УДК 517.951.2

**Ю. П. Апаков, А. Х. Жураев** (Наманган. инж.-строит. ин-т, Узбекистан)

# ТРЕТЬЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

We prove the unique solvability of the third boundary-value problem for a third-order differential equation with multiple characteristics containing the second time derivative in a rectangular domain.

Для рівняння третього порядку з кратними характеристиками, що містить другу похідну за часом, доведено однозначну розв'язність третьої крайової задачі у прямокутній області.

**1. Введение и постановка задачи.** Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы, фильтрации жидкости в пористых средах. В совокупности всех уравнений третьего порядка особое место занимают так называемые уравнения с кратными характеристиками. В работе [1], на основании свойств вязкости и теплопроводности газа, из системы Навье – Стокса было получено уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащими вторые производные по времени

$$u_{xxx} + u_{yy} - \frac{\nu}{y} u_y = u_x u_{xx}, \quad \nu = \text{const}. \tag{1}$$

Уравнение (1) при $\nu = 1$ описывает осесимметричный поток, а $\nu = 0$ — плоско-параллельный поток [2].

Первые результаты по уравнению третьего порядка с кратными характеристиками были получены в работах H. Block [3]. L. Catabriga в работе [4] для уравнения $D_x^{2n+1}u - D_y^2 u = 0$ построил фундаментальные решения в виде двойного несобственного интеграла и изучил свойства потенциала. В работах [5, 6] построены фундаментальные решения, выраженные через вырожденные гипергеометрические функции, изучены их свойства и найдены оценки при $|t| \to \infty$. Также отметим работы [7 – 18], в которых рассмотрены краевые задачи для уравнения третьего порядка.

В настоящей статье изучается третья краевая задача для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в прямоугольной области. Рассмотрим уравнение

$$U_{xxx} - U_{yy} + AU_{xx} + BU_x + CU_y + DU = 0,$$

где $A, B, C, D \in R$. Заметим, что заменой

$$U(x,y) = u(x,y)e^{-\frac{A}{3}x + \frac{C}{2}y}$$

это уравнение преобразуется к виду

$$u_{xxx} - u_{yy} + au_x + cu = 0, \tag{2}$$

где

$$a = -\frac{A^2}{3} + B, \qquad c = \frac{2A^3}{27} + \frac{C^2}{4} - \frac{AB}{3} + D.$$

В дальнейшем будем считать, что $c > 0,\ a > 0$.

В области $D = \{(x, y) : 0 < x, y < 1\}$ рассмотрим следующую задачу.

**Задача $B_1$.** Найти в области $D$ решение уравнения (2) из класса $C^{3,2}_{x,y}(D) \cap C^{2,1}_{x,y}(\overline{D})$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{aligned} &\alpha u(x,0) + \beta u_y(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \\ &\gamma u(x,1) + \delta u_y(x,1) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \end{aligned} \tag{3}$$

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \qquad u(1,y) = \varphi_2(y), \qquad u_x(1,y) = \varphi_3(y), \qquad 0 \le y \le 1, \tag{4}$$

где $\varphi_i(y) \in C^3[0,1],\ i = \overline{1,3}$, — заданные функции, причем

$$\alpha\,\varphi_i(0) + \beta\,\varphi_i'(0) = 0, \qquad \gamma\,\varphi_i(1) + \delta\,\varphi_i'(1) = 0.$$

Здесь $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ — постоянные числа, причем $\alpha^2 + \beta^2 \ne 0,\ \gamma^2 + \delta^2 \ne 0$.

Отметим, что аналогичные задачи исследованы в работе [19] для случая $a = c = 0$.

**2. Основные результаты.**

**Теорема единственности.** *Если $\alpha\beta \le 0,\ \delta\gamma \ge 0$, то задача $B_1$ имеет единственное решение.*

**Теорема существования.** *Если функции $\varphi_i(y) = C^3[0,1]$ и $\alpha\varphi_i(0) + \beta\varphi_i'(0) = 0,\ \gamma\varphi_i(1) + \delta\varphi_i'(1) = 0,\ \varphi_i''(0) = \varphi_i''(1) = 0,\ i = \overline{1,3}$, то решение задачи существует.*

При доказательстве теоремы существования используется следующая лемма.

