УДК 512.544

Ф. М. Лиман, Т. Д. Лукашова (Сум. держ. пед. ун-т ім. А. С. Макаренка)

НЕПЕРІОДИЧНІ ЛОКАЛЬНО РОЗВ'ЯЗНІ ГРУПИ З НЕДЕДЕКІНДОВОЮ ЛОКАЛЬНО НІЛЬПОТЕНТНОЮ НОРМОЮ РОЗКЛАДНИХ ПІДГРУП

We study the relations between the properties of nonperiodic groups and the norms of their decomposable subgroups. The influence of restrictions imposed on the norm of decomposable subgroups and on the properties of the group is analyzed under the condition that this norm is non-Dedekind and locally nilpotent. We also describe the structure of nonperiodic locally soluble groups for which the norm of decomposable subgroups possesses the indicated properties.

Вивчаються взаємозв'язки між властивостями неперіодичних груп та їхніх норм розкладних підгруп. Досліджено вплив обмежень, накладених на норму розкладних підгруп, на властивості групи за умови, що така норма недедекіндова та локально нільпотентна. Описано будову неперіодичних локально розв'язних груп, у яких норма розкладних підгруп задовольняє вказані вище умови.

Вступ. У теорії груп важливе місце займають результати, пов'язані із вивченням груп, у яких підгрупи (чи системи підгруп), що мають певну теоретико-групову властивість, задовольняють наперед задані обмеження. У деяких випадках наявність навіть однієї (і, як правило, характеристичної) підгрупи із заданою властивістю може визначати структуру всієї групи. До таких підгруп відносяться різноманітні Σ-норми групи.

Нехай Σ — система всіх підгруп групи, що мають певну теоретико-групову властивість. Σ-нормою групи G називається перетин нормалізаторів усіх підгруп групи G, що входять у систему Σ. Зокрема, якщо Σ складається з усіх підгруп групи G, то відповідна Σ-норма називається *нормою групи* G [1].

Автори продовжують дослідження різних класів груп, що мають недедекіндову норму розкладних підгруп, розпочаті в [2, 3]. *Розкладною* називається така підгрупа групи G, яку можна подати у вигляді прямого добутку двох нетривіальних множників [4]. Відповідно, перетин нормалізаторів усіх розкладних підгруп групи G будемо називати *нормою розкладних підгруп* і позначатимемо її N_G^d. Будемо вважати, що для груп, які не містять розкладних підгруп, $G = N_G^d$.

Із визначення норми N_G^d випливає, що у випадку $N_G^d = G$ у групі G або розкладні підгрупи є нормальними, або множина таких підгруп порожня. Неабелеві групи з такою властивістю вивчалися у роботі [4] й були названі *di-групами*.

Очевидно, що наявність у групі розкладних підгруп безпосередньо пов'язана з існуванням у ній розкладних абелевих підгруп, які у більшості випадків є нециклічними. Тому норма розкладних підгруп N_G^d групи G певною мірою буде залежати від властивостей норми абелевих нециклічних підгруп N_G^A цієї групи.

У роботі [2] авторами було встановлено, що періодична локально нільпотентна група тоді і тільки тоді має недедекіндову норму розкладних підгруп, коли вона є локально скінченною p-групою, в якій $N_G^d = N_G^A$. Слід зазначити, що умова недедекіндовості норми розкладних підгруп у цьому випадку є істотною, бо у довільній періодичній локально нільпотентній групі має місце співвідношення $N_G^d \subseteq N_G^A$.

У роботі [3] вивчення взаємозв'язків між нормами розкладних та абелевих нециклічних підгруп було продовжено для класу неперіодичних локально розв'язних груп і встановлено, що за умови локальної нільпотентності та недедекіндовості норми розкладних підгруп має місце

© Ф. М. ЛИМАН, Т. Д. ЛУКАШОВА, 2019

включення $N_G^d \supseteq N_G^A$. Також було доведено, що будь-яка неперіодична локально нільпотентна група, яка має недедекіндову норму N_G^d розкладних підгруп, збігається з цією нормою і тому є негамільтоновою di-групою.

Метою даної статті є вивчення властивостей неперіодичних локально розв'язних груп, у яких норма розкладних підгруп є недедекіндовою локально нільпотентною підгрупою.

1. Попередні результати. Розглянемо спочатку взаємозв'язки між властивостями неперіодичних локально розв'язних груп та їхніх норм розкладних підгруп за умови, що ці норми недедекіндові.

Твердження 1.1 [3]. *Якщо G — неперіодична локально розв'язна група, що має недедекіндову норму N_G^d розкладних підгруп, то*:

1) *будь-яка розкладна абелева підгрупа групи G буде мішаною тоді і тільки тоді, коли мішаною буде кожна розкладна абелева підгрупа норми N_G^d*;

2) *група G тоді і тільки тоді не містить розкладних підгруп, коли таких підгруп не містить її норма N_G^d*;

3) *група G тоді і тільки тоді не містить вільних абелевих підгруп рангу $r \geq 2$, коли підгруп такого рангу не містить її норма N_G^d*;

4) *група G тоді і тільки тоді не містить непримарних абелевих підгруп, коли підгруп із такою властивістю не містить її норма N_G^d.*

Наступне твердження характеризує будову норми розкладних підгруп N_G^d довільної неперіодичної локально розв'язної групи G за умови, що вказана норма є локально нільпотентною недедекіндовою підгрупою.

