УДК 519.21

І. К. Мацак (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка),
А. М. Плічко (Краків. політехніка ім. Т. Косцюшка),
А. С. Шелуденко (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ МАКСИМУМУ СУМ НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

We study the conditions for the weak convergence of the maximum of sums of independent random processes in the spaces $C[0,1]$ and L_p and present examples of applications to the analysis of statistics of the type ω^2.

Изучаются условия слабой сходимости максимума сумм независимых случайных процессов в пространствах $C[0,1]$ и L_p. Приведены примеры применений к анализу статистик типа ω^2.

1. Вступ. Нехай (ξ_n) — незалежні однаково розподілені випадкові величини з $\mathbf{E}\xi_n = 0$ і $\mathbf{D}\xi_n = 1$. У 1946 р. П. Ердеш і М. Кац [1] встановили, що

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big\{ \max(0, \xi_1, \xi_1+\xi_2, \ldots, \xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n) < x\sqrt{n}\big\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^x \exp(-t^2/2)dt. \qquad (1)$$

Крім того, для процесу броунівського руху $W(t)$ в $\mathbb{R}$ справджується рівність [2]

$$\mathbf{P}\left\{ \sup_{0\le t\le 1} W(t) < x \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^x \exp(-t^2/2)dt.$$

Фактично у цих співвідношеннях вже міститься одна з тих важливих ідей, які привели до побудови теорії слабкої збіжності мір у функціональних просторах (див. [3, 4]). Рівності типу (1) розглядалися звичайно і у векторному випадку [5, 6]. Тут ми будемо досліджувати нескінченновимірний випадок.

Нехай $X = \big\{X(s),\ s \in [0,1]\big\}$ — деякий випадковий процес, а $\Gamma = \big\{\Gamma(s),\ s \in [0,1]\big\}$ — нормальний випадковий процес, визначені на ймовірнісному просторі $(\Omega, \Sigma, \mathbf{P})$, зі значеннями в $\mathbb{R}$ такі, що для будь-яких $s, t \in [0,1]$

$$\mathbf{E}X(s) = \mathbf{E}\Gamma(s) = 0 \quad \text{і} \quad \mathbf{E}X(s)X(t) = \mathbf{E}\Gamma(s)\Gamma(t) =: R(s,t). \qquad (2)$$

Розглянемо сепарабельний функціональний банахів простір $B = \big\{x = x(s),\ s \in [0,1]\big\}$. Будемо говорити, що випадковий процес *належить* B *майже напевно* (м. н.), якщо його вибіркові функції належать B м. н.

Припустимо, що Γ належать B м. н., і введемо випадкову функцію двох змінних

$$W(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(s) F_n(t), \qquad s, t \in [0,1], \qquad (3)$$

де (Γ_n) — послідовність незалежних копій процесу Γ, а $F_n(t)$ — пікоподібні функції Фабера–Шаудера $\left(\text{які є інтегралами відповідних функцій Гаара } H_n(u), \text{ точніше, } F_n(t) = \int_0^t H_{n-1}(u)du\right)$.

Відомо (див. [7, с. 128; 8]), що ряд (3) збігається як для будь-якого $s \in [0,1]$, так і за нормою простору B рівномірно по $t \in [0,1]$ м. н. Зазначимо, що в $\mathbb{R}$ така конструкція була запропонована Леві [9] для зображення броунівського руху (див. також [10]).

Для будь-яких $s,t \in [0,1]$ $W(s,t)$ — нормально розподілена випадкова величина, а при фіксованому $t \in [0,1]$ $W(\cdot,t)$ буде нормально розподіленим випадковим елементом в B, тобто $W(\cdot,t)$ — нормально розподілений неперервний однорідний процес з незалежними приростами в B. Такий процес називається *процесом броунівського руху* (*або вінерівським процесом*) *зі значеннями в* B. Це означення для випадку $B = \mathbb{R}^m$ збігається з класичним означенням [5, с. 65].

Позначимо через (X_n) послідовність незалежних копій процесу X і покладемо $S_n(s) = \sum_{k=1}^{n} X_k(s),\ S_0 = 0,\ \overline{S}_n(s) = \max_{0\le k\le n} S_k(s),\ n \ge 1$. Має місце така лема.

Лема 1. *Скінченновимірні розподіли випадкового процесу* $\dfrac{\overline{S}_n(s)}{\sqrt{n}}$ *збігаються до скінченно-вимірних розподілів процесу*

$$\overline{W}(s) = \max_{t\in[0,1]} W(s,t).$$

Це твердження є безпосереднім наслідком леми 3 роботи [8].

Якщо випадкові процеси $\overline{S}_n(s)$ та $\overline{W}(s)$ належать простору B м. н., то природно поставити задачу дослідження умов, за яких має місце слабка збіжність у цьому просторі: при $n \to \infty$

$$\frac{\overline{S}_n(\cdot)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \overline{W}(\cdot). \tag{4}$$

У праці [8] ця задача вивчалася для просторів $B = L_p$. Тут ми розглянемо випадок простору $C[0,1]$, а також послабимо умови, отримані у [8] для L_p.