**Лемма.** *Краевая задача*

$$\begin{aligned} &X''' + aX' + \nu X = 0, \\ &X(0) = X(1) = X'(1) = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

*имеет только тривиальное решение.*

**3. Доказательство полученных результатов.** ***Доказательство теоремы единственности.*** Предположим обратное, т. е. пусть $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ являются решениями задачи $B_1$. Тогда $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ является решением однородной задачи $B_1$ из области $D$.

Рассмотрим тождество

$$u(u_{xxx} - u_{yy} + au_x + cu) = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}(uu_{xx}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_x^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}(uu_y) + u_y^2 + \frac{a}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2\right) + cu^2 = 0.$$

Интегрируя это тождество по области $D$, имеем

$$\iint\limits_D \frac{\partial}{\partial x}(uu_{xx})dxdy - \frac{1}{2}\iint\limits_D \frac{\partial}{\partial x}(u_x^2)dxdy - \iint\limits_D \frac{\partial}{\partial y}(uu_y)dxdy +$$

$$+ \iint\limits_D u_y^2 dxdy + \frac{a}{2}\iint\limits_D \frac{\partial}{\partial x}(u^2)dxdy + c\iint\limits_D u^2 dxdy = 0.$$

Учитывая граничные условия и требуя, чтобы $\alpha \neq 0,\ \gamma \neq 0$ из условия (3), имеем

$$\frac{\delta}{\gamma}\int\limits_0^1 u_y^2\,(x,1)dx - \frac{\beta}{\alpha}\int\limits_0^1 u_y^2(x,0)\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 u_x^2\,(0,y)\,dy + \iint\limits_D u_y^2(x,y)\,dx\,dy + c\iint\limits_D u^2\,dx\,dy = 0.$$

Принимая во внимание условие теоремы единственности и $c > 0$, получаем $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

В случаях $\beta \neq 0,\ \delta \neq 0;\ \alpha \neq 0,\ \delta \neq 0$ и $\gamma \neq 0,\ \beta \neq 0$ аналогично получаем равенство $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Теорема единственности доказана.

***Доказательство леммы.*** Предположим обратное, т. е. пусть $X(x) \neq 0$. Рассмотрим тождество

$$X(X''' + aX' + \nu X) = 0,$$

или

$$\left(XX'' - \frac{1}{2}(X')^2 + \frac{a}{2}X^2\right)' + \nu X^2 = 0.$$

Интегрируя это тождество по области $0 < x < 1$ и учитывая краевые условия, получаем

$$\frac{1}{2}\left(X'(0)\right)^2 + \nu\int\limits_0^1 X^2\,dx = 0,$$

а так как $\nu > 0$, то $X(x) \equiv 0$.

Лемма доказана.

***Доказательство теоремы существования.*** Решение задачи будем искать методом разделения переменных

$$u(x,y) = X(x)Y(y). \tag{6}$$

Тогда из уравнения (2) следует, что

$$X'''Y - X\,Y'' + aX'Y + cX\,Y = 0,$$

$$\frac{X''' + aX'}{X} - \frac{Y''}{Y} = -c, \quad -c = -v + \mu.$$

Отсюда имеем

$$X''' + aX' + \nu = 0, \tag{7}$$

$$Y'' + \mu Y = 0. \tag{8}$$

Для нахождения функции $Y(y)$ рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &Y'' + \mu Y = 0,\\ &\alpha Y(0) + \beta Y'(0) = 0,\\ &\gamma Y(1) + \delta Y'(1) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Действуя так, как в работе [19], для нахождение собственных значений получаем трансцендентное уравнение

$$\operatorname{ctg}\sqrt{\mu} = \frac{\alpha\gamma + \delta\beta\mu}{\sqrt{\mu}\,(\gamma\beta - \alpha\delta)},$$

откуда следует, что $\sqrt{\mu_n} = \pi n + \varepsilon_n$, где $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$, или $\mu_n = O(n^2)$ при $n \to \infty$. Соответствующие собственные функции имеют вид

$$Y_n(y) = \alpha\sin\sqrt{\mu_n}y - \beta\sqrt{\mu_n}\cos\sqrt{\mu_n}y. \tag{10}$$

Ортогональность системы функций (10) доказывается так же, как и в работе [19].