Твердження 1.2 [3]. *У неперіодичній локально розв'язній групі G норма N_G^d розкладних підгруп локально нільпотентна й недедекіндова тоді і тільки тоді, коли N_G^d є неперіодичною di-групою одного з типів*:

1) $N_G^d = Q \times B$, *де Q — група кватерніонів, B — абелева група без скруту рангу* 1;

2) $N_G^d = \langle a \rangle \leftthreetimes B$, *де $|a| = p^n$, p — просте число, $n > 1$, B — неподільна абелева група без скруту рангу* 1 *і* $[\langle a \rangle, B] = \langle a^{p^{n-1}} \rangle$.

Слід зазначити, що у пункті 2 твердження 1.2 підгрупа B не є p-подільною. Справді, в іншому випадку підгрупа

$$\left(Z(N_G^d)\right)^{p^{n-1}} = \left(\langle a^p \rangle \times B^p\right)^{p^{n-1}} = B^{p^n} = B$$

буде N_G^d-допустимою і, як наслідок, $B \lhd N_G^d$, що неможливо. Отже, B — не p-подільна абелева група без скруту рангу 1.

***Наслідок* 1.1.** *Якщо норма N_G^d розкладних підгруп неперіодичної локально розв'язної групи G є періодичною локально нільпотентною підгрупою, то вона дедекіндова.*

Існування таких груп підтверджують приклади 3.4 і 3.5 роботи [3].

***Наслідок* 1.2.** *Нехай норма N_G^d неперіодичної локально розв'язної групи G є локально нільпотентною недедекіндовою підгрупою. Тоді будь-які дві нескінченні циклічні підгрупи групи G мають неодиничний перетин.*

Доведення. З умови випливає, що норма N_G^d розкладних підгруп є групою одного з двох типів твердження 1.2. У кожному з цих випадків періодична частина $T(N_G^d)$ норми N_G^d є скінченною характеристичною підгрупою групи G.

Нехай $x, y \in G$, $|x| = |y| = \infty$ і $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = E$. Тоді або $\langle x \rangle \cap B = E$, або $\langle y \rangle \cap B = E$, де B — підгрупа без скруту рангу 1 з норми N_G^d. Будемо вважати, що $\langle x \rangle \cap B = E$. Оскільки

$T(N_G^d) \lhd G$, $\left|T(N_G^d)\right| = n < \infty$, то $x^k \in C_G(T(N_G^d))$ для деякого цілого числа k і $\left\langle x^k, T(N_G^d)\right\rangle$ — N_G^d-допустима підгрупа, тому й $\left\langle x^{kn}\right\rangle$ також буде N_G^d-допустимою, що неможливо за лемою 1.1 роботи [3]. Отже, $\langle x\rangle \cap \langle y\rangle \neq E$, що й потрібно було довести.

Твердження 1.3 [3]. *У неперіодичній локально нільпотентній групі G норма N_G^d розкладних підгруп тоді і тільки тоді недедекіндова, коли $G = N_G^d$ і G — група одного з типів* 1, 2 *твердження* 1.2.

Отже, у класі локально нільпотентних неперіодичних груп із недедекіндовості норми розкладних підгруп випливає нормальність усіх розкладних підгруп групи.

У подальших міркуваннях будемо використовувати таке твердження.

Лема 1.1. *Якщо фактор-група $G/\langle a\rangle$ абелева, де $|a| = p^n$ (p — просте число, $n \in \mathbb{N}$), і комутант $G' \neq \langle a\rangle$, то група G є нільпотентною.*

Доведення. Очевидно, що у випадку $\langle a\rangle \subseteq Z(G)$ група G нільпотентна класу 2. Нехай $\langle a\rangle \nsubseteq Z(G)$ і елемент $x \in G$ такий, що $[a, x] \neq 1$. Оскільки $G' \subseteq \langle a^p\rangle$, то покладемо $[a, x] = a^{pt},\ t \in \mathbb{Z}$.

Позначимо $a_i = a^{p^{n-i}}$, де $1 \leq i \leq n,\ a_n = a$. Тоді з рівності $x^{-1}ax = aa^{pt}$ одержимо

$$x^{-1}a_i x = x^{-1}a^{p^{n-i}}x = a^{p^{n-i}}a^{p^{n-i+1}t} = a_i a_{i-1}^t,$$

звідки $\langle a_i\rangle/\langle a_{i-1}\rangle \subseteq Z(G/\langle a_{i-1}\rangle)$.

Отже, ряд

$$\langle 1\rangle \lhd \langle a_1\rangle \lhd \langle a_2\rangle \lhd \ldots \lhd \langle a_{n-1}\rangle \lhd \langle a_n\rangle \lhd G$$

є центральним і група G нільпотентна.

***Наслідок* 1.3.** *Якщо фактор-група $G/\langle a\rangle$ абелева, $\langle a\rangle$ — циклічна 2-група, то група G є нільпотентною.*

2. Неперіодичні локально розв'язні групи з недедекіндовою локально нільпотентною нормою розкладних підгруп. У цьому пункті будемо розглядати неперіодичні локально розв'язні не локально нільпотентні групи, норма N_G^d яких є локально нільпотентною неперіодичною групою. Їхню будову описує така теорема.