2. Простір $C[0,1]$. Цей простір складається з неперервних на відрізку $[0,1]$ функцій із рівномірною нормою. Введемо такі позначення:

$$T_h = \big\{(s,t) \in [0,1]^2 : |s-t| \le h\big\}, \qquad h > 0,$$

$$d_p(s,t) = \big(\mathbf{E}\big|X(s) - X(t)\big|^p\big)^{\frac{1}{p}}, \qquad s,t \in [0,1], \quad p \ge 2; \qquad d_p(h) = \sup_{T_h} d_p(s,t).$$

Теорема 1. *Якщо сепарабельні випадкові процеси* X *та* Γ *задовольняють умову* (2) *і для деякого* $p \ge 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{n}{p}} d_p(2^{-n}) < \infty, \tag{5}$$

то X, Γ *та* $\overline{W}$ *належать* $C[0,1]$ *м. н. і в* $C[0,1]$ *має місце слабка збіжність* (4).

***Зауваження* 1.** Для виконання умов теореми 1 достатньою є відома умова Колмогорова (див. [3, с. 235–237])

$$\mathbf{E}\big|X(s) - X(s+h)\big|^p \le K \cdot h^r, \qquad r > 1, \quad p \ge 2.$$

Дійсно, безпосередньо з означення та умови Колмогорова маємо

$$d_p(2^{-n}) = \sup_{T_{2^{-n}}} \big(\mathbf{E}|X(s) - X(t)|^p\big)^{\frac{1}{p}} \le K^{\frac{1}{p}} 2^{-\frac{rn}{p}}.$$

Очевидно, що ця оцінка при $r > 1$ забезпечує збіжність ряду (5).

Зазначимо, що при дослідженні неперервності випадкового процесу умова Колмогорова розглядається для випадків $p > 0$ або $p > 1$, але в теоремі 1 необхідно покласти $p \geq 2$.

Доведення теореми **1.** Те, що умова (5) забезпечує неперервність м. н. вибіркових функцій сепарабельного процесу X, є відомим фактом [11].

Зрозуміло також, що з умови (5) випливає оцінка

$$d_2(s, s+h) \leq d_p(s, s+h) \leq C \cdot h^{\frac{1}{p}}.$$

Звідси та з (2) маємо

$$\mathbf{E}\big|\Gamma(s) - \Gamma(s+h)\big|^2 = R(s,s) - 2R(s,s+h) + R(s+h,s+h) = d_2^2(s,s+h) \leq C \cdot h^{\frac{2}{p}}.$$

Ця нерівність і забезпечує неперервність вибіркових функцій сепарабельного нормального процесу Γ [12, c. 192].

Перевіримо тепер, що за умов теореми 1 випадковий процес $\overline{W}(s)$ теж належить $C[0,1]$ м. н. Для цього покладемо $W_n(s,t) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_k(s) F_k(t),\ n \in \mathbb{N}$. Тоді з елементарної числової нерівності

$$\left|\max_{1\leq k\leq n} a_k - \max_{1\leq k\leq n} b_k\right| \leq \max_{1\leq k\leq n} |a_k - b_k| \tag{6}$$

та нерівності трикутника маємо

$$\sup_{|s-s'|<h} \big|\overline{W}(s) - \overline{W}(s')\big| \leq \sup_{|s-s'|\leq h} \sup_{t\in[0,1]} \big|W(s,t) - W(s',t)\big| \leq 2D_1 + D_2, \tag{7}$$

де

$$D_1 = \sup_{s,t\in[0,1]} \big|W(s,t) - W_n(s,t)\big|,$$

$$D_2 = \sup_{|s-s'|\leq h,\, t\in[0,1]} \big|W_n(s,t) - W_n(s',t)\big|.$$

Як показано вище, Γ_n належить простору $C[0,1]$ м. н., а отже, ряд (3) збігається рівномірно по t за нормою $C[0,1]$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $n = n(\varepsilon, \omega)$, що

$$D_1 < \varepsilon. \tag{8}$$

Для вибраного n функція $W_n(s,t)$ рівномірно неперервна на $[0,1]^2$. Тому існує таке $h = h(n, \varepsilon, \omega)$, що

$$D_2 < \varepsilon. \tag{9}$$

Внаслідок довільності ε оцінки (7) – (9) означають, що $\overline{W}(s)$ належить $C[0,1]$ м. н.

