{-1}(\mathbb{R}).$$

Тогда $\mu_d(x)$ порождает линейный непрерывный функционал μ_d на $W_2^1(\mathbb{R}^d)$ по формуле [7] $\mu_d[f] = \big(f(\cdot), \mu_d(\cdot)\big)_{L_2(\mathbb{R}^d)}$, $f \in W_2^1(\mathbb{R}^d)$. Кроме того, также по теореме Рисса

$$\mu_d[f] = \big(f(\cdot), \varphi(\cdot)\big)_{W_2^1(\mathbb{R}^d)} = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{\varphi(x)}\, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^d} (\nabla f)(x)\overline{(\nabla\varphi)(x)} dx =$$

$$= \big(f(\cdot), \varphi(\cdot)\big)_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \big((\nabla f)(\cdot), (\nabla\varphi)(\cdot)\big)_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где $\varphi \in W_2^1(\mathbb{R}^d)$. В частности, для любого $f \in W_2^2(\mathbb{R}^d)$ имеем

$$\mu_d[f] = \big(f(\cdot), \mu_d(\cdot)\big)_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{\varphi(x)}\, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^d} (\nabla f)(x)\overline{(\nabla\varphi)(x)}\, dx. \tag{7}$$

Определим функции

$$\omega_h(t) = \begin{cases} e^{-\frac{h^2}{h^2 - t^2}}, & |t| \le h, \\ 0, & |t| > h, \end{cases} \qquad v_{h,1}(t) = \int\limits_{-h}^{t} \big(\omega_h(x) - \omega_h(x - 2h)\big)\, dx,$$

где $h < \dfrac{1}{2}\rho(Y)$. Тогда

$$0 \le \omega_h(t) \le e^{-1} \qquad \text{и} \qquad \frac{d\omega_h(t)}{dt} = -\frac{2h^2 t}{(h^2 - t^2)^2}\, e^{-\frac{h^2}{h^2 - t^2}}.$$

Отсюда

$$\left|\frac{d\omega_h(t)}{dt}\right| \le 6e^{-2}h^{-1}, \qquad 0 < v_{h,1}(t) \le 2e^{-1}h.$$

Пусть $x \in \mathbb{R}^d,\ d = 2, 3,\ v_{h,d}(x) = \omega_h(|x|)$. Тогда

$$v_{h,d}(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \qquad \operatorname{supp} v_{h,d} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \le h\},$$

$$0 < v_{h,d}(x) \le e^{-1}, \qquad (\nabla v_{h,d})(x) = \frac{d\,\omega_h(|x|)}{d\,|x|}\,\frac{x}{|x|},$$

$$\big|\nabla v_{h,d}(x)\big| \le 6e^{-2}h^{-1}.$$

Кроме того,

$$\big\|v_{h,2}(t)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \le \frac{1}{e}\sqrt{\pi}\,h, \qquad \big\|v_{h,3}(t)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \le \frac{1}{e}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\sqrt{h^3},$$

$$\big\|v'_{h,1}(t)\big\|_{L_2(\mathbb{R})} \le 2e^{-1}\sqrt{2h}, \qquad \big\|v_{h,1}(t)\big\|_{L_2(\mathbb{R})} \le e^{-1}\sqrt{(2h)^3}.$$

Поэтому

$$\big\|v_{h,d}(x)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \big\|v'_{h,1}(x)\big\|_{L_2(\mathbb{R})} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{8}$$

Если $d = 3$, то $\big\|(\nabla v_{h,3})(\cdot - y_j)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \le 6e^{-2}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\sqrt{h}$. Отсюда

$$\lim_{h\to 0}\big\|(\nabla v_{h,3})(\cdot - y_j)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} = 0. \tag{9}$$

Если $d = 2$, то

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^2}(\nabla v_{h,2})(x - y_j)\overline{(\nabla\varphi)(x)}\,dx\right| \le$$

$$\le \left(\int\limits_{|x-y_j|\le h}\big|(\nabla v_{h,2})(x - y_j)\big|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_{|x-y_j|\le h}\big|(\nabla\varphi)(x)\big|^2\,dx\right)^{1/2} \le$$

$$\le 2e^{-1}\sqrt{\pi}\left(\int\limits_{|x-y_j|\le h}\big|(\nabla\varphi)(x)\big|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Поэтому из абсолютной непрерывности интеграла Лебега получаем

$$\lim_{h\to 0}\Big((\nabla v_{h,2})(\cdot - y_j), (\nabla\varphi)(\cdot)\Big)_{L_2(\mathbb{R}^2)} = 0. \tag{10}$$