Теорема 2.1. *Неперіодична локально розв'язна й не локально нільпотентна група G тоді і тільки тоді має недедекіндову локально нільпотентну норму розкладних підгруп, коли G — група одного з таких типів*:

1) $G = B \leftthreetimes \langle y, q\rangle$, *де* $|y| = 8,\ y^4 = q^2,\ q^{-1}yq = y^{-1}$, B — *абелева група без скруту рангу* 1, $y^{-1}by = b^{-1}, [q, b] = 1$ *для довільного елемента* $b \in B$; $N_G^d = \left\langle y^2, q\right\rangle \times B$;

2) $G = \langle a\rangle \leftthreetimes B\langle y\rangle,\ |a| = p^n,\ p$ — *просте число,* $p \neq 2,\ n > 1,\ B\langle y\rangle$ — *абелева група без скруту рангу* 1, B — *не p-подільна абелева група без скруту рангу* 1, $|y| = \infty,\ [B\langle y\rangle : B] = k,\ k \in \mathbb{N},\ k|(p-1),\ k > 1,\ [\langle a\rangle, \langle y\rangle] = \langle a\rangle,\ [\langle a\rangle, B] = \left\langle a^{p^{n-1}}\right\rangle$; $N_G^d = \langle a\rangle \leftthreetimes B$;

3) $G = \big(\langle a\rangle \leftthreetimes B\big)\langle g\rangle,\ |a| = 4$, B — *не 2-подільна абелева група без скруту рангу* 1, $[\langle a\rangle, B] = \langle a^2\rangle,\ g^2 = a$; *при цьому якщо* $b \in (B \backslash C_G(a))$, *то* $g^{-1}bg = b^{-1}a^{-1}$, *а якщо* $b \in (B \cap C_G(a))$, *то* $g^{-1}bg = b^{-1}$; $N_G^d = \langle a\rangle \leftthreetimes B$.

Доведення. *Достатність.* Нехай G — група типу 1 теореми 2.1. Оскільки всі розкладні абелеві підгрупи цієї групи містяться у групі $\big(\left\langle y^2, q\right\rangle \times B\big)$ й нормальні у ній, а елемент y не належить нормалізатору абелевої нециклічної підгрупи $\left\langle q^2, bq\right\rangle$, де $b \in B$, то $N_G^d = \left\langle y^2, q\right\rangle \times B$.

Нехай G — група типу 2 теореми. Враховуючи, що всі розкладні абелеві підгрупи цієї групи мішані, належать групі $C_G(a^{p^{n-1}}) = \langle a\rangle \leftthreetimes B$ й нормальні у ній, робимо висновок, що

$$N_G^d \supseteq (\langle a \rangle \leftthreetimes B).$$

З іншого боку, жоден елемент $x \notin C_G(a^{p^{n-1}})$, $|x| = \infty$ не нормалізує підгрупу $\left\langle a^{p^{(n-1)}}, ab \right\rangle$, де $b \in B$, тому $N_G^d = \langle a \rangle \leftthreetimes B$.

У групі типу 3 всі розкладні підгрупи також містяться у групі $\langle a \rangle \leftthreetimes B$ і нормальні у ній, тому $N_G^d \supseteq (\langle a \rangle \leftthreetimes B)$. Оскільки елемент g не нормалізує підгрупу $\langle a^2, b \rangle$, де b — довільний непереставний з a елемент підгрупи B, то $N_G^d = \langle a \rangle \leftthreetimes B$.

Необхідність. Нехай G — досліджувана група. Тоді її норма розкладних підгруп є di-групою одного з типів 1 або 2, вказаних у твердженні 1.2. Подальше доведення проведемо у лемах 2.1 і 2.2, залежно від будови норми N_G^d.

Лема 2.1. *Якщо неперіодична локально розв'язна й не локально нільпотентна група G має нормою розкладних підгруп групу*

$$N_G^d = Q \times B,$$

де $Q = \langle q_1, q_2 \rangle$ — група кватерніонів, $|q_1| = |q_2| = 4$, $q_1^2 = q_2^2$, ${q_2}^{-1} q_1 q_2 = {q_1}^{-1}$, B — абелева група без скруту рангу 1, *то G — група типу* 1 *теореми* 2.1.

Доведення. Нехай група G та її норма N_G^d розкладних підгруп задовольняють умови леми. Оскільки всі розкладні абелеві підгрупи норми N_G^d мішані, то з твердження 1.1 випливає, що таку ж властивість мають усі розкладні абелеві підгрупи самої групи G.

Враховуючи, що Q — характеристична підгрупа норми N_G^d, маємо $Q \triangleleft G$. Отже, інволюція q_1^2 міститься у центрі групи G. Тоді з твердження 1.1 [3] випливає, що всі неодиничні елементи скінченного порядку групи є 2-елементами, а кожна 2-підгрупа групи G нерозкладна, містить q_1^2 і тому є локально циклічною чи кватерніонною 2-групою.

Нехай $C = C_G(Q)$ — централізатор підгрупи Q. Тоді $C \triangleleft G$. Якщо C містить елементи порядку 4, то підгрупа $Q \langle c \rangle$ містить розкладну абелеву підгрупу порядку 4, що суперечить твердженню 1.1. Отже, періодична частина централізатора $T(C) = \left\langle q_1^2 \right\rangle$.

Враховуючи, що $C / \left\langle q_1^2 \right\rangle$ — локально розв'язна група без скруту, яка не містить розкладних підгруп, та використовуючи опис груп із такою властивістю [4], робимо висновок, що вона абелева рангу 1. Оскільки для будь-яких елементів $x, y \in C$ група $\left\langle x, y, q_1^2 \right\rangle / \left\langle q_1^2 \right\rangle$ циклічна, то $[x, y] = 1$. Отже, підгрупа C абелева і

$$C = \left\langle q_1^2 \right\rangle \times M,$$

де M — абелева група без скруту рангу 1.

Нехай $x \in G$ — довільний елемент нескінченного порядку. Тоді $\left\langle x, q_1^2 \right\rangle$ — N_G^d-допустима підгрупа і тому $\left\langle x^2 \right\rangle = (\left\langle x, q_1^2 \right\rangle)^2$ також є N_G^d-допустимою. Отже,

$$\left[\left\langle x^2 \right\rangle, Q\right] \subseteq \left\langle x^2 \right\rangle \cap Q = E$$

і $x^2 \in C$.