Перейдемо безпосередньо до доведення слабкої збіжності (4). Згідно з результатами [3, c. 482 – 483], для того, щоб вона мала місце у просторі $C[0,1]$, необхідно і достатньо виконання таких умов:

1) скінченновимірні розподіли процесів $\dfrac{\overline{S}_n(s)}{\sqrt{n}}$ збігаються до скінченновимірних розподілів процесу $\overline{W}(s)$;

2) для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \sup_{T_h} \frac{1}{\sqrt{n}} \left|\overline{S}_n(s) - \overline{S}_n(t)\right| > \varepsilon \right\} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{10}$$

Перша умова безпосередньо випливає з леми 1. Тому зосередимося на доведенні виконання другої умови. Покладемо, для спрощення записів, $Y_n(s,t) = \dfrac{|S_n(s) - S_n(t)|}{\sqrt{n}}$ і покажемо спочатку, що

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{E} \sup_{T_h} Y_n(s,t) \to 0 \qquad \text{при} \quad h \to 0. \tag{11}$$

Скориставшись оцінками з [11] (теорема 1А), ми доведемо точніший результат:

$$\mathbf{E} \sup_{T_h} Y_n(s,t) \le C_p \sum_{2^{-m} < h} \left| 2^{\frac{m}{p}} d_p(2^{-m}) \right|. \tag{12}$$

Стала C_p тут і далі залежить лише від p і не обов'язково одна й та ж сама в різних місцях.

З умови (5) та нерівності (12) безпосередньо отримуємо рівність (11).

Покладемо $J = \left\{ k2^{-m} : m > 1,\ 0 \le k \le 2^m \right\}$ і

$$\alpha_{nm} = \sup_{1 \le k \le 2^m} Y_n\left(k2^{-m},\, [k-1]2^{-m}\right).$$

Як показано в [11], для довільних $s, s' \in J$, $|s - s'| < h$,

$$Y_n(s,s') \le 2 \sum_{2^{-m} < h} \alpha_{nm} \quad \text{м. н.} \tag{13}$$

Оскільки виконується нерівність

$$\alpha_{nm}^p \le \sum_{k=1}^{2^m} \left| Y_n(k2^{-m},\, [k-1]2^{-m}) \right|^p,$$

то, враховуючи оцінку (13), маємо

$$\mathbf{E} \sup_{|s-s'|<h,\, s,s' \in J} |Y_n(s,s')| \le 2 \sum_{2^{-m} < h} |\mathbf{E}\alpha_{nm}^p|^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le 2 \sum_{2^{-m} < h} \left(\sum_{k=1}^{2^m} \mathbf{E} \left| Y_n\left(k2^{-m},\, [k-1]2^{-m}\right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{14}$$

Для оцінки доданків суми (14) нам знадобиться така лема.

Лема 2 [13]. *Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — незалежні випадкові величини, $\mathbf{E}\xi_i = 0$, і $2 \le p < \infty$. Тоді*

$$\mathbf{E} \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^p \le C_p \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{E}|\xi_i|^p + \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{E}|\xi_i|^2 \right)^{p/2} \right).$$

Застосовуючи лему 2, одержуємо

$$\mathbf{E}\left|Y_n\left(k2^{-m},\,[k-1]2^{-m}\right)\right|^p=\mathbf{E}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}S_n(k2^{-m})-\frac{1}{\sqrt{n}}S_n([k-1]2^{-m})\right|^p\leq$$

$$\leq C_p\left(n^{1-\frac{p}{2}}\mathbf{E}|X(k2^{-m})-X\big([k-1]2^{-m}\big)|^p+\big(\mathbf{E}\big|X(k2^{-m})-X\big([k-1]2^{-m}\big)\big|^2\big)^{\frac{p}{2}}\right)\leq$$

$$\leq C_p\mathbf{E}\left|X(k2^{-m})-X([k-1]2^{-m})\right|^p. \qquad (15)$$

Неважко бачити, що

$$\sum_{k=1}^{2^m}\mathbf{E}\left|X(k2^{-m})-X([k-1]2^{-m})\right|^p\leq$$

$$\leq 2^m\sup_{T_{2^{-m}}}\mathbf{E}\big|X(s)-X(t)\big|^p=2^m\big|d_p(2^{-m})\big|^p. \qquad (16)$$

Збираючи разом оцінки (14) – (16), отримуємо

$$\mathbf{E}\sup_{|s-s'|<h,\,s,s'\in J}\big|Y_n(s,s')\big|\leq C_p\sum_{2^{-m}<h}2^{\frac{m}{p}}d_p(2^{-m}). \qquad (17)$$

Оскільки процес $S_n(t)$ є неперервним, то нерівність (12) — безпосередній наслідок нерівності (17).

Доведемо тепер імплікацію (11) $\Rightarrow$ (10). Для цього скористаємося нерівністю (6). Маємо

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{T_h}\left|\max_{1\leq k\leq n}S_k(s)-\max_{1\leq k\leq n}S_k(t)\right|>\varepsilon\right\}\leq$$

$$\leq\mathbf{P}\left\{\sup_{T_h}\max_{1\leq k\leq n}|S_k(s)-S_k(t)|>\varepsilon\right\}=$$

$$=\mathbf{P}\left\{\max_{1\leq k\leq n}\sup_{T_h}|S_k(s)-S_k(t)|>\varepsilon\right\}. \qquad (18)$$

