Український математичний вісник
Том 11 **(2014)**, № 1, 15 – 48

Эллиптико-параболическое уравнение и соответствующая задача со свободной границей I: Эллиптическая задача с параметром

Сергей П. Дегтярев

(*Представлена А. Е. Шишковым*)

Аннотация. Рассмотрена эллиптическая задача с параметром, возникающая при рассмотрении широкого класса нелинейных эллиптико-параболических задач и эволюционных эллиптических задач, в частности, эллиптико-параболических и эволюционных эллиптических задач со свободной границей. Доказано существование и коэрцитивные оценки гладкого решения указанной задачи, включая гладкую зависимость решения от параметра.

2010 MSC. 35R35, 35K65.

Ключевые слова и фразы. Эллиптическая задача с параметром, классы Гельдера, гладкое решение, априорная оценка.

1. Введение

Данная работа посвящена изучению разрешимости и получению коэрцитивных априорных оценок решения некоторой эллиптической краевой задачи с параметром t и с правой частью специального вида. При этом задача будет изучаться в некотором специальном классе функций, непрерывных по Гельдеру вместе со своими производными до определенного порядка, включая производную по параметру t и гладкость всех производных по этому параметру. Указанный класс функций описан ниже и очень близок к обычному параболическому анизотропному классу Гельдера — хотя рассматриваемая задача является эллиптической. Необходимость изучения такой задачи вызвана тем, что она естественным образом связана с изучением в классах гладких функций эллиптико-параболических задач вида [1]. Кроме

Статья поступила в редакцию 3.06.2013

ISSN 1810 – 3200.

того, такая задача естественным образом возникает при изучении в классах гладких функций многих других эллиптико-параболических и эволюционных эллиптических задач, в том числе задач со свободной границей. Не ставя своей целью дать обзор результатов и литературы по всем таким задачам, поясним сказанное на простейшей квазилинейной эллиптико-параболической задаче вида [1].

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^N$, $T > 0$, $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$. Пусть, далее, $g(x,t), (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]$, $u_0(x),\ x \in \overline{\Omega},\ f(x,t),\ (x,t) \in \overline{\Omega_T}$ — заданные функции, и пусть заданная функция $c(u),\ u \in \mathbb{R}^1$ — такова, что $c(u) \equiv 0$ при $u \leq 0$ и $c'(u) > 0$ при $u \geq 0$. Рассмотрим в области Ω_T следующую начально-краевую задачу для неизвестной функции $u(x,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}c(u) - \Delta u = 0, \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1.1}$$

$$c(u(x,0)) = c(u_0(x)), \tag{1.2}$$

$$u(x,t) = g(x,t), \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]. \tag{1.3}$$

Задача подобного типа возникает, в частности, в теории фильтрации — см. по этому поводу [1–22] и имеющуюся там библиографию, а также в некоторых других областях. В частности, уравнение (1.1) представляет собой простейший вариант уравнения Ричардса (см., например, [19–22]). Так как в той области, где $u > 0$, уравнение (1.1) является параболическим, а в области, где $u < 0$, оно эллиптично, то задача (1.1)–(1.3) представляет собой эллиптико-параболическую задачу. При этом уравнение (1.1) естественным образом порождает задачу со свободной границей — ключевыми неизвестными в рассматриваемой задаче являются сами области, где $u < 0$ или $u > 0$, а также граница раздела между ними, которая и представляет собой свободную (неизвестную) границу.

В случае одной пространственной переменной, когда Ω представляет собой отрезок прямой, $\Omega = (a,b)$, задача вида (1.1)–(1.3) изучалась в [2–10], где, при определенных предположениях на данные задачи, было получено существование слабого решения, а также существование регулярной функции $x = s(t) \in (a,b)$, разделяющей области $u > 0$ и $u < 0$.

В работе [11] рассматриваемая задача изучалась в случае двумерной фильтрации, когда $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, и при некоторых условиях типа монотонности на данные задачи было установлено, что свободная граница является непрерывной.

В многомерном же случае, когда $\Omega \subset \mathbb{R}^N,\ N \geq 2$, уравнение (1.1) и задача (1.1)–(1.3) в обобщенной постановке рассматривались, в частности, в [1, 12–19], причем в [18, 19] задача рассматривалась в терминах вязких решений и была доказана корректность задачи в такой обобщенной постановке.

Классические решения многомерной задачи (1.1)–(1.3), включающие гладкость свободной границы, рассматривались в работе [23]. При этом в указанной работе решение уравнения (1.1) и неизвестная поверхность раздела изучались в классах гладких функций, являющихся модификациями анизотропных пространств Гельдера. В этих пространствах для всех производных рассматриваемых функций предполагались конечными двойные полунормы вида (1.6). Кроме того, в эллиптической области уравнения (1.1) не доказывалась гладкость производной по времени от решения.

Кроме указанных работ, касающихся задач, подобных задаче (1.1)–(1.3), не претендуя на полноту обзора, отметим также работы [24–33].

Поясним кратко, в чем заключается одна из основных трудностей изучения рассматриваемой задачи в классах гладких функций на примере работы [23]. В данной работе для изучения нелинейной задачи (1.1)–(1.3) был применен, по существу, метод Ньютона решения нелинейных уравнений, подобно [36–38]. Исходным приближенным решением служили некоторые продолжения начальных данных задачи в область $t > 0$. Метод Ньютона требует исследования обратимости производной Фреше нелинейного оператора исходной задачи, то есть исследования некоторой линейной задачи, получающейся линеаризацией исходной задачи на выбранном приближенном решении. Несколько упрощая ситуацию, можно сказать, что в результате линеаризации задачи (1.1)–(1.3), получается некоторая линейная задача сопряжения для неизвестных функций $u^+(x,t)$ и $u^-(x,t)$, причем первая из них удовлетворяет неоднородному параболическому уравнению в одной цилиндрической области, а вторая — неоднородному (и это важное обстоятельство!) эллиптическому уравнению с параметром t в другой цилиндрической области. На общей же границе двух указанных областей выполнены некоторые условия сопряжения, одно из которых, в частности, имеет вид

$$\frac{\partial u^+}{\partial \overrightarrow{n}} - \frac{\partial u^-}{\partial \overrightarrow{n}} = f(x,t), \tag{1.4}$$

где $\overrightarrow{n}$ — нормаль к поверхности сопряжения. Это условие возникает после линеаризации исходной задачи из условия вида (1.4) с $f(x,t) \equiv 0$ на неизвестной границе раздела областей эллиптичности и параболичности. Последнее же, в свою очередь, связано с тем, что уравнение (1.1) является однородным и, следовательно, гладкое его решение должно иметь непрерывный градиент по пространственным переменным — иначе в правой части (1.1) должна появиться дельта-функция, сосредоточенная на поверхности разрыва градиента. Пространство, которому принадлежит $f(x,t)$ в (1.4), существенно зависит от выбора пространств для $u^+(x,t)$ и $u^-(x,t)$. При этом, как показывает изучение задачи, для получения коэрцитивных оценок решения (обратимость упомянутой производной Фреше) этот выбор должен быть таков, чтобы градиенты функций $u^+(x,t)$ и $u^-(x,t)$ по пространственным переменным имели бы одинаковую гладкость по всем переменным (x,t). Однако функция $u^-(x,t)$ удовлетворяет неоднородному эллиптическому уравнению, которое, для своего решения, не только не повышает гладкость правой части по параметру t, но даже не сохраняет эту гладкость для вторых производных решения (это связано с хорошо известным фактом отсутствия обратимости эллиптического оператора из W^2_∞ в L_∞). Ситуацию спасает то обстоятельство, что правая часть эллиптического уравнения для $u^-(x,t)$ имеет специальный вид, связанный с линеаризацией исходной задачи, который, при специальном выборе пространств для функций $u^+(x,t)$ и $u^-(x,t)$, позволяет получить коэрцитивные оценки решения линейной задачи. Если же условия на границе областей эллиптичности и параболичности являются более сложными, чем в (1.4) (как, например, в некоторых задачах со свободной границей), то выбор соответствующих гладких пространств становится еще более сложным.

Целью данной работы является рассмотреть в классах Гельдера эллиптическую задачу с параметром, которая возникает не только при изучении задачи (1.1)–(1.3), но и при изучении в гладких классах функций широкого класса других эллиптико-параболических задач. При этом для соответствующей неизвестной функции $u^-(x,t)$ введен такой класс Гельдера, близкий к обычному параболическому анизотропному пространству Гельдера, который позволяет рассматривать $u^+(x,t)$ в обычном параболическом анизотропном классе Гельдера. Для задачи (1.1)–(1.3) это будет продемонстрировано во второй части данной статьи. Однако, этот же класс функций и результаты данной статьи могут быть использованы в широком классе других эллиптико-параболических задач.