Найдем норму собственных функций $Y_n(y)$ в $L_2[0,1]$. Имеем

$$\big\|Y_n(y)\big\|^2 = \int\limits_0^1 Y_n^2(y)\,dy = \frac{1}{2}\left(\alpha^2 + \beta^2\mu_n - \alpha\beta\right) +$$

$$+\left(\frac{\beta^2\sqrt{\mu_n}}{4} - \frac{\alpha^2}{4\sqrt{\mu_n}}\right)\sin 2\sqrt{\mu_n} + \frac{\alpha\beta}{2}\cos 2\sqrt{\mu_n} = \frac{1}{2}\beta^2\mu_n\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_n}}\right)\right). \tag{11}$$

Характеристическое уравнение (7) принимает вид

$$m^3 + am + \nu = 0. \tag{12}$$

Корни уравнения (12) имеют вид

$$m_1 = -2\alpha, \qquad m_{2,3} = \alpha \pm i\beta, \qquad \alpha = -\frac{1}{2}(u+\upsilon), \qquad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}(u-\upsilon),$$

где

$$u = \sqrt[3]{-\frac{\nu}{2} + \sqrt{\frac{\nu^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}, \qquad \upsilon = \sqrt[3]{-\frac{\nu}{2} - \sqrt{\frac{\nu^2}{4} + \frac{a^3}{27}}},$$

а так как $a > 0,\ \nu > 0$, то $\dfrac{\nu^2}{4} + \dfrac{a^3}{27} > 0$.

Общее решение уравнения (7) запишется в виде

$$X_n(x) = C_{1n}e^{-2\alpha_n x} + e^{\alpha_n x}\big(C_{2n}\cos\beta_n x + C_{3n}\sin\beta_n x\big), \tag{13}$$

где $C_{in}$ — произвольные постоянные. Согласно формуле (6) функции

$$u_n(x,y) = \big(C_{1n}e^{-2\alpha_n x} + e^{\alpha_n x}\big(C_{2n}\cos\beta_n x + C_{3n}\sin\beta_n x\big)\big)\,Y_n(y)$$

являются частными решениями уравнения (2), удовлетворяющими условиям (3).

В силу линейности и однородности уравнения (2) сумма частных решений является также решением уравнения (2). То же справедливо и для ряда

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\big(C_{1n}e^{-2\alpha_n x} + C_{2n}e^{\alpha_n x}\cos\beta_n x + C_{3n}e^{\alpha_n x}\sin\beta_n x\big)\,Y_n(y). \tag{14}$$

Требуя от функции $u(x,y)$ выполнения краевых условий (4), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} &A_{1n} = C_{1n} + C_{2n},\\ &A_{2n} = e^{-2\alpha_n}C_{1n} + e^{\alpha_n}\cos\beta_n C_{2n} + e^{\alpha_n}\sin\beta_n C_{3n},\\ &A_{3n} = -2\alpha_n e^{-2\alpha_n}C_{1n} + e^{\alpha_n}(\alpha_n\cos\beta_n - \beta_n\sin\beta_n)\,C_{2n} + e^{\alpha_n}(\alpha_n\sin\beta_n + \beta_n\cos\beta_n)\,C_{3n}, \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$A_{in} = \frac{1}{\|Y_n\|^2}\int\limits_0^1 \varphi_i\,(\eta)Y_n\,(\eta)\,d\eta, \quad i=1,2,3. \tag{16}$$

Определитель этой системы

$$\Delta = e^{2\alpha_n}\big(\beta_n - e^{-3\alpha_n}\,(3\alpha_n\sin\beta_n + \beta_n\cos\beta_n)\big)\,.$$