Далі через $C(T_h)$ позначатимемо банахів простір неперервних функцій $x(s,t),\ (s,t)\in T_h$, з рівномірною нормою. Розглянемо випадкові функції $X_n^{'}(s,t)=X_n(s)-X_n(t)$ як елементи простору $C(T_h)$, $\mathbf{E}X_n^{'}(s,t)=0, S_n^{'}(s,t)=\sum_{k=1}^{n}X_k^{'}(s,t)$, і нехай $\eta_n=\|S_n^{'}\|_{C(T_h)}$. Тоді послідовність (η_n) утворює субмартингал. Справді, при $k<n$

$$\mathbf{E}_k\eta_n=\mathbf{E}_k\|S_n^{'}\|_{C(T_h)}\geq\|\mathbf{E}_kS_n^{'}\|_{C(T_h)}=\|S_k^{'}\|_{C(T_h)}=\eta_k.$$

Тут через $\mathbf{E}_k\eta$ позначено умовне математичне сподівання випадкової величини η при фіксованих випадкових функціях $X_i^{'}(t,s),\ i=\overline{1,k}$.

Для субмартингала η_k виконується нерівність [3, с. 78]

$$\mathbf{P}\left\{\max_{1\leq k\leq n}\eta_k^+\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{E}\eta_n^+.$$

Окрім того, зрозуміло, що

$$\eta_k = \sup_{T_h} \bigl|S_k(s) - S_k(t)\bigr|.$$

Тому

$$\mathbf{P}\left\{\max_{1\le k\le n} \sup_{T_h} |S_k(s) - S_k(t)| > \varepsilon\right\} \le \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{E}\bigl\{\sup_{T_h} |S_n(s) - S_n(t)|\bigr\}.$$

Звідси та зі співвідношень (11), (18) одержуємо (10).

3. Простір L_p. Розглянемо простір $([0,1],\Lambda,\mu)$, де Λ — σ-алгебра борелівських множин відрізка $[0,1]$, а μ — міра Лебега. Через $L_p = L_p[0,1]$, $1 \le p < \infty$, позначаємо банахів простір (класів) вимірних функцій $x(t)$ на просторі $([0,1],\Lambda,\mu)$ з нормою $\|x\|_p = \left(\int_0^1 |x(t)|^p \mu(dt)\right)^{1/p}$.

Щоб отримати співвідношення (4), у просторі L_p на випадковий процес $X(s)$ у статті [8], використовуючи позначення $p^* = 2$ при $p < 2$, $p^* = p$ при $p \ge 2$, накладалися такі умови:

$$\sup_{0\le s\le 1} \mathbf{E}|X(s)|^{p^*} < \infty$$

і

$$\exists\, \varepsilon > 0: \ \mathbf{E}|X(s)|^{p+\varepsilon} < \infty \quad \forall s \in [0,1].$$

У наступній теоремі стверджується, що їх можна замінити слабкішою умовою. Покладемо

$$\mathfrak{S}_p = \bigl(\sigma_p(s), s \in [0,1]\bigr), \qquad \sigma_p(s) = |\mathbf{E}|X(s)|^p|^{1/p}.$$

Теорема 2. *Якщо вимірні випадкові процеси X та Γ задовольняють умову* (2) *і виконується нерівність*

$$\|\mathfrak{S}_{p^*}\|_{p^*} = \left(\int_0^1 \sigma_{p^*}^{p^*}(s)ds\right)^{1/p^*} < \infty, \tag{19}$$

то X, Γ та $\overline{W}$ належать L_p м. н. і в L_p має місце слабка збіжність (4).

Доведення. Нехай спочатку $p \ge 2$, тоді $p^* = p$. За теоремою Фубіні із (19) випливає, що $\int_0^1 |X(s)|^p ds < \infty$ м. н. Це означає, що X належить L_p м. н.; більше того, можна вважати, що він буде випадковим елементом в L_p [3, с. 390 – 392]. З нерівності [8]

$$\bigl(\mathbf{E}|\Gamma(s)|^p\bigr)^{\frac{1}{p}} \le C_p\bigl(\mathbf{E}|X(s)|^p\bigr)^{\frac{1}{p}}$$

випливає, що й випадковий процес Γ належить L_p м. н. В умовах теореми випадкові процеси Γ_n вимірні, тому $\overline{W}(s)$ буде вимірним. Окрім того, для фіксованого s

$$W(s,t) \overset{D}{=} \sigma_2(s)\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n F_n(t),$$

де (γ_n) — послідовність нормальних незалежних випадкових величин, $\mathbf{E}\gamma_n = 0$, $\mathbf{D}\gamma_n = 1$, а позначення $\xi \overset{D}{=} \eta$ означає, що розподіли випадкових величин ξ та η збігаються між собою.

Тоді

$$\overline{W}(s) \stackrel{D}{=} \sigma_2(s)|\gamma_1|,$$

а отже,

$$\mathbf{E}|\overline{W}(s)|^p = C_p\sigma_2^p(s) \le C_p\sigma_p^p(s).$$

З останньої оцінки та (19) робимо висновок, що випадковий процес $\overline{W}(s)$ належить L_p м. н.

Далі ми скористаємося одним відомим результатом [14] (теорема 7 та зауваження після неї).