Отметим, что специальный вид правых частей рассматриваемых нами линейных эллиптических уравнений связан с тем простым обстоятельством, что изучаемые линейные задачи получаются после выделения главной линейной части в квазилинейном эллиптическом операторе общего вида. Пусть, например, рассматривается уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,v,\nabla v)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + a(x,v,\nabla v) = f(x),$$

и задано некоторое “приближенное” решение $w(x)$. Вводя новую искомую функцию в виде $u(x)=v(x)-w(x)$, как отклонение неизвестной $v(x)$ от $w(x)$, выделяя в квазилинейном уравнении линейную по $u(x)$ часть и перенося все нелинейности в правую часть уравнения, мы получим уравнение, у которого в правой части находится сумма выражений, линейных по вторым производным, которые и изучаются в данной работе, см. (4.1), (4.36) ниже. Более подробно этот процесс предполагается описать в последующей статье, посвященной нелинейной задаче.

Определим теперь нужные нам пространства гладких функций. Для $l>0$ нецелого $H^l(\overline{\Omega})\equiv C^l(\overline{\Omega})$ означает стандартное пространство функций $u(x)$, непрерывных в $\overline{\Omega}$ по Гельдеру с показателем $\alpha=l-[l]$ вместе со своими частными производными до порядка $[l]$ включительно с нормой $|u|^{(l)}_{\overline{\Omega}}$, $H^{l,l/2}(\overline{\Omega_T})\equiv C^{l,l/2}(\overline{\Omega_T})$ — аналогичное пространство гладких функций $u(x,t)$ с гладкостью до порядка l по переменным x и с гладкостью до порядка $l/2$ по переменной t с нормой $|u|^{(l)}_{\overline{\Omega}_T}$, см. определение этих пространств, например, в [34].

Для произвольной функции $f(x,t)$ и для двух точек (x,t), (y,τ) обозначим

$$\Delta_{x,y}f(x,t)=f(x,t)-f(y,t),\quad \Delta_{t,\tau}f(x,t)=f(x,t)-f(x,\tau)\; — \tag{1.5}$$

разности от функции $f(x,t)$ по переменным x и t, соответственно. Следуя работе [35], введем следующую полунорму для $\alpha,\beta\in(0,1)$ и функции $u(x,t)$:

$$[u]^{(\alpha,\beta)}_{\overline{\Omega}_T}=\sup_{(x,t),(y,\tau)\in\overline{\Omega_T}}\frac{|u(x,t)-u(y,t)-u(x,\tau)+u(y,\tau)|}{|x-y|^{\alpha}\,|t-\tau|^{\beta}} \\ =\sup_{(x,t),(y,\tau)\in\overline{\Omega_T}}\frac{|\Delta_{t,\tau}\Delta_{x,y}u(x,t)|}{|x-y|^{\alpha}\,|t-\tau|^{\beta}}. \tag{1.6}$$

Определим банахово пространство гладких функций $C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega_T})$ как пространство, в котором конечна норма ($\alpha\in(0,1)$):

$$|u|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\overline{\Omega}_T}\equiv|u|_{C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega_T})} \\ \equiv|u|^{(\alpha)}_{\overline{\Omega}_T}+\sum_{|s|=1}|D^s_x u|^{(2+\alpha)}_{\overline{\Omega}_T}+\sum_{|s|=2}|D^s_x u|^{(1+\alpha)}_{\overline{\Omega}_T}+\sum_{|s|=3}|D^s_x u|^{(\alpha)}_{\overline{\Omega}_T} \\ +|u_t|^{(\alpha)}_{\overline{\Omega}_T}+\sum_{|s|=1}|D^s_x u_t|^{(\alpha)}_{\overline{\Omega}_T}+\langle u_t\rangle^{(1/2)}_{t,\overline{\Omega}_T}+[u_t]^{(\alpha,1/2)}_{\overline{\Omega}_T}, \tag{1.7}$$

где

$$\langle v\rangle^{(\gamma)}_{t,\overline{\Omega}_T} \equiv \sup_{(x,t),(x,\overline{t})\in\overline{\Omega}_T} \frac{|v(x,t)-v(x,\overline{t})|}{|t-\overline{t}|^{\gamma}},$$

$$\langle v\rangle^{(\gamma)}_{x,\overline{\Omega}_T} \equiv \sup_{(x,t),(\overline{x},t)\in\overline{\Omega}_T} \frac{|v(x,t)-v(\overline{x},t)|}{|x-\overline{x}|^{\gamma}}, \text{ —}$$

константы Гельдера от функции $v(x,t)$ по переменным t и x, соответственно. Мы используем также обозначение

$$|v|^{(0)}_{\overline{\Omega}_T} = \max_{\overline{\Omega}_T} |v(x,t)|.$$

Отметим, что пространство $C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega_T})$ шире пространства $C^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\overline{\Omega_T})$. Оно отличается от пространства $C^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\overline{\Omega_T})$ тем, что не содержит $\langle u_t\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,\overline{\Omega}_T}$ с показателем $\frac{1+\alpha}{2}$, а содержит только $\langle u_t\rangle^{(1/2)}_{t,\overline{\Omega}_T}$ с показателем $1/2$, но вместо этого дополнительно содержит $[u_t]^{(\alpha,1/2)}_{\overline{\Omega}_T}$ (для функций из пространства $C^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\overline{\Omega_T})$ последняя полунорма также конечна). По поводу свойств пространства $C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega_T})$ см. следующий параграф, здесь же отметим, что важное свойство этого пространства состоит, в частности, в том, что производные по пространственным переменным от функций этого пространства принадлежат в точности тем же классам, что и соответствующие производные от функций из обычного пространства $C^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\overline{\Omega_T})$. Простейшим примером функции из $C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega_T}) \setminus C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega_T})$ может служить функция $u(x,t) = t^{3/2}f(x)$, где $f(x) \in C^{3+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Аналогично, стандартным образом с использованием локальной параметризации определяются поверхности классов $C^{l,l/2}$ и $C^{3+\alpha;3/2,\alpha}$ и соответствующие классы функций, определенных на этих поверхностях.

Кроме того, аналогично [34], мы используем пространства с “нулем внизу”, то есть пространства $C^{l,l/2}_0$ и $C^{3+\alpha;3/2,\alpha}_0$. Эти пространства определяются как собственные подпространства соответствующих пространств, состоящие из функций, обращающихся в ноль при $t=0$ вместе со всеми своими производными по переменной t, допускаемым соответствующим пространством. Важно то обстоятельство, что для таких классов с нулем имеют место следующие неравенства. Если $u,v\in C^{l,l/2}_0$, то

$$\begin{gathered} |u|^{(l')}_{\overline{\Omega}_T} \le CT^{\frac{l-l'}{2}}\, |u|^{(l)}_{\overline{\Omega}_T}, \quad l'<l, \\ |uv|^{(l)}_{\overline{\Omega}_T} \le C\left\{|u|^{([l])}_{\overline{\Omega}_T}\, |v|^{(l)}_{\overline{\Omega}_T} + |u|^{(l)}_{\overline{\Omega}_T}\, |v|^{([l])}_{\overline{\Omega}_T}\right\} \le CT^{\frac{l-[l]}{2}}\, |u|^{(l)}_{\overline{\Omega}_T}\, |v|^{(l)}_{\overline{\Omega}_T}. \end{gathered} \tag{1.8}$$

Отметим, что второе из этих соотношений верно и для пространств $C_0^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega}_T)$. Доказательство этих неравенств можно найти в [34, 39].

Статья построена по следующему плану. В параграфе 2 изучены некоторые свойства пространства $C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega}_T)$, которые используются в последующих параграфах и которые предполагается использовать при изучении нелинейной эллиптико-параболической задачи. Параграф 3 посвящен оценкам типа оценок Шаудера для решения линейной эллиптической краевой задачи (без параметра) с правой частью специального вида. Основным результатом данного параграфа является лемма 3.3. Наконец, в параграфе 4, на основании результатов предыдущих двух параграфов, изучена эллиптическая задача с параметром и с правой частью специального вида. В теоремах 4.1–4.3 данного параграфа получены разрешимость и оценки Шаудера рассматриваемой задачи, включая оценки гладкости решения по параметру, что и является основным результатом данной статьи.

В дальнейшем, Ω — область в $\mathbb{R}^N$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$ класса $C^{3+\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, $\Omega_T = \Omega \times [0,T]$, $\Gamma_T = \Gamma \times [0,T]$.