Предположим, что $\Delta = 0$, тогда существуют постоянные $C_1^*,\ C_2^*,\ C_3^*$, одновременно не все равные нулю, удовлетворяющие системе

$$\begin{aligned} &C_1^* + C_2^* = 0,\\ &e^{-2\alpha_n}C_1^* + e^{\alpha_n}\cos\beta_n C_2^* + e^{\alpha_n}\sin\beta_n C_3^* = 0,\\ &-2\alpha_n e^{-2\alpha_n}C_1^* + e^{\alpha_n}(\alpha_n\cos\beta_n - \beta_n\sin\beta_n)\,C_2^* + e^{\alpha_n}(\alpha_n\sin\beta_n + \beta_n\cos\beta_n)\,C_3^* = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция

$$V_n(x) = C_1^* e^{-2\alpha_n x} + e^{\alpha_n x}\big(C_2^*\cos\beta_n x + C_3^*\sin\beta_n x\big)$$

является решением краевой задачи (5), но по доказанной лемме должно быть

$$C_1^* e^{-2\alpha_n x} + C_2^* e^{\alpha_n x}\cos\beta_n x + C_3^* e^{\alpha_n x}\sin\beta_n x \equiv 0,$$

но это невозможно в силу линейной независимости функций $e^{-2\alpha_n x},\ e^{\alpha_n x}\cos\beta_n x,\ e^{\alpha_n x}\sin\beta_n x$. Значит, $\Delta \neq 0$.

Согласно лемме система уравнений (15) имеет единственное решение вида

$$\begin{aligned} C_{1n} &= \frac{1}{\Delta}\left(\beta_n e^{2\alpha_n}A_{1n} - e^{\alpha_n}(\alpha_n\sin\beta_n + \beta_n\cos\beta_n)\,A_{2n} + e^{\alpha_n}\sin\beta_n A_{3n}\right),\\ C_{2n} &= \frac{1}{\Delta}\left(-e^{-\alpha_n}\,(3\alpha_n\sin\beta_n + \beta_n\cos\beta_n)\,A_{1n} +\right.\\ &\qquad \left. + e^{\alpha_n}(\alpha_n\sin\beta_n + \beta_n\cos\beta_n)\,A_{2n} - e^{\alpha_n}\sin\beta_n A_{3n}\right),\\ C_{3n} &= \frac{1}{\Delta}\left(e^{-\alpha_n}\,(3\alpha_n\cos\beta_n - \beta_n\sin\beta_n)\,A_{1n} + \right.\\ &\qquad \left. + e^{\alpha_n}\big(-2\alpha_n e^{-3\alpha_n} - \alpha_n\cos\beta_n + \beta_n\sin\beta_n\big)\,A_{2n} + e^{\alpha_n}\big(\cos\beta_n - e^{-3\alpha_n}\big)\,A_{3n}\right). \end{aligned}$$

Если ряд (14) и его производные $u_{xxx},\ u_{yy}$ сходятся равномерно по обеим переменным в области $\overline{D}$, то он дает классическое решение задачи $B_1$. Докажем равномерную сходимость ряда (14) в области $D$. Из (14) имеем

$$\left|u(x,y)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left(|C_{1n}|e^{-2\alpha_n x} + |C_{2n}|e^{\alpha_n x} + |C_{3n}|\, e^{\alpha_n x}\right)|Y(y)|\,.$$

Оценим первое слагаемое:

$$|C_{1n}|e^{-2\alpha_n x} \le \frac{e^{-2\alpha_n x}e^{2\alpha_n}}{e^{2\alpha_n}\left|\overline{\Delta}\right|} \left\{|\alpha_n||A_{1n}| + e^{-\alpha_n}\left(|\alpha_n| + |\beta_n|\right)|A_{2n}| + e^{-\alpha_n}|A_{3n}|\right\} \le$$

$$\le \left(|A_{1n}| + |A_{2n}| + |A_{3n}|\right) M_1,$$

аналогично

$$|C_{2n}|\, e^{\alpha_n x} \le \left(|A_{1n}| + |A_{2n}| + |A_{3n}|\right) M_2,$$

$$|C_{3n}|e^{\alpha_n x} \le \left(|A_{1n}| + |A_{2n}| + |A_{3n}|\right) M_3.$$

Тогда получим

$$\left|u(x,y)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left(|A_{1n}Y_n(y)| + |A_{2n}Y_n(y)| + |A_{3n}Y_n(y)|\right). \tag{17}$$