Нехай $Z_n = \{Z_n(s),\ s \in [0,1]\},\ n \ge 1,\ Z = \{Z(s),\ s \in [0,1]\},$ — вимірні випадкові процеси. Тоді для слабкої збіжності $Z_n \xrightarrow{D} Z$ при $n \to \infty$ в L_p достатніми є умови:

(i) скінченновимірні розподіли випадкових процесів Z_n збігаються до скінченновимірних розподілів Z;

(ii) для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \int_0^1 |Z_n(s)|^p I\big(|Z_n(s)| > L\big) ds > \varepsilon \right\} \to 0 \quad \text{при} \quad L \to \infty.$$

Тут і далі через $I(A)$ позначено індикатор випадкової події A.

Оскільки за лемою 1 умова (i) виконується, то залишається перевірити умову (ii). Нехай

$$Y_n(s) = \frac{\overline{S}_n(s)}{\sqrt{n}}. \tag{20}$$

За нерівністю Маркова для виконання умови (ii) достатньо довести, що

$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^1 \mathbf{E}|Y_n(s)|^p I\big(|Y_n(s)| > L\big) ds \to 0 \quad \text{при} \quad L \to \infty. \tag{21}$$

Оскільки послідовність $\big(|S_n(s)|\big)$ утворює додатний субмартингал по n, то (див. [3, с. 78]) для $p > 1$

$$\mathbf{E}\left|\frac{\overline{S}_n(s)}{\sqrt{n}}\right|^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbf{E}\left(\frac{|S_n(s)|}{\sqrt{n}}\right)^p. \tag{22}$$

Далі ще раз застосовуючи лему 2, отримуємо

$$\mathbf{E}\left|\frac{S_n(s)}{\sqrt{n}}\right|^p \le C_p\left[n^{1-\frac{p}{2}}\mathbf{E}|X(s)|^p + \big(\mathbf{E}|X(s)|^2\big)^{\frac{p}{2}}\right] \le C_p|\sigma_p(s)|^p. \tag{23}$$

Таким чином, співвідношення (19), (20) та (22), (23) показують, що функція

$$m_p(s) = \sup_{n\ge1}\big(\mathbf{E}|Y_n(s)|^p\big)^{\frac{1}{p}} \in L_p.$$

Очевидно, що підінтегральна функція в (21) для будь-якого $s \in [0,1]$ не перевищує $|m_p(s)|^p$. Якщо ми покажемо, що для кожного $s \in [0,1]$

$$\sup_{n\ge1}\mathbf{E}|Y_n(s)|^p I\big(|Y_n(s)| > L\big) \to 0 \quad \text{при} \quad L \to \infty, \tag{24}$$

то за теоремою Лебега про збіжність інтегралів отримаємо рівність (21).

Сформулюємо твердження, з якого випливатиме (24).

Лема 3. *Нехай* (ξ_i) — *незалежні однаково розподілені випадкові величини і для деякого* $p \geq 2$

$$\mathbf{E}\xi_n^2 = \sigma^2, \qquad \mathbf{E}\xi_i = 0, \qquad \mathbf{E}|\xi_i|^p < \infty, \tag{25}$$

$\mathfrak{s}_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, $\bar{\mathfrak{s}}_n = \max_{1\leq k\leq n} \mathfrak{s}_k$. *Тоді*

$$\sup_{n\geq 1} \mathbf{E}\left|\frac{\bar{\mathfrak{s}}_n}{\sqrt{n}}\right|^p I\left(\left|\frac{\bar{\mathfrak{s}}_n}{\sqrt{n}}\right| > L\right) \to 0 \quad \textit{при} \quad L \to \infty.$$

Перед доведенням леми 3 наведемо ще дві допоміжні леми.

Лема 4 ([15, с. 68], теорема 12)**.** *В умовах леми* 3 *для будь-якого* $x > 0$

$$\mathbf{P}\left\{\max_{1\leq k\leq n} \frac{1}{\sqrt{n}}|\mathfrak{s}_k| > x\right\} \leq 2\mathbf{P}\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}|\mathfrak{s}_n| > x - \sqrt{2\sigma^2}\right\}.$$

Лема 5. *Нехай м. н. невід'ємні випадкові величини* ξ *та* ζ *задовольняють такі умови*:

1) $\mathbf{E}\xi^p < \infty$ *і* $\mathbf{E}\zeta^p < \infty$ *для деякого* $p \geq 1$;

2) *існують такі додатні сталі* b, C, *що* $\mathbf{P}(\zeta > x) \leq C\mathbf{P}(\xi > x - b)$ $\forall x > 0$.

Тоді знайдуться такі сталі C_1, C_2, *що для кожного* $L > b$

$$\mathbf{E}\zeta^p I(\zeta > L) \leq C_1 \mathbf{E}\xi^p I(\xi > L - b) + C_2 \mathbf{P}(\xi > L - b), \tag{26}$$

де сталі C_1 *та* C_2 *залежать лише від* p, b *та* C.