2. Некоторые свойства пространства $C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega}_T)$

В данном параграфе мы приведем некоторые свойства пространств $C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega}_T)$.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства пространств Гельдера, которые вытекают из работ [40–42]. Пусть $U \subset R^k$ — область в пространстве R^k, $u(x)$ — произвольная функция, определенная в $\overline{U}$, $h \in R^k$,

$$\Delta_h u(x) = u(x+h) - u(x) \quad —$$

оператор взятия разности от функции $u(x)$ с шагом h, m — целое положительное число, $\Delta_h^m u(x)$ — m-я степень этого оператора, то есть разность m-го порядка, l — целое положительное число, $\beta \in (0,1)$. Тогда, как следует из [40, 41], следующие полунормы эквивалентны

$$\langle u\rangle_{x,\overline{U}}^{(\beta)} = \sup_{x,h} \frac{|\Delta_h u(x)|}{|h|^\beta} \sim \sup_{x,h} \frac{|\Delta_h^m u(x)|}{|h|^\beta}. \tag{2.1}$$

Более того, если $u(x) \in C^{l+\beta}(\overline{U})$, то при $m > l+\beta$ следующие полунормы эквивалентны

$$\sum_{|s|=l} \langle D_x^s u\rangle_{x,\overline{U}}^{(\beta)} = \sum_{|s|=l} \sup_{x,h} \frac{|\Delta_h D_x^s u(x)|}{|h|^\beta} \sim \sup_{x,h} \frac{|\Delta_h^m u(x)|}{|h|^{l+\beta}}. \tag{2.2}$$

Кроме, того, норма $|u|_{\overline{U}}^{(l+\beta)}$ в пространстве $C^{l+\beta}(\overline{U})$ эквивалентна норме

$$|u|_{\overline{U}}^{(l+\beta)} \sim \max_{\overline{U}} |u(x)| + \sum_{|s|=l} \langle D_x^s u \rangle_{x,\overline{U}}^{(\beta)} \,. \tag{2.3}$$

Далее, если $0 \leq l'' < l' < l+\beta$, то, как доказано в [42], справедливо следующее интерполяционное неравенство:

$$|u|_{\overline{U}}^{(l')} \leq C \left(|u|_{\overline{U}}^{(l+\beta)} \right)^{\frac{l'-l''}{l+\beta-l''}} \left(|u|_{\overline{U}}^{(l'')} \right)^{\frac{l+\beta-l'}{l+\beta-l''}} . \tag{2.4}$$

Перейдем к рассмотрению пространства $C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega}_T)$. Как уже отмечалось в параграфе 1, пространство $C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega}_T)$ шире пространства $C^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T)$, то есть, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Справедливо непрерывное вложение*

$$C^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T) \subset C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega}_T), \tag{2.5}$$

то есть, для функции $u(x,t) \in C^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T)$

$$|u|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)} \leq C\, |u|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha)} . \tag{2.6}$$

Доказательство. В силу стандартного определения нормы в пространстве $C^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T)$ и определения (1.7) нормы в пространстве $C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega}_T)$, достаточно проверить только выполнение оценки

$$[u_t]_{\overline{\Omega}_T}^{(\alpha,1/2)} \leq C\, |u|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha)} . \tag{2.7}$$

Далее, ввиду определения полунормы $[u_t]_{\overline{\Omega}_T}^{(\alpha,1/2)}$, достаточно показать, что для $\tau > 0$ и для функции

$$v_\tau \equiv \frac{u_t(x,t+\tau) - u_t(x,t)}{\tau^{1/2}}$$

равномерно по $\tau > 0$ конечна константа Гельдера

$$\langle v_\tau \rangle_{x,\overline{\Omega}_T}^{(\alpha)} \leq C\, |u|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha)} . \tag{2.8}$$

Иными словами, учитывая эквивалентность полунорм (2.1), достаточно показать, что если $\overline{h} \in R^N$ и $x, x+\overline{h}, x+2\overline{h} \in \overline{\Omega}$, то

$$\left| \Delta_{\overline{h}}^2 v_\tau \right| = \left| v_\tau(x+2\overline{h}) - 2v_\tau(x+\overline{h}) + v_\tau(x) \right| \leq C\, |u|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha)} \left| \overline{h} \right|^\alpha . \tag{2.9}$$

Действительно, рассмотрим два случая. Пусть сначала $\tau \le |\overline{h}|^2$. Тогда, так как

$$\langle u_t\rangle_{t,\overline{\Omega}_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \le C\,|u|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha)},$$

то

$$\left|\Delta_{\overline{h}}^2 v_\tau\right| \le 4\,|v_\tau|_{\overline{\Omega}_T}^{(0)} \le 4\,\langle u_t\rangle_{t,\overline{\Omega}_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \frac{\tau^{\frac{1+\alpha}{2}}}{\tau^{1/2}} = 4\,\langle u_t\rangle_{t,\overline{\Omega}_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \tau^{\alpha/2} \le 4\,|u|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha)} \left|\overline{h}\right|^{\alpha}.$$

Если же $\tau > \left|\overline{h}\right|^2$, то (в силу (2.2))

$$\begin{aligned}\left|\Delta_{\overline{h}}^2 v_\tau\right| &\le C\,|v_\tau|_{\overline{\Omega}_T}^{(1+\alpha)} \left|\overline{h}\right|^{1+\alpha} = C\,|u_t(x,t+\tau)-u_t(x,t)|_{\overline{\Omega}_T}^{(1+\alpha)} \frac{\left|\overline{h}\right|^{1+\alpha}}{\tau^{1/2}}\\ &\le 2C\,|u_t|_{\overline{\Omega}_T}^{(1+\alpha)} \left|\overline{h}\right|^{\alpha} \le C\,|u|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha)} \left|\overline{h}\right|^{\alpha}.\end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (2.9) доказано, а, следовательно, доказана оценка (2.8), а вместе с ней и (2.7), что завершает доказательство леммы. □

Отметим, далее, что аналогично (2.3), при нецелом l норма $|u|_{\overline{\Omega}_T}^{(l)}$ в пространстве $C^{l,\frac{l}{2}}(\overline{\Omega}_T)$, как показано в [41], эквивалентна норме

$$|u|_{\overline{\Omega}_T}^{(l)} \sim |u|_{\overline{\Omega}_T}^{(0)} + \sum_{|s|=[l]} \langle D_x^s u\rangle_{x,\overline{\Omega}_T}^{(l-[l])} + \langle u_t\rangle_{t,\overline{\Omega}_T}^{(\frac{l}{2}-[\frac{l}{2}])}. \tag{2.10}$$

Аналогичным свойством обладает и пространство $C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega}_T)$.

Лемма 2.2. *Норма $|u|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}$ в пространстве $C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega}_T)$ эквивалентна норме*

$$|u|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)} \sim \|u\|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)} \equiv |u|_{\overline{\Omega}_T}^{(0)} + \sum_{|s|=3} \langle D_x^s u\rangle_{x,\overline{\Omega}_T}^{(\alpha)} + \langle u_t\rangle_{t,\overline{\Omega}_T}^{(\frac{1}{2})} + [u_t]_{\overline{\Omega}_T}^{(\alpha,1/2)}. \tag{2.11}$$

Кроме того,

$$\left[u_{x_i x_j}\right]_{\overline{\Omega}_T}^{(\alpha,1/2)} \le C\|u\|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)} \le C\,|u|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}, \quad i,j=\overline{1,N}. \tag{2.12}$$

Доказательство. Отметим, во-первых, что, ввиду определения нормы $|u|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}$, неравенство

$$\|u\|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)} \le C|u|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}$$

очевидно с константой $C = 1$. Чтобы показать обратное неравенство, необходимо оценить все слагаемые в определении нормы $|u|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}$ через норму $\|u\|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}$. При этом все такие оценки аналогичны, поэтому мы продемонстрируем доказательство на примере одной оценки, которая будет непосредственно использована нами в дальнейшем, и из которой, в частности, следует (2.12). А именно, мы покажем, что

$$|u_{x_i}|_{\overline{\Omega}_T}^{(2+\alpha)} \le C\|u\|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)} \le C\,|u|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}, \quad i = \overline{1,N}, \tag{2.13}$$

Отметим, далее, что, если (2.13) доказано, то из (2.13) следует, что $u_{x_ix_j} \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T)$, причем

$$\left|u_{x_ix_j}\right|_{\overline{\Omega}_T}^{(1+\alpha)} \le C\|u\|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}. \tag{2.14}$$

С учетом (2.14) доказательство (2.12) дословно повторяет доказательство (2.7) в лемме 2.1 с заменой u_t на $u_{x_ix_j}$. Поэтому, достаточно доказать только (2.13). Что же касается (2.13), то, ввиду (2.10), достаточно доказать, что

$$\langle u_{x_it}\rangle_{t,\overline{\Omega}_T}^{(\alpha/2)} \le C\|u\|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}, \quad i = \overline{1,N}, \tag{2.15}$$

$$\left\langle u_{x_ix_jx_k}\right\rangle_{x,\overline{\Omega}_T}^{(\alpha)} \le C\|u\|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}, \quad i,j,k = \overline{1,N}, \tag{2.16}$$

причем последнее очевидно, так как следует непосредственно из определения нормы $\|u\|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}$. Докажем (2.15).