Если $f_h(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j\, v_{h,d}(x - y_j)$ при $d = 2, 3$ и $f_h(x) = -\sum_{j=1}^n \lambda_j\, v_{h,1}(x - y_j)$ при $d = 1$, где $0 < h < \dfrac{1}{2}\rho(Y)$, то из (7) следует

$$\frac{1}{e}\sum_{j=1}^{n} c_j\lambda_j = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\big(v_{h,d}(\cdot - y_j), \varphi(\cdot)\big)_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\Big((\nabla v_{h,d})(\cdot - y_j), (\nabla\varphi)(\cdot)\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Далее, учитывая (8) – (10), получаем $\sum_{j=1}^{n} c_j\lambda_j = 0$. Поскольку последнее равенство справедливо для любого n и любого набора $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, а также $c = \{c_j\} \in \ell_2(\mathbb{N})$, то $c_j = 0$ для всех j. Это означает, что $\mu_d(x) = 0$, т. е. $\Phi_d \cap H_{-1} = \{0\}$. По теореме 1 получаем $A_d = (\mathcal{A}_d)_F$.

Теорема 3 доказана.

Обозначим через $\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{R}^d, dx) \to L^2(\mathbb{R}^d, dp)$ преобразование Фурье:

$$\mathcal{F}f = \widehat{f}(p) = \lim_{R\to\infty}(2\pi)^{-d/2}\int\limits_{|x|<R} f(x)e^{-ixp}\,dx.$$

Тогда $\widehat{H} = L_2(\mathbb{R}^d, dp)$. Пусть $\widehat{A} = \mathcal{F}A\mathcal{F}^{-1}$. Оператор $\widehat{A}$ действует в $\widehat{H}$ и унитарно эквивалентен оператору A. Пусть $\widehat{H}_k := \mathcal{F}H_k$, $k = \pm 1, \pm 2$, $\widehat{\Phi}_d = \mathcal{F}\Phi_d$. Имеем

$$\operatorname{dom}\big(\widehat{A}_d^{k/2}\big) = \widehat{H}_k = \left\{\widehat{f} \in L_2(\mathbb{R}^d, dp)\colon \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(p)|^2(|p|^{2k}+1)dp < \infty\right\},$$

$$\big(\widehat{A}_d^{k/2}\widehat{f}\big)(p) = |p|^k\widehat{f}(p), \qquad d = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2,$$

$$\widehat{\Phi}_d = \mathcal{F}\Phi_d = \overline{\operatorname{span}}\{e^{-ipy},\, y \in Y\}, \quad d = 2, 3, \quad \text{— замыкание в} \quad \widehat{H}_{-2},$$

$$\widehat{\Phi}_1 = \mathcal{F}\Phi_1 = \overline{\operatorname{span}}\{pe^{-ipy},\, y \in Y\} \quad \text{— замыкание в} \quad \widehat{H}_{-2},$$

$$\widehat{\mathfrak{N}}_z(\widehat{\mathcal{A}}_d) = \overline{\operatorname{span}}\left\{\frac{e^{-ipy}}{|p|^2 - z},\, y \in Y\right\}, \quad d = 2, 3,$$

$$\widehat{\mathfrak{N}}_z(\widehat{\mathcal{A}}_1) = \overline{\operatorname{span}}\left\{\frac{pe^{-ipy}}{p^2 - z},\, y \in Y\right\}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+.$$

Системы функций $\big\{e_j^{(d)}(p) := e^{-ipy_j}\big\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\left\{\varphi_j^{(d)}(p) := \dfrac{e^{-ipy_j}}{|p|^2+1}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$, $d = 2, 3$, и $\big\{e_j^{(1)}(p) := pe^{-ipy_j}\big\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\left\{\varphi_j^{(1)}(p) := \dfrac{pe^{-ipy_j}}{|p|^2+1}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ образуют базисы Рисса подпространств $\widehat{\Phi}_d$, $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{\mathcal{A}}_d)$ и, соответственно, $\widehat{\Phi}_1$, $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{\mathcal{A}}_1)$ [12, 13]. В работе [17] доказано, что при условии (4) система функций $\left\{\dfrac{e^{-|x-y_j|}}{|x-y_j|}\right\}_{j=1}^{\infty}$ образует базис Рисса дефектного подпространства оператора $\mathcal{A}_3$.

Далее полагаем, что множество точек Y удовлетворяет условию (4).

Теорема 4. *Расширения Фридрихса и Крейна оператора* $\mathcal{A}_3$: 1) *при* $|Y| = \infty$ *дизъюнктны. Они трансверсальны в том и только в том случае, когда является ограниченным оператор, определенный матрицей* $B_3 = \|b_{jk}\|_{j,k\in\mathbb{J}}$, *где*

$$b_{jk} = \begin{cases} \dfrac{1}{|y_j - y_k|}, & j \neq k, \\ 1, & j = k; \end{cases}$$

2) *трансверсальны при* $|Y| = n < \infty$.