***Доведення леми* 5.** Маємо

$$\mathbf{E}\zeta^p I(\zeta > L) = \int_L^\infty x^p d\mathbf{P}(\zeta < x) = -\int_L^\infty x^p d\mathbf{P}(\zeta > x) =$$

$$= L^p \mathbf{P}(\zeta > L) + \int_L^\infty \mathbf{P}(\zeta > x) dx^p \leq C(L^p \mathbf{P}(\xi > L - b) + \int_L^\infty \mathbf{P}(\xi > x - b) dx^p). \tag{27}$$

З числової нерівності

$$L^p \leq 2^{p-1}\left[(L-b)^p + b^p\right]$$

отримуємо оцінку першого доданка в (27):

$$L^p \mathbf{P}(\xi > L - b) \leq C_1 |L - b|^p \mathbf{P}(\xi > L - b) + C_2 \mathbf{P}(\xi > L - b) \leq$$

$$\leq C_1 \int_{L-b}^\infty x^p d\mathbf{P}(\xi < x) + C_2 \mathbf{P}(\xi > L - b). \tag{28}$$

Другий доданок у (27) оцінюється величиною

$$x^p \mathbf{P}(\xi > x - b)|_L^\infty + \int_L^\infty x^p d\mathbf{P}(\xi < x - b) \leq$$

$$\leq \int_{L-b}^{\infty} (y+b)^p d\mathbf{P}(\xi < y) \leq C_1 \int_{L-b}^{\infty} y^p d\mathbf{P}(\xi < y) + C_2 \mathbf{P}(\xi > L - b). \tag{29}$$

Оскільки $\mathbf{E}\xi^p I(\xi > L-b) = \int_{L-b}^{\infty} x^p d\mathbf{P}(\xi < x)$, то з (27)–(29) і отримуємо оцінку (26).

***Доведення леми* 3.** Вибираючи $\xi = \dfrac{\mathfrak{s}_n}{\sqrt{n}}$, $\zeta = \dfrac{\bar{\mathfrak{s}}_n}{\sqrt{n}}$, з лем 4, 5 одержуємо

$$\mathbf{E}\left|\frac{\bar{\mathfrak{s}}_n}{\sqrt{n}}\right|^p I\left(\frac{|\bar{\mathfrak{s}}_n|}{\sqrt{n}} > L\right) \leq C_1 \mathbf{E}\left|\frac{\mathfrak{s}_n}{\sqrt{n}}\right|^p I\left(\frac{|\mathfrak{s}_n|}{\sqrt{n}} > L - \sqrt{2\sigma^2}\right) + C_2 \mathbf{P}\left(\frac{|\mathfrak{s}_n|}{\sqrt{n}} > L - \sqrt{2\sigma^2}\right). \tag{30}$$

Відомо [15, с. 130], що за умови (25) при $n \to \infty$

$$\frac{|\mathfrak{s}_n|}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} |\,\gamma_1|\sigma \tag{31}$$

і

$$\mathbf{E}\left|\frac{\mathfrak{s}_n}{\sqrt{n}}\right|^p \to \mathbf{E}|\gamma_1|^p \sigma^p.$$

З останнього співвідношення маємо (див. [4, с. 51], теорема 5.4)

$$\sup_n \mathbf{E}\left|\frac{\mathfrak{s}_n}{\sqrt{n}}\right|^p I\left(\left|\frac{\mathfrak{s}_n}{\sqrt{n}}\right| > L\right) \to 0 \quad \text{при} \quad L \to \infty.$$

Звідси та з (30), (31) випливає лема 3.

Таким чином, теорему 2 встановлено для $p \geq 2$.

Випадок $p < 2$ фактично зводиться до розглянутого вище випадку $p = 2$. Дійсно, тоді $p^* = 2$ і виконується умова

$$\int_0^1 \sigma_2^2(s) ds < \infty.$$

Отже, випадкові процеси X, Γ та $\overline{W}$ належать L_2 м. н. і тим більше належать L_p м. н.

Як показано вище, для $p = 2$ виконується умова (20). Тоді вона виконуватиметься і для $p < 2$.

Теорему 2 доведено.

З теореми 2 випливає такий наслідок.

***Наслідок* 1.** *Нехай $p \geq 2$, банахів функціональний простір $B \supset L_p$ і*

$$\|x\|_B \leq \|x\|_{L_p} \quad \forall\, x \in B.$$

Якщо вимірні випадкові процеси X та Γ задовольняють умову (2) *і виконується нерівність*

$$\|\mathfrak{S}_p\|_p < \infty,$$

то X, Γ та $\overline{W}$ належать B м. н. і в B має місце слабка збіжність (4).

Введемо інтегральні функціонали вигляду

$$f(x(\cdot)) = \int_0^1 \varphi(s, x(s))ds,$$

де $\varphi(s, y)$ — така неперервна функція двох змінних, що $\sup_{s\in[0,1]} \varphi(s, y) = O\big(|y|^p\big)$.

Для таких функціоналів із теореми 2 та [14] одержуємо такий наслідок.