Пусть $\tau > 0$, $\overline{h} \in \mathbb{R}^N$. Для того, чтобы доказать (2.15), достаточно показать, что (ввиду (2.2))

$$\left|\Delta_\tau^2 u_{x_i}\right| \le C\,|u|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}\,\tau^{1+\alpha/2}. \tag{2.17}$$

Чтобы доказать (2.17), рассмотрим функции

$$v^{(\tau)}(x,t) = \Delta_\tau^2 u(x,t) = u(x+2\tau) - 2u(x,t+\tau) + u(x,t),$$

$$w^{(\overline{h})}(x,t) = \frac{\Delta_{\overline{h}}u(x,t)}{\left|\overline{h}\right|^\alpha} = \frac{u(x+\overline{h},t) - u(x,t)}{\left|\overline{h}\right|^\alpha}.$$

Рассмотрим сначала функцию $w^{(\overline{h})}(x,t)$. Очевидно,

$$w_t^{(\overline{h})}(x,t) = \frac{\Delta_{\overline{h}}u_t(x,t)}{\left|\overline{h}\right|^\alpha} = \frac{u_t(x+\overline{h},t) - u_t(x,t)}{\left|\overline{h}\right|^\alpha}.$$

Ввиду того, что конечна величина $[u_t]^{(\alpha,1/2)}_{\overline{\Omega}_T}$, мы имеем равномерно по $\overline{h}$ оценку

$$\left\langle w^{(\overline{h})}_t(x,t)\right\rangle^{(1/2)}_{t,\overline{\Omega}_T} \le C\,[u_t]^{(\alpha,1/2)}_{\overline{\Omega}_T}. \tag{2.18}$$

Из (2.18) следует, что (ввиду (2.2))

$$\left|\Delta^2_\tau w^{(\overline{h})}(x,t)\right| \le C\|u\|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\overline{\Omega}_T}\tau^{1+1/2} \tag{2.19}$$

равномерно по $\overline{h}$. Учитывая определение функции $v^{(\tau)}(x,t)$, (2.19) можно записать как

$$\frac{\left|\Delta_{\overline{h}} v^{(\tau)}(x,t)\right|}{\left|\overline{h}\right|^\alpha} \le C\|u\|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\overline{\Omega}_T}\tau^{1+1/2}. \tag{2.20}$$

Беря в левой части (2.20) sup по x и $\overline{h}$, таким, что $x, x+\overline{h}\in\overline{\Omega}$, получаем

$$\left\langle v^{(\tau)}\right\rangle^{(\alpha)}_{x,\overline{\Omega}_T} \le C\|u\|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\overline{\Omega}_T}\tau^{1+1/2}. \tag{2.21}$$

Кроме того, так как конечна величина $\langle u_t\rangle^{(1/2)}_{t,\overline{\Omega}_T}$, то (ввиду (2.2))

$$\left|v^{(\tau)}\right|^{(0)}_{\overline{\Omega}_T} \le C\|u\|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\overline{\Omega}_T}\tau^{1+1/2}. \tag{2.22}$$

Оценки (2.21) и (2.22) означают, что равномерно по t

$$\left|v^{(\tau)}\right|_{C^\alpha(\overline{\Omega}_T)} \le C\|u\|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\overline{\Omega}_T}\tau^{1+1/2}. \tag{2.23}$$

Возвратимся к доказательству (2.17), которое, ввиду определения $v^{(\tau)}(x,t)$, запишем в виде

$$\left|v^{(\tau)}_{x_i}\right| \le C\|u\|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\overline{\Omega}_T}\tau^{1+\alpha/2}. \tag{2.24}$$

Пусть t и τ фиксированы. Применим к функции $v^{(\tau)}$ по переменным x интерполяционное неравенство (2.4) в виде

$$\left|v^{(\tau)}\right|_{C^1(\overline{\Omega})} \le C\left(\left|v^{(\tau)}\right|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}\right)^{(2+\alpha)/3}\left(\left|v^{(\tau)}\right|_{C^{3+\alpha}(\overline{\Omega})}\right)^{(1-\alpha)/3}, \tag{2.25}$$

Учитывая, что, ввиду (2.3),

$$\left|v^{(\tau)}\right|_{C^{3+\alpha}(\overline{\Omega})} \le 4\|u\|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\overline{\Omega}_T}$$

и учитывая оценку (2.23), из (2.25) получаем, что

$$\left|v^{(\tau)}\right|_{C^1(\overline{\Omega})} \le C\left(\|u\|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}\right)^{(2+\alpha)/3+(1-\alpha)/3}\tau^{((2+\alpha)/3)(1+1/2)}$$
$$= C\|u\|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}\tau^{1+\alpha/2}. \quad (2.26)$$

Отсюда, очевидно, следует оценка (2.24), а вместе с ней оценки (2.17) и (2.15).

Этим мы завершим доказательство леммы. □

3. Некоторые оценки эллиптической краевой задачи с правой частью специального вида

В данном параграфе мы получим оценки решения эллиптической задачи с правой частью специального вида, представляющей собой комбинацию производных по пространственным переменным от функций из класса $C^{3+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Лемма 3.1. *Обозначим полупространство $\mathbb{R}^N_+ = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N \ge 0\}$, и пусть задан радиус $C_1\lambda \le R \le C_2\lambda$, $\lambda \in (0,1)$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^N_+$ следующую задачу для неизвестной функции $u(x)$:*

$$\triangle u(x) = a(x)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad x_N > 0, \quad (3.1)$$

$$u(x)|_{x_N=0} = h(x'), \quad (3.2)$$

где $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ фиксированы, $a(x)$, $h(x')$ и $f(x)$ заданные функции.

Пусть функции $a(x)$, $h(x')$ и $f(x)$ обладают свойствами:

$$\begin{aligned} &a(x) \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^N_+), \quad |D^s a(x)| \le M_0\lambda^{1-|s|}, \\ &f(x) \in C^{3+\alpha}(\mathbb{R}^N_+), \quad h(x') \in C^{3+\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

причем $f(x)$ и $h(x')$ финитны с носителем в полушаре $B^+_R = \mathbb{R}^N_+ \cap \{|x| \le R\}$.

Тогда для единственного решения $u(x)$ задачи (3.1)–(3.2) справедливы оценки:

$$\langle u\rangle^{(\alpha)}_{x,\mathbb{R}^N_+} \le CM_0\lambda\,\langle f\rangle^{(\alpha)}_{x,\mathbb{R}^N_+} + C\,|h|^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^{N-1}}, \quad (3.4)$$

$$\langle u\rangle^{(\alpha)}_{x,\mathbb{R}^N_+} \le C\,|a|^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^N_+}\,\langle f\rangle^{(\alpha)}_{x,\mathbb{R}^N_+} + C\,|h|^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^{N-1}}, \quad (3.5)$$

$$|u|^{(3+\alpha)}_{\mathbb{R}^N_+} \le C\,|a|^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^N_+}\,|f|^{(3+\alpha)}_{\mathbb{R}^N_+} + C\,|h|^{(3+\alpha)}_{\mathbb{R}^{N-1}}. \quad (3.6)$$

Доказательство. Оценка (3.6) хорошо известна (см., например, [43, 44]), поэтому остановимся только на оценках (3.4), (3.5).

Переходя к оценке (3.4), отметим, что, не ограничивая общности, можно считать, что $h(x') \equiv 0$, так как общий случай сводится к указанному заменой неизвестной функции $u = w + h(x')\zeta(x_N)$, где $\zeta \in C^\infty$, $\zeta \equiv 1$ при $x_N \in [0,1]$ и $\zeta \equiv 0$ при $x_N \geq 2$. При этом в правой части (3.1) появляется слагаемое вида $\sum_{i=1}^N (h(x')\zeta(x_N))_{x_i x_i}$, которое имеет тот же вид, что и правая часть (3.1) с $a(x) \equiv 1$. Кроме того, не ограничивая общности, можно считать, что функция $a(x)$ также финитна с носителем в полушаре B_{2R}^+, так как

$$a(x)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = [a(x)\chi_R(x)]\,\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j},$$

где $\chi_R \in C^\infty$, $\chi_R \equiv 1$ на B_R^+ и $\chi_R \equiv 0$ вне B_{2R}^+.