Оскільки група G не містить вільних абелевих підгруп рангу 2, то $\left\langle x^2 \right\rangle \cap B \neq E$. Тоді для довільного елемента $b \in B$, $|b| = \infty$, маємо $x^{2k} = b^m$ для деяких цілих чисел m і k. Якщо при цьому $b^{-1} x^2 b = x^{-2}$, то $b^{-1} x^{2k} b = x^{-2k} = x^{2k}$, $x^{4k} = 1$, що неможливо. Отже, $\left[x^2, b\right] = 1$ і група $\left\langle x^2,\ B \right\rangle$ є абелевою рангу 1.

Розглянемо фактор-групу G/C. Відомо, що $\operatorname{Aut} Q \cong S_4$, тому $|G/C| \leq 24$. Покажемо, що G/C не містить відмінних від одиниці 3-елементів. Справді, нехай $\overline{g} \in G/C$, $|\overline{g}| = 3$ і g — прообраз елемента $\overline{g}$, $g^3 \in C$. Якщо $|g| = \infty$, то за доведеним вище $g^2 \in C$, звідки $g \in C$.

Нехай $|g| < \infty$, тоді $|g| = 2^n$. Але у такому випадку $\langle g^3 \rangle = \langle g \rangle$ і знову $g \in C$. Отже, G/C є 2-групою порядку не більше 8.

Якщо $T(G) = Q$, то фактор-група G/Q абелева без скруту рангу 1. Оскільки для довільного елемента $x \in G$ нескінченного порядку має місце включення $x^2 \in C$, то фактор-група G/C має експоненту 2 і тому абелева. Але тоді

$$G' \subseteq Q \cap C = \langle q_1^2 \rangle,$$

і оскільки $q_1^2 \in Z(G)$, то G — нільпотентна група класу 2, що суперечить умові. Отже, існує елемент $y \in G \backslash Q$, $|y| < \infty$. Враховуючи попередні зауваження, $|y| = 2^n \geq 8$.

З того, що $\langle y \rangle \cap C = \langle q_1^2 \rangle = \langle y^{2^{n-1}} \rangle$, випливає, що $G/C = \overline{G} \supseteq \langle \overline{y} \rangle$, де $|\overline{y}| = 2^{n-1} \geq 4$. Враховуючи, що $\langle \overline{y} \rangle$ ізоморфна деякій підгрупі групи S_4, а остання не містить елементів порядку 8, робимо висновок, що $|y| = 8$ і $\langle y \rangle Q$ — узагальнена група кватерніонів порядку 16. При цьому G не містить елементів скінченного порядку більше 8.

Нехай $G_1 = \langle y \rangle QC$. Тоді

$$G_1/C = \langle y \rangle QC/C \cong \langle y \rangle Q/(\langle y \rangle Q \cap C) = \langle \overline{y} \rangle \leftthreetimes \langle \overline{q_2} \rangle \cong D_8,$$

де D_8 — група діедра порядку 8. Враховуючи, що $G/C \supseteq G_1/C$ і G/C є 2-групою порядку не вище 8, робимо висновок, що $G = G_1$. Отже,

$$G = \langle y \rangle QC = \langle y, q_2 \rangle C = (Q \times M) \langle y \rangle,$$

де $Q = \langle y^2, q_2 \rangle$, $|y| = 8$, $|q_2| = 4$, $q_2^{-1} y q_2 = y^{-1}$, $q_2^2 = y^4$, $C = C_G\left(\langle y^2, q_2 \rangle\right)$, $C/\langle q_2^2 \rangle \cong M$ — абелева група без скруту рангу 1.

Покажемо, що підгрупа $A = Q \times M$ містить усі елементи нескінченного порядку групи G. Припустимо, що це не так і існує елемент $x \notin A$, $|x| = \infty$. Оскільки підгрупа $\langle x, q_1^2 \rangle$ є N_G^d-допустимою, то для довільного елемента $q_i \in Q$ маємо $q_i^{-1} x q_i = x^k q_2^{2m}$. Враховуючи, що $x^2 \in C$, одержуємо

$$q_i^{-1} x^2 q_i = x^{2k} = x^2,$$

звідки $k = 1$ і $[Q, \langle x \rangle] = \langle q_2^2 \rangle$. Оскільки $x \notin C$, то для твірних елементів q_1 і q_2 підгрупи Q мають місце співвідношення $[x, q_1] = 1$ і $[x, q_2] = q_2^2$. Але у такому випадку $xq_1 \in C$ і $x \in CQ = A$, що неможливо.

З цього також випливає, що підгрупа A містить усі розкладні абелеві підгрупи групи G. Справді, підгрупи такого роду є мішаними, вигляду $\langle a \rangle \times M_1$, де $|a| < \infty$, M_1 — абелева група без скруту рангу 1, $M_1 \subset A$. Але тоді для довільного елемента $x \in M_1$, $|x| = \infty$, елемент (xa) має нескінченний порядок і належить підгрупі A, тому $a \in A$. Отже, всі розкладні абелеві підгрупи групи G містяться в A і нормальні у ній. Тому $A = N_G^d$ і

$$G = \langle y \rangle N_G^d = \langle y \rangle (Q \times B),$$

де $y^2 \in Q$ і $\langle y \rangle Q$ — узагальнена група кватерніонів порядку 16.