***Наслідок* 2.** *Якщо вимірні випадкові процеси X та Γ задовольняють умови* (2) *та* (21), *то має місце слабка збіжність*

$$f\left(\frac{S_n(\cdot)}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{D} f(\overline{W}(\cdot)) \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

***Зауваження* 2.** Розглянемо в умовах теореми 1 випадкові процеси

$$S_n^*(s) = \max_{0\le k\le n} \big|S_k(s)\big| \quad \text{та} \quad W^*(s) = \sup_{0\le t\le 1} \big|W(t, s)\big|.$$

З результатів роботи [8] випливає, що скінченновимірні розподіли процесу $\dfrac{S_n^*(s)}{\sqrt{n}}$ збігаються до скінченновимірних розподілів випадкового процесу $W^*(s)$.

Аналіз доведення теореми 1 показує, що воно без значних змін дозволяє встановити також і слабку збіжність в $C[0, 1]$:

$$\frac{S_n^*(\cdot)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} W^*(\cdot). \tag{32}$$

Те саме стосується і простору L_p, точніше, якщо виконуються умови теореми 2, то співвідношення (32) має місце в L_p.

4. Приклади застосувань. Зрозуміло, що для застосування теорем 1, 2 на практиці потрібно знати розподіл відповідних граничних випадкових величин. На жаль, задача знаходження таких розподілів здається досить складною.

У випадку простору L_p позначимо

$$\zeta_p = \int_0^1 \left|\sup_{0\le t\le 1} W(t, s)\right|^p ds,$$

$$\mathfrak{S} = \big\{\sigma(s),\ s \in [0, 1]\big\}, \qquad \sigma(s) = \sigma_2(s), \quad s \in [0, 1].$$

Наступне допоміжне твердження дає прості оцінки перших двох моментів величини ζ_p.

Лема 6. *В умовах теореми* 2

$$\mathbf{E}\zeta_p = \|\mathfrak{S}\|_p^p \cdot \Theta_p,$$

$$\mathbf{D}\zeta_p \le \|\mathfrak{S}\|_{2p}^{2p} \cdot \Theta_{2p} - \|\mathfrak{S}\|_p^{2p} \cdot \Theta_p^2,$$

$$\textit{де} \quad \Theta_p = \sqrt{\frac{2^p}{\pi}}\mathbf{\Gamma}\left(\frac{p+1}{2}\right), \tag{33}$$

причому $\Theta_{2k} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)$, $\mathbf{\Gamma}(s)$ — *гамма-функція.*

Доведення. Як зазначено вище,

$$\overline{W}(s) \stackrel{d}{=} \sigma(s)|\gamma|, \tag{34}$$

де γ — стандартна нормальна випадкова величина, $\mathbf{E}\gamma = 0,\ \mathbf{E}\gamma^2 = 1.$

Відомо [12, с. 32], що при $p \geq 1$

$$\mathbf{E}|\gamma|^p = \Theta_p, \tag{35}$$

де Θ_p задається рівністю (33).

Тоді з (34), (35) одержуємо

$$\mathbf{E}\zeta_p = \int\limits_0^1 \mathbf{E}|\overline{W}(s)|^p ds = \Theta_p \int\limits_0^1 |\sigma(s)|^p ds = \Theta_p \|\mathfrak{S}\|_p^p. \tag{36}$$

Далі

$$\mathbf{E}\zeta_p^2 \leq \int\limits_0^1 \mathbf{E}|\overline{W}(s)|^{2p} ds = \|\mathfrak{S}\|_{2p}^{2p} \cdot \Theta_{2p}.$$

Звідси та з (36) безпосередньо випливає оцінка для дисперсії $\mathbf{D}\xi_p$.

Нехай (u_i) — незалежні однаково розподілені випадкові величини з функцією розподілу $F(x) = x,\ \ x \in [0,1]$, тобто u_i рівномірно розподілені на [0,1]. Позначимо через

$$F_n^*(s) = \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{n} I\big(u_i \in [0,s]\big), \qquad s \in \mathbb{R},$$

емпіричну функцію розподілу випадкових величин $u_i,\ i = \overline{1,n}.$

За аналогією з класичними статистиками ω_n^2 та Ω_n^2 розглянемо деякі їхні модифікації:

$$n^{p/2}\omega_n^p = \int\limits_0^1 \left| \frac{\sup_{1\leq k\leq n} k\big(F_k^*(s) - s\big)}{\sqrt{n}} \right|^p ds,$$

$$n^{p/2}\Omega_n^p = \int\limits_0^1 \left| \frac{\sup_{1\leq k\leq n} k(F_k^*(s) - s)}{\sqrt{n}} \right|^p \big(s(1-s)\big)^{-1} ds.$$

Позначимо через $W_0(s),\ s \in [0,1]$, нормальний випадковий процес, для якого

$$\mathbf{E}W_0(s) = 0, \qquad \mathbf{E}W_0(s_1)W_0(s_2) = \min(s_1, s_2) - s_1 s_2.$$

Такий процес називається *броунівським мостом*. Нехай у зображенні (3) для процесу $W(t,s)$ $\Gamma_n \stackrel{d}{=} W_0$, а $\overline{W}(s) = \sup_{0\leq t\leq 1} W(t,s)$. Тоді з теореми 2 випливає такий наслідок.