Доказательство. Поскольку

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{|\varphi_j^{(3)}(p)|^2(|p|^2+1)}{|p|^2}\,dp = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{|e^{-ipy_j}|^2}{|p|^2(|p|^2+1)}\,dp = 2\pi^2,$$

то $\varphi_k^{(3)}(x) \in \operatorname{ran}\left(A_3^{1/2}\right)$ и, следовательно, по предложению 2 расширения Фридрихса и Крейна оператора $\mathcal{A}_3$ дизъюнктны. Отсюда следует их трансверсальность для случая $|Y| = n < \infty$. Так как [13]

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\left|\sum_{j\in\mathbb{N}} c_j e^{-ipy_j}\right|^2}{|p|^2(|p|^2+1)}\,dp = 2\pi^2 \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2 + \sum_{j,k=1,j\neq k}^{n} \frac{1-e^{-|y_k-y_j|}}{|y_k-y_j|}\,c_j\overline{c_k}\right) =$$

$$= 2\pi^2 \lim_{n\to\infty}\sum_{j,k=1}^{n} M_{jk}c_j\overline{c_k},$$

то, согласно предложению 2, трансверсальность расширений Фридрихса и Крейна оператора $\mathcal{A}_3$ эквивалентна тому, что оператор M, определенный матрицей $\|M_{jk}\|_{j,k\in\mathbb{J}}$, где

$$M_{jk} = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-|y_k-y_j|}}{|y_k-y_j|}, & j\neq k,\\ 1, & j=k, \end{cases}$$

является ограниченным в $\ell_2(\mathbb{J})$. Оператор Q, определенный матрицей $\|q_{jk}\|_{j,k\in\mathbb{Z}}$,

$$q_{jk} = \begin{cases} \dfrac{e^{-|y_k-y_j|}}{|y_k-y_j|}, & j\neq k,\\ 0, & j=k, \end{cases}$$

является ограниченным, так как удовлетворяет тесту Шура [19, с. 159]

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|q_{jk}| = \sup_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z},k\neq j}\frac{e^{-|y_k-y_j|}}{|y_k-y_j|} \leq \frac{1}{\rho}\sup_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\rho|k-j|} <$$

$$< \frac{2}{\rho}\sup_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\rho n} = \frac{2}{\rho(1-e^{-\rho})} < \infty, \tag{11}$$

где ρ удовлетворяет условию (4). Отсюда получаем требуемое условие трансверсальности для случая $|Y| = \infty$.

Теорема 4 доказана.

Замечание. В [17] для случая $\mathbb{R}^3$ эквивалентный критерий трансверсальности получен с использованием техники граничных троек и функции Вейля.

Теорема 5. *Расширения Фридрихса и Крейна оператора* $\mathcal{A}_2$: 1) *дизъюнктны, но не трансверсальны при* $|Y| = \infty$; 2) *не дизъюнктны при* $|Y| = n < \infty$.

Доказательство. Поскольку

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|\varphi_j^{(2)}(p)|^2(|p|^2+1)}{|p|^2}\,dp = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|e^{-ipy_j}|^2}{|p|^2(|p|^2+1)}\,dp = +\infty,$$

то по предложению 2 расширения Фридрихса и Крейна оператора $\mathcal{A}_2$ не трансверсальны, а в случае $|Y| = n < \infty$ не дизъюнктны. Пусть, как и ранее, $\mathfrak{N}_{-1} = \overline{\operatorname{span}}\{f_j, j \in \mathbb{J}\}$. Рассмотрим систему векторов

$$G := \big\{g_j(p) = \varphi_j(p) - \varphi_{j+1}(p),\ j \in \mathbb{N}\big\}.$$

Так как любой вектор из $\operatorname{span} G$ имеет конечное число ненулевых координат относительно базиса $\{\varphi_j(p)\}_{j\in\mathbb{N}}$ и сумма координат равна нулю, то $\operatorname{span} G$ всюду плотно в $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\mathcal{A}_2)$.

Поскольку [13]

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|g_j(p)|^2(|p|^2+1)\,dp}{|p|^2} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|e^{-ipy_j} - e^{-ipy_{j+1}}|^2\,dp}{|p|^2(|p|^2+1)} =$$

$$= 4\pi \int\limits_0^\infty \frac{1 - J_0(\rho|a|)}{\rho(\rho^2+1)}\,d\rho = 4\pi\left(\gamma + \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(i|y_j - y_{j+1}|)\right) < \infty,$$

где $H_0^{(1)}(iz)$ — цилиндрическая функция мнимого аргумента (функция Ханкеля), то из предложения 2 получаем первое утверждение теоремы.