Встановимо тепер, як діє елемент y на елементи нескінченного порядку даної групи. Оскільки $Z\left(N_G^d\right) = \left(\langle q_1^2 \rangle \times B\right) \lhd G$, то можемо вважати, що $y^{-1} b y = b_1 q_1^{2n}$, де $n \in \{0, 1\}$ і $b, b_1 \in B$, $|b| = |b_1| = \infty$. За наслідком 1.2 $\langle b \rangle \cap \langle b_1 \rangle \neq E$, тому $b^k = b_1^m$ для деяких цілих чисел k і m. Тоді

$$y^{-1} b^k y = y^{-1} b_1^m y = \left(b_1 q_1^{2n}\right)^k = b_1^k q_1^{2nk}$$

і

$$y^{-1}b_1^{2km}y = b_1^{2k^2}, \quad b_1^{2km} = yb_1^{2k^2}y^{-1}.$$

З іншого боку,

$$yb_1^{2k}y^{-1} = b_1^{2m} \quad \text{і} \quad yb_1^{2mk}y^{-1} = b_1^{2m^2}.$$

Тому $b_1^{2m^2} = yb_1^{2mk}y^{-1} = y^2b_1^{2k^2}y^{-2} = b_1^{2k^2}$ і $2m^2 = 2k^2$ і $m = \pm k$. Отже, або $b^k = b_1^k$, або $b^k = b_1^{-k}$. Оскільки B — абелева група без скруту, то $b_1 = b$ або $b_1 = b^{-1}$. У першому випадку із співвідношення $y^{-1}by = b$ випливає, що $|yb| = \infty$. Враховуючи наведені вище міркування, одержуємо $yb \in N_G^d$, що неможливо. У випадку $y^{-1}by = b^{-1}$ маємо $y^{-1}by = b^{-1}q_1^{2n}$. Якщо при цьому $n = 1$, то $|ybq_2| = 2$, що також неможливо. Отже, $n = 0$ і $y^{-1}by = b^{-1}$ для довільного елемента $b \in B$.

Лему 2.1 доведено.

Лема 2.2. *Якщо неперіодична локально розв'язна й не локально нільпотентна група G має нормою розкладних підгруп групу*

$$N_G^d = \langle a \rangle \rightthreetimes B,$$

де $|a| = p^n, p$ — просте число, $n > 1, B$ — не p-подільна абелева група без скруту рангу 1 і $[\langle a \rangle, B] = \left\langle a^{p^{n-1}} \right\rangle$, то G — група типу 2 при $p \neq 2$ і типу 3 при $p = 2$ теореми 2.1.

Доведення. Нехай норма N_G^d розкладних підгруп неперіодичної локально розв'язної не локально нільпотентної групи G є групою типу 2 твердження 1.2. Оскільки всі розкладні абелеві підгрупи норми N_G^d мішані, то з твердження 1.1 випливає, що таку ж властивість мають усі розкладні абелеві підгрупи групи G. Крім того, за наслідком 1.2 будь-які дві нескінченні циклічні підгрупи даної групи мають неодиничний перетин.

Оскільки центр норми $Z\left(N_G^d\right) = \langle a^p, B^p \rangle$ є її характеристичною підгрупою, то підгрупа

$$B_1 = \left(Z\left(N_G^d\right)\right)^{p^{n-1}} = B^{p^n}$$

є нормальною в G. При цьому $B_1 \neq B$, бо B — не p-подільна група.

Позначимо $C_1 = C_G\left(B_1\right)$. Тоді за твердженням 1.1 підгрупа C_1 не містить відмінних від одиниці q-елементів при $q \neq p$. Покажемо, що C_1 містить усі елементи нескінченного порядку групи G.

Припустимо, що це не так і існує елемент $x \in G \backslash C_1$ такий, що $|x| = \infty$. Тоді $[x, b] \neq 1$ і $\langle x \rangle \bigcap \langle b \rangle \neq E$ для деякого елемента $b \in B_1$. Отже, для деяких цілих чисел m і k маємо $x^m = b^k$. Нехай $x^{-1}bx = b_1$, $b_1 \in B_1$. Тоді $x^{-1}b^kx = {b_1}^k = b^k$, звідки $\left(bb_1^{-1}\right)^k = 1$, $bb_1^{-1} = 1$ і $b_1 = b$, що суперечить вибору елемента x. Отже, C_1 містить усі елементи нескінченного порядку групи G.

Далі будемо розглядати два випадки.

1. Нехай $p \neq 2$. Покажемо, що за цієї умови періодична частина $T(G)$ групи G збігається з $\langle a \rangle$. Припустимо, що це не так і G містить p-елементи, які не належать підгрупі $\langle a \rangle$. Нехай $g \in G$ — елемент найменшого порядку p^k з такою властивістю. Тоді $\langle a, g \rangle$ — p-група, що має єдину підгрупу порядку p. Оскільки $p \neq 2$, то група $\langle a, g \rangle$ циклічна, $k > 1$ і можна вважати, що $g^p = a$.

Розглянемо фактор-групу G/C_1. Оскільки вона періодична й ізоморфна підгрупі групи автоморфізмів абелевої групи без скруту рангу 1, то $|G/C_1| \leq 2$ (див. [5, с. 294]) і $g \in C_1$. З цього випливає, що підгрупа $\langle g\rangle$ є N_G^d-допустимою. Але тоді група $G_1 = \langle g\rangle \leftthreetimes B$ локально нільпотентна, бо $B_1 \subseteq Z(G_1)$, а G_1/B_1 — локально скінченна p-група.