Оценка (3.4), аналогично (3.6), доказывается с использованием явного представления решения $u(x)$ задачи (3.1), (3.2) в виде потенциала

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^N} G(x,y)a(y)\frac{\partial^2 f(y)}{\partial y_i \partial y_j}\,dy, \tag{3.7}$$

где $G(x,y)$ — известная функция Грина задачи Дирихле (3.1), (3.2) для полупространства

$$G(x,y) = C\Bigg\{ \left[\left|x' - y'\right|^2 + (x_N - y_N)^2\right]^{-\frac{N-2}{2}} - \left[\left|x' - y'\right|^2 + (x_N + y_N)^2\right]^{-\frac{N-2}{2}} \Bigg\}. \tag{3.8}$$

Рассмотрим для определенности случай $i = j = N$ в (3.7), так как остальные случаи являются более простыми. Преобразуем интеграл в (3.7) интегрированием по частям по y_N

$$u(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}_+^N} G_{y_N}(x,y)a(y)\frac{\partial f(y)}{\partial y_N}\,dy - \int\limits_{\mathbb{R}_+^N} G(x,y)a_{y_N}(y)\frac{\partial f(y)}{\partial y_N}\,dy, \tag{3.9}$$

где мы учли, что $G(x,y) = 0$ при $y_N = 0$. Представим в интеграле (3.9)

$$\frac{\partial f(y)}{\partial y_N} = \frac{\partial\,[f(y) - f(x)]}{\partial y_N}$$

и еще раз проинтегрируем в (3.9) по частям. В результате получим

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} G_{y_N y_N}(x,y)a(y)\left[f(y)-f(x)\right]\,dy$$
$$+\,2\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} G_{y_N}(x,y)a_{y_N}(y)\left[f(y)-f(x)\right]\,dy$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} G(x,y)a_{y_N y_N}(y)\left[f(y)-f(x)\right]\,dy$$
$$-\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}=\{y_N=0\}} G_{y_N}(x,y)a(y)\left[f(y)-f(x)\right]\,dy'$$
$$\equiv I_1(x)+2I_2(x)+I_3(x)+I_4(x). \quad (3.10)$$

Отметим, что произведенное интегрирование по частям законно, так как все подынтегральные выражения интегрируемы ввиду известной оценки

$$\left|D^r_{x,y}G(x,y)\right| \le C_r\left|x-y\right|^{-(N-2)-|r|}, \qquad (3.11)$$

а также

$$\left|f(y)-f(x)\right| \le \langle f\rangle^{(\alpha)}_{x,\mathbb{R}^N_+}\left|x-y\right|^{\alpha}. \qquad (3.12)$$

Оценки интегралов I_1–I_4 в (3.10) вполне стандартны (см., например, [43, 44]), и главной нашей целью является получение оценки (3.4) с малым параметром λ. Оценка же (3.5) стандартно следует из (3.10). Опишем получение оценки (3.4).

Пусть $x,\overline{x}\in\mathbb{R}^N$. Интегралы I_1 и I_4 имеют тип сингулярных интегралов хорошо известного вида (I_4 — при $x_N=0$). Для них оценка разности $|I_1(x)-I_1(\overline{x})|$ хорошо известна ([43, 44]) и получается разбиением множества интегрирования с отделением особенностей ядер $G_{y_N y_N}(x,y)$, $G_{y_N}(x,y)$. При этом, так как в плотностях этих интегралов присутствует множитель $a(y)$, то, ввиду свойств функции $a(y)$ в (3.4),

$$\left|I_1(x)-I_1(\overline{x})\right|+\left|I_4(x)-I_4(\overline{x})\right| \le CM_0\max_{\mathbb{R}^N_+}\left|a(y)\right|\langle f\rangle^{(\alpha)}_{x,\mathbb{R}^N_+}\left|x-y\right|^{\alpha}$$
$$\le CM_0\lambda\langle f\rangle^{(\alpha)}_{x,\mathbb{R}^N_+}\left|x-y\right|^{\alpha}. \quad (3.13)$$

Получим оценку $|I_2(x)-I_2(\overline{x})|$ с малым множителем λ. Имеем

$$I_2(x)-I_2(\overline{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^N_+}\left[G_{y_N}(x,y)-G_{y_N}(\overline{x},y)\right]a_{y_N}(y)\left[f(y)-f(x)\right]\,dy$$

$$+ [f(\overline{x}) - f(x)] \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} G_{y_N}(\overline{x}, y) a_{y_N}(y)\, dy \equiv A_1 + A_2. \quad (3.14)$$

Для A_2, в силу оценки (3.11), получаем

$$|A_2| \le C M_0 \langle f \rangle^{(\alpha)}_{x,\mathbb{R}^N_+} |x - \overline{x}|^{\alpha} \int\limits_{B^+_{2R}} |x - y|^{-(N-1)}\, dy$$
$$\le C M_0 \langle f \rangle^{(\alpha)}_{x,\mathbb{R}^N_+} |x - \overline{x}|^{\alpha} (CR) \le C\lambda M_0 \langle f \rangle^{(\alpha)}_{x,\mathbb{R}^N_+} |x - \overline{x}|^{\alpha}. \quad (3.15)$$

Для оценки A_1 разобьем множество интегрирования $B^+_{2R} \supseteq \mathrm{supp}(a_{y_N}(y))$ в A_1 на две подобласти (одна из которых может быть пустой)

$$\Omega_1 = \left\{ y \in B^+_{2R} : \frac{1}{2} |x - y| \le |x - \overline{x}| \right\}, \quad (3.16)$$

$$\Omega_2 = \left\{ y \in B^+_{2R} : \frac{1}{2} |x - y| > |x - \overline{x}| \right\}. \quad (3.17)$$

Интеграл в A_1 по Ω_1, который мы обозначим A_{1,Ω_1}, оценим так:

$$|A_{1,\Omega_1}| \le \int\limits_{\Omega_1} \left(|G_{y_N}(x,y)| + |G_{y_N}(\overline{x},y)|\right) |a_{y_N}| \langle f \rangle^{(\alpha)}_{x,\mathbb{R}^N_+} |x - y|^{\alpha}\, dy$$
$$\le M_0 \langle f \rangle^{(\alpha)}_{x,\mathbb{R}^N_+} |x - \overline{x}|^{\alpha} \int\limits_{\Omega_1} \left(|G_{y_N}(x,y)| + |G_{y_N}(\overline{x},y)|\right) dy$$
$$\le M_0 \langle f \rangle^{(\alpha)}_{x,\mathbb{R}^N_+} |x - \overline{x}|^{\alpha} \int\limits_{\Omega_1} \left(|x - y|^{-(N-1)} + |\overline{x} - y|^{-(N-1)} \right) dy$$
$$\le C M_0 \lambda \langle f \rangle^{(\alpha)}_{x,\mathbb{R}^N_+} |x - \overline{x}|^{\alpha}. \quad (3.18)$$

При оценке интеграла в A_1 по множеству Ω_2, который мы обозначим A_{1,Ω_2}, заметим, что на этом множестве величины $|x-y|$, $|\overline{x}-y|$ и $|x_\theta - y|$ эквивалентны , где x_θ — любая точка на отрезке $[x, \overline{x}]$, то есть

$$|x - y| \le C_1 |\overline{x} - y| \le C_2 |x_\theta - y| \le C_3 |x - y|, \quad (3.19)$$

где C_1, C_2 и C_3 — абсолютные константы. Из (3.19) следует, что для любого указанного x_θ

$$|x_\theta - y|^{-(N-1)} \le C |x - y|^{-(N-1)}. \quad (3.20)$$

Применяя теперь для оценки A_{1,Ω_2} теорему о среднем, получаем

$$|A_{1,\Omega_2}| \leq CM_0 \left\langle f \right\rangle_{x,\mathbb{R}_+^N}^{(\alpha)} \int\limits_{\Omega_2} \left(\nabla_x G_{y_N}(x_\theta, y), x - \overline{x}\right) |x-y|^{\alpha} \, dy,$$

причем последний интеграл имеет смысл ввиду (3.11), (3.17) и (3.20). Таким образом, так как на Ω_2 выполнено $|x-\overline{x}| < C|x-y|$,

$$\begin{aligned} |A_{1,\Omega_2}| &\leq CM_0 \left\langle f \right\rangle_{x,\mathbb{R}_+^N}^{(\alpha)} \int\limits_{B_{2R}^+} |x-y|^{-N+\alpha} |x-\overline{x}| \, dy \\ &\leq CM_0 \left\langle f \right\rangle_{x,\mathbb{R}_+^N}^{(\alpha)} |x-\overline{x}|^{\alpha} \int\limits_{B_{2R}^+} |x-y|^{-N+1} \, dy \\ &\leq CM_0 \lambda \left\langle f \right\rangle_{x,\mathbb{R}_+^N}^{(\alpha)} |x-\overline{x}|^{\alpha}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Из оценок (3.15), (3.18), (3.21) следует, что

$$|I_2(x) - I_2(\overline{x})| \leq CM_0 \lambda \left\langle f \right\rangle_{x,\mathbb{R}_+^N}^{(\alpha)} |x-\overline{x}|^{\alpha}. \tag{3.22}$$

Для интеграла I_3 величина $|I_3(x) - I_3(\overline{x})|$ оценивается полностью аналогично. Отличие от только что рассмотренного случая заключается в том, что в I_3 выполнено $|a_{y_N y_N}| \leq M_0/\lambda$, но это компенсируется тем, что ядро имеет на единицу меньшую особенность, чем в I_2. Это дает

$$|I_3(x) - I_3(\overline{x})| \leq CM_0 \lambda \left\langle f \right\rangle_{x,\mathbb{R}_+^N}^{(\alpha)} |x-\overline{x}|^{\alpha}. \tag{3.23}$$