Теорема 5 доказана.

Теорема 6. *Расширения Фридрихса и Крейна оператора $\mathcal{A}_1$ трансверсальны.*

Доказательство. Поскольку

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|\varphi_j^{(1)}(p)|^2(p^2+1)}{p^2}\,dp = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|e^{-ipy_j}|^2}{p^2+1}\,dp = \pi,$$

то по предложению 2 расширения Фридрихса и Крейна оператора $\mathcal{A}_1$ дизъюнктны, а в случае $|Y| = n < \infty$ и трансверсальны.

Для $\widehat{\varphi}(p) \in \widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\mathcal{A}_1)$, $\widehat{\varphi}(p) = \sum_{j\in\mathbb{J}} c_j \widehat{\varphi}_j^{(1)}(p)$, $\{c_j, j \in \mathbb{J}\} \in \ell_2(\mathbb{J})$ (см. [12])

$$\sum_{j,k\in\mathbb{J}} \left(\widehat{A}^{-1/2}\varphi_j^{(1)}(p), \widehat{A}^{-1/2}\varphi_k^{(1)}(p)\right) c_j\bar{c}_k =$$

$$= \sum_{j,k\in\mathbb{J}} c_j\bar{c}_k \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{ip(y_j-y_k)}}{p^2+1} dp = \pi \sum_{j,k\in\mathbb{J}} c_j\bar{c}_k e^{-|y_j-y_k|} = \pi \lim_{n\to\infty} \sum_{j,k=-n}^{n} c_j\bar{c}_k Q_{jk}.$$

Оператор Q, определенный матрицей $\|Q_{jk}\|_{j,k\in\mathbb{J}}$, $Q_{jk} = e^{-|y_j-y_k|}$, является ограниченным в ℓ_2, так как удовлетворяет тесту Шура (исходя из (11) и (4)). Тогда из предложения 2 следует трансверсальность расширений Фридрихса и Крейна оператора $\mathcal{A}_1$ при $|Y| = \infty$.

Теорема 6 доказана.

Литература

1. *Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H.* Solvable models in quantum mechanics // Texts and Monogr. Phys. – New York: Springer-Verlag, 1988. – 452 p.
2. *Albeverio S., Kostenko A., Malamud M.* Spectral theory of semibounded Sturm – Liouville operators with local interactions on a discrete set // J. Math. Phys. – 2010. – **51**, № 10. – P. 24.
3. *Arlinskiĭ Yu., Belyi S.* Non-negative self-adjoint extensions in rigged Hilbert space // Oper. Theory: Adv. and Appl. – 2013. – **236**. – P. 11 – 41.
4. *Arlinskiĭ Yu., Kovalev Yu.* Factorizations of nonnegative symmetric operators // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2013. – **19**, № 3. – P. 211 – 226.
5. *Arlinskii Yu., Tsekanovskii E.* M. Krein research on semi-bounded operators, its contemporary developments, and applications // Oper. Theory: Adv. and Appl. – 2009. – **190**. – P. 65 – 112.
6. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 544 с.
7. *Березанский Ю. М.* Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
8. *Березин Ф. А., Фаддеев Л. Д.* Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом // Докл. АН СССР. – 1967. – **137**, № 5. – С. 1011 – 1014.
9. *Derkach V. A., Malamud M. M.* The extension theory of Hermitian operators and the moment problem // J. Math. Sci. – 1995. – **73**. – P. 141 – 242.
10. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1965. – 448 с.
11. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
12. *Kovalev Yu. G.* 1D nonnegative Schrödinger operators with point interactions // Mat. Stud. – 2013. – **39**, № 2. – P. 150 – 163.
13. *Ковалев Ю. Г.* К теории неотрицательных гамильтонианов на плоскости и в пространстве // Укр. мат. вісн. – 2014. – **11**, № 2. – С. 203 – 226.
14. *Кошманенко В. Д.* Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 195 с.
15. *Kostenko A., Malamud M.* 1–D Schrödinger operators with local point interactions on a discrete set // J. Different. Equat. – 2010. – № 249. – P. 253 – 304.
16. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения // Мат. сб. – 1947. – **20**, № 3. – С. 431 – 495.
17. *Malamud M. M., Schmüdgen K.* Spectral theory of Schrödinger operators with infinitely many point interactions and radial positive definite functions // J. Funct. Anal. – 2012. – **263**. – P. 3144 – 3194.
18. *Mikhailets V. A.* Spectral properties of the one-dimensional Schrödinger operator with point intersections // Repts Math. Phys. – 1995. – **36**, № 2/3. – P. 495 – 500.
19. *Young R. M.* An introduction to nonharmonic Fourier series. – New York: Acad. Press, 1980.

Получено 13.03.17