Оскільки норма $N_{G_1}^d$ розкладних підгруп групи G_1 недедекіндова, то з твердження 1.3 випливає, що $G_1 = N_{G_1}^d$. Але у такому випадку

$$[B, \langle g^p\rangle] = [B, \langle a\rangle] = E,$$

що суперечить умові. Отже, у цьому випадку $\langle a\rangle$ — максимальна p-підгрупа групи G.

Припустимо, що існує такий елемент $x \in G$, що $|x| = q^k$, де q — просте число, $q \neq p$, $k \geq 1$. Якщо $q \neq 2$, то $x \in C_1$, що неможливо. Тому $|x| = 2^k$. Оскільки $x^2 \in C_1$, то $|x| = 2$. Розглянемо підгрупу

$$M = N_G^d \leftthreetimes \langle x\rangle = (\langle a\rangle \leftthreetimes B) \leftthreetimes \langle x\rangle\,.$$

Оскільки $\langle x\rangle$ — максимальна абелева підгрупа в M, то x індукує на N_G^d регулярний автоморфізм порядку 2.

Нехай c — довільний елемент з N_G^d і $xcx = c_1$, де $c_1 \in N_G^d$. Тоді $xc_1x = c$ і $xcc_1x = c_1c$. З цього та з рівності $c_1^{-1}c_1cc_1 = cc_1$ випливає, що

$$xc_1^{-1}c_1cc_1x = xcc_1x = c_1c,$$

тобто c_1x переставний з c_1c. Але у такому випадку $c_1x \in C_M(c_1c)$. Якщо $c_1c \neq 1$, то, враховуючи включення $C_M(c_1c) \subseteq N_G^d$, одержуємо $x \in N_G^d$, що неможливо. Отже, $c_1c = 1$ і $c_1 = c^{-1}$.

Як відомо, група, що допускає автоморфізм, який переводить кожен елемент групи в обернений, є абелевою, але це неможливо у досліджуваному випадку. Тому G не містить інволюцій і $T(G) = \langle a\rangle$. Враховуючи, що $G/\langle a\rangle$ — локально розв'язна група без скруту, яка не містить розкладних абелевих підгруп і в якій будь-які дві неодиничні підгрупи мають неодиничний перетин, за теоремою 2.1 роботи [4] робимо висновок, що $G/\langle a\rangle$ — абелева група без скруту рангу 1.

Позначимо $C_2 = C_G(a_1)$, де $a_1 = a^{p^{n-1}}$. Оскільки $\langle a\rangle \subseteq C_2$ і за доведеним $G/\langle a\rangle$ — абелева група, то фактор-група $C_2/\langle a\rangle$ також абелева, звідки $C_2' \subseteq \langle a\rangle$. Далі, з умов $\langle a_1\rangle \subseteq Z(C_2)$, $C_2 \supseteq N_G^d$ і леми 1.1 випливає, що C_2 нільпотентна, а тому за твердженням 1.3 $C_2 = N_{C_2}^d$. Оскільки C_2 містить усі розкладні абелеві підгрупи групи G, то

$$C_2 = N_{C_2}^d = N_G^d = \langle a\rangle \leftthreetimes B.$$

Отже,

$$G = C_2\langle y\rangle = (\langle a\rangle \leftthreetimes B)\langle y\rangle,$$

де $|y| = \infty,\ [G\colon C_2] = k,\ k \in \mathbb{N},\ k|\,(p-1)\,,\ k > 1.$

Оскільки з кожного елемента підгрупи $\langle a\rangle$ однозначно добувається корінь k-го степеня, де $k = [G\colon C_2]$, $(k,p) = 1$, то за теоремою 1 [6] із доповнюваності підгрупи $\langle a\rangle$ в C випливає її доповнюваність у групі G,

$$G = \langle a\rangle \leftthreetimes H.$$

Оскільки фактор-група G/C_2 циклічна і

$$G/C_2 \cong G/\langle a\rangle/C_2/\langle a\rangle \cong H/B,$$

то $H/B \cong \langle \bar{y} \rangle$ — також циклічна група і $H = B\langle y \rangle$, де y — прообраз елемента $\bar{y}, y^k \in B$. Отже,

$$G = \langle a \rangle \leftthreetimes B\langle y \rangle,$$

де $y^k \in B,\ k|(p-1), k > 1$. Враховуючи, що група G не нільпотентна, з умови $G' \subseteq \langle a \rangle$ і леми 1.1 випливає, що $G' = \langle a \rangle$ і $[y, a] = a^m$, де $(m, p) = 1$. Отже, у цьому випадку G є групою типу 2 теореми 2.1.

2. Нехай тепер $p = 2$. Припустимо, що періодична частина $T(G)$ групи G збігається з $\langle a \rangle$. Оскільки фактор-група $G/\langle a \rangle$ є локально розв'язною групою без скруту й без розкладних абелевих підгруп, в якій кожна пара нескінченних циклічних підгруп має неодиничний перетин, то за теоремою 2.1 роботи [4] $G/\langle a \rangle$ — абелева група без скруту рангу 1. Тому $G' \subseteq \langle a \rangle$ і за наслідком 1.3 група G нільпотентна, що суперечить умові.

Отже, G містить елементи скінченного порядку, що не належать підгрупі $\langle a \rangle$. Оскільки $a^{2^{n-1}} \in Z(G)$, то з твердження 1.1 випливає, що G не містить відмінних від одиниці елементів непарного порядку. Тому елементи скінченного порядку є 2-елементами.

У множині $G \setminus \langle a \rangle$ виберемо елемент g найменшого порядку, $|g| = 2^k$. Оскільки $a^{2^{n-1}}$ — єдина інволюція групи, то $k > 1,\ g^2 \in \langle a \rangle$ і $\langle a, g \rangle$ — циклічна або кватерніонна 2-група.