Наконец, из представления (3.10) и из оценок (3.13), (3.22), (3.23) следует оценка (3.4). Из приведенных выше оценок следует также и оценка (3.5). Тем самым, лемма доказана. □

Рассмотрим теперь в полупространстве $\mathbb{R}_+^N$ краевую задачу вида (3.1), (3.2), но с более простой структурой правой части (без вторых производных):

$$\triangle u(x) = a(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + g(x), \quad x_N > 0, \tag{3.24}$$

$$u(x)|_{x_N=0} = 0. \tag{3.25}$$

Лемма 3.2. *Пусть в задаче* (3.24), (3.25) *функции* $a(x)$, $f(x)$ *и* $g(x)$ *финитны с носителями в* B_R^+ *(как и в предыдущей лемме) и*

$$a(x) \in C^1(\mathbb{R}_+^N), \quad f(x) \in C^1(\mathbb{R}_+^N), \quad g(x) \in C(\mathbb{R}_+^N). \tag{3.26}$$

Тогда для любого $\beta \in (0,1)$ существует такая константа C_β (не зависящая от a, f, g), что

$$\langle u\rangle_{x,,\mathbb{R}^N_+}^{(\beta)} \le C_{R,\beta}\left[|a|_{\mathbb{R}^N_+}^{(1)}\,|f|_{\mathbb{R}^N_+}^{(0)} + |g|_{\mathbb{R}^N_+}^{(0)}\right]. \tag{3.27}$$

Эта лемма доказывается в точности по той же схеме, что и предыдущая лемма. При этом, так как правая часть уравнения содержит производные не выше первого порядка, то возникающие потенциалы являются не сингулярными интегралами, а интегралами со слабыми особенностями, откуда и следует утверждение леммы.

Пусть теперь Ω обозначает либо произвольную ограниченную область с границей класса $C^{3+\alpha}$, либо полупространство $\mathbb{R}^N_+$. Рассмотрим в области Ω задачу для неизвестной функции $u(x)$:

$$\triangle u(x) = a_1(x)\frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_i \partial x_j} + a_2(x)\frac{\partial f_2(x)}{\partial x_l} + f_3(x), \tag{3.28}$$

$$u(x)|_{\partial\Omega} = b(x). \tag{3.29}$$

Относительно заданных функций $a_i(x)$, $f_i(x)$ и $b(x)$ мы предполагаем, что

$$\begin{gathered} a_1(x),\ f_2(x) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}), \quad a_2(x),\ f_3(x) \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}), \\ f_1(x) \in C^{3+\alpha}(\overline{\Omega}), \quad b(x) \in C^{3+\alpha}(\partial\Omega) \end{gathered} \tag{3.30}$$

причем в случае полупространства эти функции предполагаются финитными.

Лемма 3.3. *Для решения $u(x)$ задачи* (3.28), (3.29) *справедливы оценки:*

$$|u|_{\Omega}^{(\alpha)} \le C\mathcal{M}_\alpha \equiv C\left(|a_1|_{\Omega}^{(2+\alpha)}\,|f_1|_{\Omega}^{(\alpha)} + |a_2|_{\Omega}^{(1+\alpha)}\,|f_2|_{\Omega}^{(0)} + |f_3|_{\Omega}^{(0)} + |b|_{\partial\Omega}^{(\alpha)}\right), \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned} &|u|_{\Omega}^{(3+\alpha)} \le C\mathcal{M}_{3+\alpha} \\ &\equiv C\left(|a_1|_{\Omega}^{(1+\alpha)}\,|f_1|_{\Omega}^{(3+\alpha)} + |a_2|_{\Omega}^{(1+\alpha)}\,|f_2|_{\Omega}^{(2+\alpha)} + |f_3|_{\Omega}^{(1+\alpha)} + |b|_{\partial\Omega}^{(3+\alpha)}\right). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Доказательство. Отметим, во-первых, что если Ω представляет собой полупространство $\mathbb{R}^N_+$, то утверждение данной леммы, фактически, доказано в леммах 3.1 и 3.2. Поэтому ниже в доказательстве мы считаем Ω ограниченной областью с границей класса $C^{3+\alpha}$.

Оценка (3.32) для оператора Лапласа (как в нашем случае) хорошо известна (см., например, [43, 44]). Поэтому остановимся на оценке (3.31). В доказательстве же (3.31) можно, не ограничивая общности, считать, что $b \equiv 0$ в (3.29), так как общий случай сводится к указанному продолжением функции $b(x)$ с границы $\partial\Omega$ внутрь области Ω до функции $B(x)$ того же класса со свойствами:

$$|B(x)|^{(\alpha)}_{\overline{\Omega}} \le C\,|b|^{(\alpha)}_{\partial\Omega}\,, \quad |B(x)|^{(3+\alpha)}_{\overline{\Omega}} \le C\,|b|^{(3+\alpha)}_{\partial\Omega}\,.$$

Способ такого продолжения указан, например, в [34]. После этого общий случай сводится к случаю $b \equiv 0$ заменой в (3.28), (3.29) неизвестной функции $u(x) = w(x) + B(x)$, причем (3.29) переходит в условие $w|_{\partial\Omega} = 0$, а в правой части уравнения (3.28) появляется слагаемое вида $\sum_1^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} B(x)$, то есть слагаемое такого же типа, как первое слагаемое справа в (3.28).

Доказательство же самой оценки (3.31) проводится в соответствии со стандартной техникой оценок Шаудера (см., например, [44]) умножением уравнения (3.28) на гладкие срезающие функции $\eta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ с носителем малого размера $\lambda > 0$ и последующим локальным распрямлением границы (если $\mathrm{supp}(\eta) \cap \partial\Omega \neq \varnothing$) и использованием лемм 3.1, 3.2. Опишем кратко этот процесс применительно к нашему случаю. Пусть $\mathrm{supp}(\eta) \cap \partial\Omega \neq \varnothing$. Умножая уравнение (3.28) на $\eta(x)$, для функции $v(x) = u(x)\eta(x)$ получаем уравнение

$$\triangle v(x) = (a_1\eta)\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j} + (a_2\eta)\frac{\partial f_2}{\partial x_l} + \eta f_3 + 2\sum_{k=1}^N \eta_{x_k}\frac{\partial u}{\partial x_k} + (\triangle\eta)u.$$

Сделав, с целью локального распрямления границы, соответствующую замену переменных $z = z(x)$ (см., например, [34, гл. IV]), получаем задачу в полупространстве

$$\sum_{i,j=1}^N A_{ij}(z)\frac{\partial^2 v(z)}{\partial z_i \partial z_i} = \sum_{i,j=1}^N \widetilde{a}_{1,ij}(z)\frac{\partial^2 \widetilde{f}_1(z)}{\partial z_i \partial z_i} + \sum_{i=1}^N \widetilde{a}_{2,i}(z)\frac{\partial \widetilde{f}_2(z)}{\partial z_i} + \widetilde{f}_3$$
$$+ \sum_{i=1}^N \alpha_i(z)\frac{\partial u(z)}{\partial z_i} + \alpha(z)u(z), \quad z_N > 0, \quad (3.33)$$

где функции $\widetilde{a}_i$, $\widetilde{f}_i$ строятся по функциям a_i, f_i. При этом, поскольку носитель функции $v(x)$ находился в “малой” окрестности диаметра λ границы $\partial\Omega$ класса $C^{3+\alpha}$, то, ввиду гладкости границы, которая является локально “близкой” к плоскости, полученные коэффициенты оператора в левой части (3.33) близки к коэффициентам оператора Лапласа, то есть (δ_{ij} — символ Кронекера)

$$|A_{ij}(z) - \delta_{ij}| \le C\lambda. \tag{3.34}$$

Запишем (3.33) в виде

$$\begin{aligned}\triangle v(z) = \sum_{i,j=1}^{N} \widetilde{a}_{1,ij}(z)\frac{\partial^2 \widetilde{f}_1(z)}{\partial z_i \partial z_i} + \sum_{i=1}^{N} \widetilde{a}_{2,i}(z)\frac{\partial \widetilde{f}_2(z)}{\partial z_i} + \widetilde{f}_3 \\ + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(z)\frac{\partial u(z)}{\partial z_i} + \alpha(z)u(z) + \sum_{i,j=1}^{N} \left(\delta_{ij} - A_{ij}(z)\right)\frac{\partial^2 v(z)}{\partial z_i \partial z_i}, \\ z_N > 0, \end{aligned} \tag{3.35}$$

$$v(z)|_{z_N=0} = 0.$$

Теперь оценка $\langle v(z)\rangle_z^{\alpha}$ получается применением к (3.35) леммы 3.1 и леммы 3.2. При этом, применяя неравенство (3.4) с λ леммы 3.1 к слагаемым в правой части (3.35) вида

$$\left(\delta_{ij} - A_{ij}(z)\right)\frac{\partial^2 v(z)}{\partial z_i \partial z_i},$$