Оценим выражение $\left|A_{in}Y_n(y)\right|$:

$$|A_{in}Y_n(y)| \le \frac{|Y_n(y)|}{\|Y_n\|^2} \int_0^1 \varphi_i\,(\eta) Y_n\,(\eta)\, d\eta.$$

Учитывая

$$|Y_n(y)| \le |\alpha \sin\sqrt{\mu_n}y - \beta\sqrt{\mu_n}\cos\sqrt{\mu_n}y| \le |\alpha| + |\beta|\,\sqrt{\mu_n},$$

получаем

$$|A_{in}Y_n(y)| \le \frac{\left(|\alpha| + |\beta|\,\sqrt{\mu_n}\right)^2}{\|Y_n\|^2} \int_0^1 \varphi_i\,(\eta)\, d\eta.$$

Выражение $\dfrac{\left(|\alpha| + |\beta|\,\sqrt{\mu_n}\right)^2}{\|Y_n\|^2}$ при $n \to \infty$, т. е. при $\mu_n \to \infty$, ограничено, так как из (11) следует, что

$$\frac{\left(|\alpha| + |\beta|\,\sqrt{\mu_n}\right)^2}{\|Y_n\|^2} = \frac{\alpha^2 + 2\,|\alpha\beta|\,\sqrt{\mu_n} + \beta^2\mu_n}{\|Y_n\|^2} \to 2.$$

Отсюда заключаем, что начиная с некоторого номера $n$ выполняется неравенство

$$|A_{in}|\,|Y(y)| < B\int_0^1 |\varphi_i\,(\eta)|\, d\eta, \quad i = \overline{1,3},$$

где $B > 2$. Интегрируя по частям и принимая во внимание условие (16), получаем оценки

$$|\varphi_i| \le N_i \frac{|\varphi_{in}'''|}{n^3}, \quad i = \overline{1,3}.$$

Тогда

$$|A_{in}Y_n| \le 2N_i \frac{|\varphi'''_{in}|}{n^3}, \quad i = \overline{1,3}. \tag{18}$$

Оценка (17) с учетом (18) принимает вид

$$|u(x,y)| \le 2M_4 N_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi'''_{in}|}{n^3} < \infty, \quad i = \overline{1,3}.$$

Отсюда следует, что ряд (14) сходится абсолютно и равномерно. Докажем равномерную сходимость $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Из (14) имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{1n} e^{-2\alpha_n x} + C_{2n} e^{\alpha_n x} \cos \beta_n x + C_{3n} e^{\alpha_n x} \sin \beta_n x\right) Y''_n(y),$$

где

$$\left|Y''_n(y)\right| \le -\mu_n \big(\alpha \sin \sqrt{\mu_n} y - \beta \sqrt{\mu_n} \cos \sqrt{\mu_n} y\big) = -\mu_n Y_n(y).$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{1n} e^{-2\alpha_n x} + C_{2n} e^{\alpha_n x} \cos \beta_n x + C_{3n} e^{\alpha_n x} \sin \beta_n x\right)(-\mu_n) Y_n(y),$$

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \big(|C_{1n}| e^{-2\alpha_n x} + |C_{2n}|\, e^{\alpha_n x} + |C_{3n}|\, e^{\alpha_n x}\big) |\mu_n|\, |Y_n(y)| \le$$

$$\le M_4 \sum_{n=1}^{\infty} \big(|A_{1n} Y_n(y)| + |A_{2n} Y_n(y)| + |A_{3n} Y_n(y)|\big) |\mu_n|.$$

Учитывая $\mu_n = O(n^2)$, получаем

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right| \le 2M_4 N_i \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\varphi'''_{in}|}{n}.$$

Используя неравенства Коши – Буняковского и Бесселя [20], имеем

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right| \le 2M_4 N_i \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi'''_{in}|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \le 2M_4 N_i \sqrt{2\, \|\varphi'''_{in}\|^2} \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} = 2M_4 N_i \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left\|\varphi'''_{in}\right\| < \infty,$$

где

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|\varphi'''_{in}\right|^2 = 2 \left\|\varphi'''_{in}\right\|^2_{L_2(0,1)}, \quad i = \overline{1,3}, \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Учитывая уравнения (2), для $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ тоже получаем аналогичную оценку. Отсюда заключаем, что $\left|\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|$ и $\left|\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|$ сходятся абсолютно и равномерно.