***Наслідок* 3.** *При* $n \to \infty$

$$n^{p/2}\omega_n^p \xrightarrow{D} \zeta_p[1] = \int\limits_0^1 |\overline{W}(s)|^p ds, \tag{37}$$

$$n^{p/2}\Omega_n^p \xrightarrow{D} \zeta_p\left[\frac{1}{s(1-s)}\right] = \int_0^1 \frac{|\overline{W}(s)|^p}{s(1-s)}ds. \tag{38}$$

Доведення. Покладемо

$$X_i(s) = I\big(u_i \in (0,s)\big) - s.$$

Тоді

$$\mathbf{E}X_i(s) = 0, \qquad \mathbf{E}X_i(s_1)X_i(s_2) = R(s_1,s_2) = \min(s_1,s_2) - s_1s_2,$$

тобто кореляційні функції процесів $X_i(s)$ та $W_0(s)$ збігаються між собою. Щоб застосувати теорему 2, залишилося перевірити умову (21). Маємо

$$|\sigma_p(s)|^p = \mathbf{E}|X_i(s)|^p = (1-s)s\big[(1-s)^{p-1} + s^{p-1}\big] \le 1. \tag{39}$$

Остання оцінка означає, що виконується (21), а отже, (37) встановлено.

Співвідношення (38) доводиться аналогічно. Слід вибрати

$$X_i(s) = \frac{I(u_i \in (0,s)) - s}{|s(1-s)|^{1/p}}, \quad \text{а} \quad \Gamma_n(s) \overset{d}{=} \frac{W_0(s)}{|s(1-s)|^{1/p}}.$$

Прості обчислення показують, що тоді

$$|\sigma_p(s)|^p = |1-s|^{p-1} + s^{p-1}, \qquad \int_0^1 |\sigma_p(s)|^p = \frac{2}{p}. \tag{40}$$

Таким чином, умови (2), (21) виконуються, що й дає (38).

Далі, використавши лему 6, знайдемо оцінки перших моментів для граничних величин (37), (38) при $p=2$.

Для випадку $\zeta_2[1]$ маємо

$$\mathfrak{S}^2(s) = (\sigma_2(s))^2 = s - s^2,$$

$$\mathbf{E}\zeta_2[1] = \int_0^1 \sigma^2(s)ds = \int_0^1 (s-s^2)ds = \frac{1}{6},$$

$$\mathbf{D}\zeta_2[1] \le \Theta_4\|\mathfrak{S}\|_4^4 - \|\mathfrak{S}\|_2^4\Theta_2^2 = 3\int_0^1 |\sigma(s)|^4 ds - \left[\int_0^1 |\sigma(s)|ds\right]^2 = \frac{13}{180}.$$

Для $\zeta_2\left[\dfrac{1}{s(1-s)}\right]$, застосовуючи рівності (40), отримуємо

$$\mathbf{E}\zeta_2\left[\frac{1}{s(1-s)}\right] = 1,$$

$$\mathbf{D}\zeta_2\left[\frac{1}{s(1-s)}\right] \le 2.$$

Література

1. *Erdös E., Kac M.* On certain limit theorems in the theory of probability // Bull. Amer. Math. Soc. – 1946. – **52**. – P. 292 – 302.
2. *Bachelier P.* Theorie de la speculation // Ann. Ecol. norm. – 1900. – **17**. – P. 21 – 86.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. – М.: Наука, 1971. – Т. 1 – 664 с.
4. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.
5. *Скороход А. В., Слободенюк Н. П.* Предельные теоремы для случайных блужданий. – Киев: Наук. думка, 1970. – 304 с.
6. *Паулаускас В.* О распределении максимума последовательных сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов // Liet. mat. rink. – 1973. – **13**, № 2. – С. 133 – 138.
7. *Ламперти Дж.* Вероятность. – М.: Наука, 1973. – 184 с.
8. *Мацак І. К.* Деякі граничні теореми для максимуму сум незалежних випадкових процесів // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 12. – С. 1664 – 1674.
9. *Levy P.* Processus stochastiques et mouvement brownien. – Paris: Gauthier-Villars, 1937.
10. *Ciesielsky Z.* Holder condition for realizations of Gaussian processes // Trans. Amer. Math. Soc. – 1961. – **99**. – P. 403 – 413.
11. *Мацак И. К.* Регулярность выборочных функций случайного процесса // Укр. мат. журн. – 1978. – **30**, № 2. – P. 242 – 247.
12. *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы. – М.: Мир, 1969. – 399 с.
13. *Rosenthal H. P.* On the subspaces of L^p $(p > 2)$ spanned by sequences of independent random variables // Isr. J. Math. – 1970. – **8**, № 3. – P. 273 – 303.
14. *Боровков А. А., Печерский Е. А.* Сходимость распределений интегральных функционалов // Сиб. мат. журн. – 1975. – **16**, № 5. – С. 899 – 915.
15. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. – М.: Наука, 1972. – 416 с.

Одержано 29.09.16