Нехай $\langle a, g \rangle$ — циклічна 2-група. Тоді можна вважати, що $g^2 = a$ і $\langle a, g \rangle = \langle g \rangle$. Якщо $g \in C_1 = C_G(B_1)$, то підгрупа $\langle g \rangle$ є N_G^d-допустимою. За наслідком 1.3 група $G_1 = \langle g \rangle \leftthreetimes B$ нільпотентна і тому за твердженням 1.3

$$G_1 = N_{G_1}^d.$$

Тоді $G_1' = \langle a^{2^{n-1}} \rangle$ і для довільного елемента $b \in B$ має місце співвідношення

$$[g^2, b] = [g, b]^2 = 1.$$

Але у такому випадку $[a, b] = 1$, що неможливо за умовою.

Отже, у цьому випадку $g \notin C_1$ і елемент g непереставний із жодним елементом нескінченного порядку. Оскільки C_1 містить усі елементи нескінченного порядку групи G, а фактор-група G/C_1 ізоморфна підгрупі групи автоморфізмів абелевої групи без скруту рангу 1, періодична частина якої має порядок 2 (див. [5, с. 224]), то

$$G = C_1\langle g \rangle,$$

де $g^2 \in \langle a \rangle \subseteq C_1$.

Нехай тепер $\langle a, g \rangle$ — кватерніонна 2-група. Тоді $g^2 = a^{2^{n-1}} = a_1,\ |g| = 4$ і $g^{-1}ag = a^{-1}$. Припустимо, що $g \in C_1 = C_G(B_1)$. Тоді $\langle g \rangle$ — N_G^d-допустима підгрупа і

$$[a, g] \in \langle a \rangle \cap \langle g \rangle = \langle a_1 \rangle.$$

Але у такому випадку $|a| = 4$ і $\langle a, g \rangle$ — група кватерніонів порядку 8.

Розглянемо групу

$$G_2 = \langle a, g \rangle \leftthreetimes B.$$

Враховуючи, що підгрупи $\langle a \rangle$ і $\langle g \rangle$ є N_G^d-допустимими, нормальний ряд

$$1 \lhd \left\langle a^2 \right\rangle \lhd \langle a \rangle \lhd \langle a, g \rangle \lhd G_2$$

є центральним і група G_2 нільпотентна. За твердженнями 1.2 та 1.3

$$G_2 = N_{G_2}^d = \langle a, g \rangle \times B,$$

і тому $[\langle a \rangle, B] = E$, що суперечить умові. Отже, й у цьому випадку $g \notin C_1$ і

$$G = C_1 \langle g \rangle,$$

де $|g| = 4,\ g^2 = a^{2^{n-1}}$ і $g^{-1}ag = a^{-1}$.

Оскільки фактор-група C_1/B_1 локально скінченна, то з твердження 3.9 [7] випливає, що всі елементи скінченного порядку групи C_1 утворюють нормальну підгрупу $T(C_1)$, а фактор-група $C_1/T(C_1)$ є абелевою без скруту рангу 1. Враховуючи наведені вище міркування, приходимо до висновку, що $T(C_1) = \langle a \rangle$. Тоді за наслідком 1.3 група C_1 нільпотентна, і, застосовуючи до неї твердження 1.3, одержуємо

$$C_1 = N_{C_1}^d = \langle a \rangle \leftthreetimes H,$$

де H — абелева група без скруту рангу 1, $[\langle a \rangle, H] = \left\langle a^{2^{n-1}} \right\rangle$.

Оскільки C_1 містить усі елементи нескінченного порядку групи G і кожна розкладна абелева підгрупа групи G є мішаною, то C_1 містить усі розкладні абелеві підгрупи групи G, і вони нормальні в C_1. Тому

$$N_G^d = N_{C_1}^d = C_1$$

і

$$G = \big(\langle a \rangle \leftthreetimes B\big)\langle g \rangle, \quad g^2 \in \langle a \rangle,$$

причому або $\left\langle g^2 \right\rangle = \langle a \rangle$, або $\langle a, g \rangle$ — кватерніонна 2-група порядку $2^{n+1} \geq 8$.

Розглянемо фактор-групу

$$\bar{G} = G/\langle a \rangle \cong \bar{B} \leftthreetimes \langle \bar{g} \rangle, \quad |\bar{g}| = 2.$$

Оскільки $\bar{N_G^d} = \bar{B} \lhd \bar{G}$, то $\bar{g}^{-1}\bar{b}\bar{g} = \bar{b_1}$, де $\bar{b}, \bar{b_1} \in \bar{B}$. Якщо існує такий елемент $\bar{b} \neq \bar{1}$, що $\bar{g}^{-1}\bar{b}\bar{g} = \bar{b}$, то $g^{-1}bg = ba^r$, де $r \in \mathbb{Z}$ і $|gb| = \infty$. Але тоді $gb \in C_1$ і $g \in C_1$, що суперечить його вибору. Отже,

$$\bar{g}^{-1}\bar{b}\bar{g} = \bar{b_1} \neq \bar{b}.$$

Тоді $\bar{g}^{-1}\bar{b}\bar{b_1}\bar{g} = \bar{b}\bar{b_1} = \bar{b_1}\bar{b}$, звідки $\bar{b}\bar{b_1} = \bar{1}$ і $\bar{b_1} = \bar{b}^{-1}$. Повертаючись до прообразів, маємо