Теорема существования доказана.

## Литература


1. *Рыжов О. С.* Асимптотическая картина обтекания тел вращения со звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа // Прикл. математика и механика. – 1965. – **29**, вып. 6. – С. 1004 – 1014.
2. *Диесперов В. Н.* О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1972. – **12**, № 5. – С. 1265 – 1279.
3. *Block H.* Sur les equations lineaires aux derives parielles a carateristiques multiples // Ark. Mat., Astron. Fis. Note 1. – 1912. – **7**, №. 13. – P. 1 – 34; Note 2. – 1912. – **7**, №. 21. – P. 1 – 30; Note 3. – 1912-1913. – **8**, №. 23. – P. 1 – 51.
4. *Cattabriga L.* Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple // Rend. Sem. Mat. Univ. Padava. – 1961. – **31**. – P. 1 – 45.
5. *Джураев Т. Д, Апаков Ю. П.* Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. – 2007. – № 2(15). – С. 18 – 26.
6. *Джураев Т. Д., Апаков Ю. П.* К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени// Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 1. – С. 40 – 51.
7. *Apakov Yu. P., Rutkauskas S.* On a boundary problem to third order PDE with multiple characteristics // Nonlinear Anal.: Model. and Control. – 2011. – **16**, № 3. – P. 255 – 269.
8. *Апаков Ю. П.* О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 1. – С. 1 – 11.
9. *Апаков Ю. П., Иргашев Б. Ю.* Краевая задача для вырождающегося уравнения высокого нечетного порядка // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 10. – С. 1318 – 1331.
10. *Балкизов Ж. А., Кадзаков А. Х.* О представлении решения краевой задачи для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Изв. Кабардино-Балкар. науч. центра РАН. – 2010. – № 4. – С. 64 – 69.
11. *Юлдашев Т. К.* Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. – 2014. – №1(34). – С. 56 – 65.
12. *Шубин В. В.* Краевые задачи для уравнений третьего порядка с разрывным коэффициентом // Вестн. НГУ. Сер. математика, механика, информатика. – 2012. – **12**, № 1. – С. 126 – 138.
13. *Ashyralyev A., Aggez N., Hezenci F.* Boundary value problem for a third order partal differential equation // First Int. Conf. Anal. and Appl. Math. (ICAAM 2012): AIP Conf. Proc. – 2012. – **1470**. – P. 130 – 133.
14. *Ashyralyev A., Simsek S. N.* An operator method for a third order partial differential equation // Numer. Funct. Anal. and Optim. – 2017 . – **38**, №. 10. – P. 1341 – 1360.
15. *Ashyralyev A., Belakroum Kh., Guezane-Lakoud A.* Stability of boundary value problems for third-order partial differential equations // Electron. J. Different. Equat. – 2017. – **2017**, № 53. – P. 1 – 11.
16. *Ashyralyev A., Belakroum Kh., Guezane-Lakoud A.* Numerical algorithm for the third-order partial differential equation with local boundary conditions // AIP Conf. Proc. – 2017. – **1880**.
17. *Ashyralyev A., Belakroum Kh., Guezane-Lakoud A.* Numerical algorithm for the third-order partial differential equation with nonlocal boundary conditions // AIP Conf. Proc. – 2017. – **1880**.
18. *Кожанов А. И., Лукина Г. А.* Пространственно-нелокальные задачи с интегральными условиями для дифференциальных уравнений третьего порядка // Дифференц. уравнения. – 2017. – **53**, № 7. – С. 906 – 917.
19. *Апаков Ю. П.* Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками методом разделения переменных // Узб. мат. журн. – 2007. – № 1. – С. 14 – 23.
20. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа: В 2 т. – М.: Наука, 1973. – Т. 2. – 447 с.


Получено 17.02.18