получаем, в совокупности, оценку

$$\langle v\rangle^{(\alpha)}_{z,\mathbb{R}^N_+} \le C_\lambda \mathcal{M}_\alpha + C_\lambda \left|u\right|^{(0)}_{\Omega} + C\lambda \left\langle v\right\rangle^{(\alpha)}_{z,\mathbb{R}^N_+}. \tag{3.36}$$

Выбирая λ достаточно малым, и перенося последнее слагаемое справа в (3.36) в левую часть, получаем

$$\langle v\rangle^{(\alpha)}_{z,\mathbb{R}^N_+} \le C\mathcal{M}_\alpha + C\left|u\right|^{(0)}_{\Omega}. \tag{3.37}$$

Если же $\mathrm{supp}(\eta) \cap \partial\Omega = \varnothing$, то ситуация только упрощается, так как не требуется локального распрямления границы. Следовательно, стандартным образом, собирая оценки вида (3.37) по всем $\eta(x)$ с носителями, покрывающими всю область $\overline{\Omega}$, получаем оценку

$$|u|^{(\alpha)}_{\Omega} \le C\mathcal{M}_\alpha + C\left|u\right|^{(0)}_{\Omega}. \tag{3.38}$$

Далее, оценка младшей нормы $|u|^{(0)}_{\Omega}$ в (3.38) в терминах $\mathcal{M}_\alpha$ следует из единственности решения задачи (3.28), (3.29). Схема рассуждений при этом также более или менее стандартна (см., например, [45]). Мы приведем здесь доказательство оценки величины $|u|^{(0)}_{\Omega}$ в целях полноты изложения.

Итак, покажем, что существует такая константа C, зависящая только от области Ω, что

$$|u|_{\overline{\Omega}}^{(0)} \le C\mathcal{M}_\alpha. \tag{3.39}$$

Предположим противное. Тогда существует последовательность $\{a_1^{(n)}, f_1^{(n)}, a_2^{(n)}, f_2^{(n)}, f_3^{(n)}\}$ такая, что для соответствующих решений $u^{(n)}$ выполнено

$$|u|_{\overline{\Omega}}^{(0)} \ge n\mathcal{M}_\alpha^{(n)}. \tag{3.40}$$

Заметим, во-первых, что, заменяя функции $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}$ и $f_3^{(n)}$ на $a_1^{(n)}/\mathcal{M}_\alpha^{(n)}$, $a_2^{(n)}/\mathcal{M}_\alpha^{(n)}$ и $f_3^{(n)}/\mathcal{M}_\alpha^{(n)}$, соответственно, (при этом $u^{(n)}$ заменяется на $u^{(n)}/\mathcal{M}_\alpha^{(n)}$), мы можем, не ограничивая общности, считать, что

$$\mathcal{M}_\alpha^{(n)} = 1, \tag{3.41}$$

так что, в силу (3.40),

$$\left|u^{(n)}\right|_{\overline{\Omega}}^{(0)} \ge n. \tag{3.42}$$

Ввиду доказанной оценки (3.38),

$$\left|u^{(n)}\right|_{\overline{\Omega}}^{(\alpha)} \le C\mathcal{M}_\alpha + C\left|u^{(n)}\right|_{\overline{\Omega}}^{(0)} = C(1 + \left|u^{(n)}\right|_{\overline{\Omega}}^{(0)}). \tag{3.43}$$

Рассмотрим теперь функции $v^{(n)}(x) = u^{(n)}(x)/|u^{(n)}|_{\overline{\Omega}}^{(0)}$. Функции $v^{(n)}$, очевидно, удовлетворяют задаче вида (3.28) с заменой $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}$ и $f_3^{(n)}$ на $\widetilde{a}_1^{(n)} = a_1^{(n)}/|u^{(n)}|_{\overline{\Omega}}^{(0)}, \widetilde{a}_2^{(n)} = a_2^{(n)}/|u^{(n)}|_{\overline{\Omega}}^{(0)}$ и $\widetilde{f}_3^{(n)} = f_3^{(n)}/|u^{(n)}|_{\overline{\Omega}}^{(0)}$, соответственно. Для них соответствующие величины $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha$ удовлетворяют неравенству

$$\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha \le \frac{1}{\left|u^{(n)}\right|_{\overline{\Omega}}^{(0)}} \le \frac{1}{n}. \tag{3.44}$$

Кроме того, по построению,

$$\left|v^{(n)}\right|_{\overline{\Omega}}^{(0)} = \left|\frac{u^{(n)}(x)}{|u|_{\overline{\Omega}}^{(0)}}\right|_{\overline{\Omega}}^{(0)} = 1, \tag{3.45}$$

а также, в силу (3.38) и (3.45),

$$\left|v^{(n)}\right|_{\overline{\Omega}}^{(\alpha)} \le C\big(1 + \left|v^{(n)}\right|_{\overline{\Omega}}^{(0)}\big) \le C. \tag{3.46}$$

Пусть $\beta \in (0, \alpha)$. Из (3.46) следует, что, ввиду компактности вложения $C^\alpha(\overline{\Omega}) \subset C^\beta(\overline{\Omega})$ с $\beta < \alpha$, из последовательности $\{v^{(n)}\}$ можно выбрать подпоследовательность (за которой мы сохраняем то же обозначение), сходящуюся в $C^{\beta}(\overline{\Omega})$ к некоторой функции $v(x) \in C^{\beta}(\overline{\Omega})$. При этом, очевидно,

$$v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{3.47}$$

так как все $v^{(n)}$ удовлетворяют условию (3.29). Кроме того, из (3.45) следует, что предельная функция $v(x)$ удовлетворяет соотношению

$$|v(x)|_{\overline{\Omega}}^{(0)} = 1. \tag{3.48}$$

Пусть $\zeta(x) \in C_0^{\infty}(\overline{\Omega})$ и имеет носитель внутри Ω. Умножим уравнение (3.28) для $v^{(n)}(x)$ на ζ и проинтегрируем по частям по области Ω, перебросив все производные на ζ:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} v^{(n)}(x)\triangle\zeta(x)\,dx = \int\limits_{\Omega} \widetilde{a}_1^{(n)} f_1 \frac{\partial^2\zeta(x)}{\partial x_i \partial x_j}\,dx \\ + \int\limits_{\Omega} \left(\widetilde{a}_{1x_i}^{(n)}\zeta_{x_j} + \widetilde{a}_{1x_j}^{(n)}\zeta_{x_i}\right) f_1\,dx + \int\limits_{\Omega} \widetilde{a}_{1x_ix_j}^{(n)}\zeta f_1\,dx - \int\limits_{\Omega} \widetilde{a}_2^{(n)}\zeta_{x_l} f_2\,dx \\ - \int\limits_{\Omega} \widetilde{a}_{2x_l}^{(n)}\zeta f_2\,dx + \int\limits_{\Omega} \zeta\widetilde{f}_3\,dx \equiv I^{(n)}(\zeta).\end{aligned} \tag{3.49}$$

Поскольку $v^{(n)}(x)$ равномерно сходится к $v(x)$, то при $n \to \infty$ левая часть (3.49) сходится к интегралу от $v(x)$:

$$\int\limits_{\Omega} v^{(n)}(x)\triangle\zeta(x)\,dx \to \int\limits_{\Omega} v(x)\triangle\zeta(x)\,dx, \quad n \to \infty. \tag{3.50}$$

С другой стороны,для суммы интегралов $I^{(n)}(\zeta)$ в правой части (3.49) справедлива оценка ($|\Omega|$ — мера области Ω)

$$\left|I^{(n)}(\zeta)\right| \le |\Omega|\,\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha}\,|\zeta|_{\overline{\Omega}}^{(2)} \le \frac{1}{n}\,|\Omega|\,|\zeta|_{\overline{\Omega}}^{(2)}. \tag{3.51}$$

Из (3.50) и (3.51) следует, что для предельной функции $v(x)$ справедливо соотношение

$$\int\limits_{\Omega} v(x)\triangle\zeta(x)\,dx = 0, \quad \forall\zeta \in C_0^{\infty}(\overline{\Omega}).$$

Таким образом, $v(x)$ удовлетворяет в области Ω уравнению

$$\triangle v(x) = 0$$

и одновременно удовлетворяет условию (3.47). Следовательно, $v(x) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$, что противоречит (3.48). Полученное противоречие доказывает неравенство (3.39) с некоторой константой C, зависящей только от области Ω. Тем самым лемма доказана. $\square$

Замечание 3.1. Из доказательства леммы 3.3 следует, что эта лемма справедлива не только для уравнения (3.28) с оператором Лапласа, но и для более общего линейного эллиптического оператора

$$Lu = -\sum_{i,j=1} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u,$$

с достаточно гладкими коэффициентами:

$$a_{ij}(x) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}), \quad a_i(x) \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}), \quad a(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega}),$$

если для этого оператора выполнены условия единственности, например, $a(x) \geq 0$.