$$g^{-1}bg = b^{-1}a^r.$$

Нехай $\langle a, g \rangle$ — циклічна група, $g^2 = a$ і $|a| = 2^n \geq 4$. Тоді з рівності

$$[g^2, b] = [a, b] = a^{2^{n-1}},$$

де b — непереставний з a елемент групи B, випливає, що $r = 1 + 2k,\ k \in \mathbb{Z}$, і

$$g^{-1}bg = b^{-1}a^{1+2k}.$$

Припустимо, що $|a| > 4$. Тоді $|gba^{-1-k+2^{n-2}t}| = 2$, де $b \in B,\ [a, b] \neq 1$, а цілі числа k і t мають однакову парність. Отже, група G містить інволюцію $gba^{-1-k+2^{n-2}t}$, відмінну від $a_1 = a^{2^{n-1}}$, що неможливо. Тому $|a| = 4$ і $g^{-1}bg = b^{-1}a$ або $g^{-1}bg = b^{-1}a^{-1}$ для довільного елемента $b \in B$, що є непереставним з a. Якщо $g^{-1}bg = b^{-1}a$, то $|gb| = 2$, що неможливо. Отже, $g^{-1}bg = b^{-1}a^{-1}$, де $b \in B$ і $[a, b] \neq 1$. За цих умов для елемента $b^2 \in C_G(a)$ маємо

$$g^{-1}b^2g = \left(b^{-1}a^{-1}\right)^2 = ab^{-2}a^{-1} = b^{-2}.$$

Отже, у цьому випадку G — група типу 3 теореми 2.1. Зазначимо, що група G містить підгрупу кватерніонів $\langle a, bg\rangle$ порядку 8.

Нехай тепер $\langle a, g\rangle$ — кватерніонна 2-група порядку $2^{n+1} \geq 8$. Якщо $|a| > 4$, то з умов $g^{-1}bg = b^{-1}a^r$ і $g^2 \in Z(G)$ випливає, що $r = 2^{n-1}k$, де $k \in \{0, 1\}$. Тоді $g^{-1}bg = b^{-1}a_1^k$ і, як неважко переконатись, $|bg| = 2$ при $k = 1$ і $|abg| = 2$ при $k = 0$. Отже, група G містить інволюції, відмінні від a_1, що неможливо. Тому $|a| = 4$.

Нехай b — довільний елемент групи B такий, що $[a, b] = a^2$. Тоді $g^{-1}bg = b^{-1}a$ або $g^{-1}bg = b^{-1}a^{-1}$. Оскільки $[a, bg] = 1$ і $\left\langle (bg)^2\right\rangle = \langle a\rangle$, то $\langle a, bg\rangle = \langle bg\rangle$ — циклічна 2-група порядку 8, і знову приходимо до групи типу 3 теореми 2.1.

Лему 2.2 доведено.

Теорему 2.1 доведено.

***Наслідок* 2.1.** *Неперіодична локально розв'язна група G, що має недедекіндову локально нільпотентну норму N_G^d розкладних підгруп, є циклічним розширенням цієї норми.*

***Наслідок* 2.2.** *Будь-яка неперіодична локально розв'язна група G, яка містить інволюцію й має недедекіндову локально нільпотентну норму N_G^d розкладних підгруп, містить групу кватерніонів порядку 8.*

Приклад 2.1 із [3] разом із наступними прикладами 2.1, 2.2 підтверджують існування неперіодичних груп, у яких норма N_G^d розкладних підгруп є групою одного з типів теореми 2.1.

***Приклад* 2.1.** $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|a| = 27$, $|b| = \infty$, $b^{-1}ab = a^8$.

У даному випадку G — група типу 2 теореми 2.1. При цьому $G' = \langle a\rangle$, $Z(G) = \left\langle b^6\right\rangle$, усі розкладні абелеві підгрупи групи G є групами вигляду $\left\langle a^{3k}, a^m b^{2n}\right\rangle$, $k \in \{1, 2\}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, і нормальні у підгрупі $\left\langle a, b^2\right\rangle$. Тому $N_G^d = \left\langle a, b^2\right\rangle = \langle a\rangle \leftthreetimes \left\langle b^2\right\rangle$.

***Приклад* 2.2.** $G = (\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle)\langle g\rangle$, $|a| = 4$, $|b| = \infty$, $g^2 = a$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $g^{-1}bg = b^{-1}a^{-1}$.

Маємо групу типу 3 теореми 2.1. Оскільки всі розкладні абелеві підгрупи групи G мішані й нормальні у підгрупі $\langle a, b\rangle$, а елемент g не належить нормалізатору підгрупи $\left\langle a^2\right\rangle \times \langle b\rangle$, то $N_G^d = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$.

Література

1. *Baer R.* Der Kern, eine charakteristische Untergruppe // Comp. Math. – 1934. – **1**. – P. 254 – 283.
2. *Liman F. N., Lukashova T. D.* On the norm of decomposable subgroups in locally finite groups // Ukr. Math. J. – 2015. – **67**, № 4. – P. 542 – 551.
3. *Liman F. N., Lukashova T. D.* On the norm of decomposable subgroups in the non-periodic groups // Ukr. Math. J. – 2016. – **67**, № 12. – P. 1900 – 1912.
4. *Лиман Ф. Н.* Группы, все разложимые подгруппы которых инвариантны // Укр. мат. журн. – 1970. – **22**, № 6. – С. 725 – 733.
5. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. – М.: Мир, 1977. – Т. 2. – 416 с.
6. *Dixon J. D.* Complements of normal subgroups in infinite groups // Proc. London Math. Soc. – 1967. – **17**, № 3. – P. 431 – 446.
7. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.

Одержано 20.09.17