Замечание 3.2. Из доказательства леммы 3.3 также следует, что, в случае неограниченной области Ω, оценка (3.38) с младшей нормой $|u|_{\Omega}^{(0)}$ в правой части справедлива и для этого случая.

4. Эллиптическая краевая задача с параметром t и правой частью специального вида

В данном параграфе мы получим разрешимость и оценки решения эллиптической задачи с правой частью специального вида, представляющей собой комбинацию производных по пространственным переменным от функций из класса $C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega}_T)$.

Рассмотрим задачу вида (3.28), (3.29), в которой заданные и неизвестная функции зависят от переменной $t \in [0,T]$ как от параметра:

$$\triangle u(x,t) = a(x,t)\frac{\partial f_1(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f_2(x,t)}{\partial x_k \partial x_l}, \quad x \in \Omega,\ t \in [0,T], \tag{4.1}$$

$$u(x,t) = g(x,t), \quad x \in \partial\Omega, t \in [0,T]. \tag{4.2}$$

Предположим, что

$$a, f_1, f_2 \in C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega}_T), \quad g \in C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\Gamma_T). \tag{4.3}$$

Теорема 4.1. *Пусть выполнено* (4.3). *Тогда решение* $u(x,t)$ *задачи* (4.1), (4.2) *принадлежит классу* $C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega}_T)$ *и для него справедлива оценка*

$$|u|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)} \le C\mathbf{N}_T + C\,|g|_{\Gamma_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}$$
$$\equiv C\,|a|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}\,|f_1|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}\,|f_2|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)} + C\,|g|_{\Gamma_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}. \quad (4.4)$$

Если же $g \in C_0^{3+\alpha',\frac{3+\alpha'}{2}}(\Gamma_T)$ *с* $\alpha' \in (\alpha, 1)$ *,а функция* $a(x,t)$ *и хотя бы одна из функций* $f_1(x,t)$ *и* $f_2(x,t)$ *обращаются в тождественный ноль при* $t = 0$*, то есть*

$$a(x,0) \equiv 0, f_1(x,0) \equiv 0 \text{ (}\textit{или } f_2(x,0) \equiv 0\text{)}, \quad (4.5)$$

то справедлива также оценка

$$|u|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)} \le CT^{\mu}(\mathbf{N}_T + |g|_{\Gamma_T}^{(3+\alpha';3/2,\alpha')}). \quad (4.6)$$

Доказательство. Так как, ввиду (4.3), правая часть (4.1) при каждом $t \in [0,T]$ принадлежит классу $C_x^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$ по переменным x, то, ввиду (3.32),

$$\max_{t\in[0,T]} |u(\cdot,t)|_{\overline{\Omega}}^{(3+\alpha)} \le C\mathbf{N}_T + C\,|g|_{\Gamma_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}. \quad (4.7)$$

Кроме того, если $g \in C_0^{3+\alpha';3/2,\alpha'}(\Gamma_T)$, то

$$|g|_{\Gamma_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)} \le CT^{\mu}\,|g|_{\Gamma_T}^{(3+\alpha';3/2,\alpha')}.$$

Если к тому же $a(x,0) \equiv 0$, то

$$\max_t \left| a(\cdot,t)\frac{\partial f_1(\cdot,t)}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f_2(\cdot,t)}{\partial x_k \partial x_l}\right|_{\overline{\Omega}}^{(1+\alpha)}$$
$$\le \max_t |a(\cdot,t)|_{\overline{\Omega}}^{(1+\alpha)}\,|f_1(\cdot,t)|_{\overline{\Omega}}^{(2+\alpha)}\,|f_2(\cdot,t)|_{\overline{\Omega}}^{(3+\alpha)}$$
$$\le |a|_{\overline{\Omega}_T}^{(1+\alpha)}\,|f_1|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}\,|f_2|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}$$
$$\le CT^{\mu}\,|a|_{\overline{\Omega}_T}^{(1+\alpha')}\,|f_1|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}\,|f_2|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)} \le CT^{\mu}\mathbf{N}_T.$$

Поэтому в этом случае

$$\max_{t\in[0,T]} |u(\cdot,t)|_{\overline{\Omega}}^{(3+\alpha)} \le CT^{\mu}(\mathbf{N}_T + |g|_{\Gamma_T}^{(3+\alpha';3/2,\alpha')}). \quad (4.8)$$

Следовательно, для доказательства (4.4), (4.6), ввиду (2.11), достаточно оценить соответствующую норму решения $u(x,t)$ по переменной t, а именно полунормы $\langle u_t\rangle_{t,\overline{\Omega}_T}^{(1/2)}$ и $[u_t]_{\overline{\Omega}_T}^{(\alpha,1/2)}$.

Пусть $h, \tau > 0$ фиксированы. Для произвольной функции $g(x,t)$ обозначим

$$\Delta_h g = g(x, t+h) - g(x,t), \quad \Delta_\tau g = g(x, t+\tau) - g(x,t),$$

$$\Delta_{h,\tau} g = \Delta_h\left(\Delta_\tau g\right) = g(x, t+h+\tau) - g(x,t+h) - g(x,t+\tau) + g(x,t), \quad -$$

оператор второй разности по t с шагами h и τ,

$$g_h = \frac{\Delta_h g}{h}, \quad g_\tau = \frac{\Delta_\tau g}{\tau^{1/2}}, \quad g_{h,\tau} = \frac{\Delta_{h,\tau} g}{h\tau^{1/2}}. \tag{4.9}$$

Применим к обеим частям уравнения (4.1) оператор второй разности $\Delta_{h,\tau}$ и разделим обе части уравнения на $h\tau^{1/2}$. В результате получим соотношения:

$$\begin{aligned}
\triangle u_{h,\tau} = a_{h,\tau}(x,t)&\frac{\partial f_1(x,t+h+\tau)}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f_2(x,t+h+\tau)}{\partial x_k \partial x_l} \\
&+ a_\tau(x,t)\frac{\partial f_{1,h}(x,t+\tau)}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f_2(x,t+h+\tau)}{\partial x_k \partial x_l} \\
&+ a_\tau(x,t)\frac{\partial f_1(x,t+\tau)}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f_{2,h}(x,t+\tau)}{\partial x_k \partial x_l} \\
&+ a_h(x,t)\frac{\partial f_{1,\tau}(x,t+h)}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f_2(x,t+h+\tau)}{\partial x_k \partial x_l} \\
&+ a(x,t)\frac{\partial f_{1,h,\tau}(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f_2(x,t+h+\tau)}{\partial x_k \partial x_l} \\
&+ a(x,t)\frac{\partial f_{1,\tau}(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f_{2,h}(x,t+\tau)}{\partial x_k \partial x_l} \\
&+ a_h(x,t)\frac{\partial f_1(x,t+h)}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f_{2,\tau}(x,t+h)}{\partial x_k \partial x_l} \\
&+ a(x,t)\frac{\partial f_{1,h}(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f_{2,\tau}(x,t+h)}{\partial x_k \partial x_l} \\
&+ a(x,t)\frac{\partial f_1(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f_{2,h,\tau}(x,t)}{\partial x_k \partial x_l} \equiv \sum_{r=1}^{9} I_r(x,t),
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$u_{h,\tau}(x,t)|_{\partial\Omega} = g_{h,\tau}(x,t). \tag{4.11}$$

Теперь нашей задачей будет оценить величину $|u_{h,\tau}|_\Omega^{(\alpha)}$ в терминах норм правых частей соотношений (4.10), (4.11). Для этого представим функцию $u_{h,\tau}$ в виде суммы

$$u_{h,\tau}(x,t) = \sum_{r=1}^{9} u_{h,\tau}^{(r)} + u_{h,\tau}^{(0)},$$

где $u^{(r)}_{h,\tau}$ является решением задачи

$$\triangle u^{(r)}_{h,\tau} = I_r(x,t), x\in\Omega, \quad u^{(r)}_{h,\tau}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4.12}$$

с соответствующей правой частью I_r из (4.10), а $u^{(0)}_{h,\tau}$ — решение задачи

$$\triangle u^{(0)}_{h,\tau} = 0, x\in\Omega, \quad u^{(0)}_{h,\tau}|_{\partial\Omega} = g_{h,\tau}(x,t).$$

Для оценки $|u^r_{h,\tau}|^{(\alpha)}_{\overline{\Omega}}$ воспользуемся леммой 3.3. При этом, в определенном смысле "старшими" I_r являются те, в которых вторая разность по h, τ находится под знаком второй производной по переменным x. Рассмотрим сначала функцию $u^{(9)}_{h,\tau}$, которая удовлетворяет задаче

$$\triangle u^{(9)}_{h,\tau} = g_1(x,t)\frac{\partial^2 g_2(x,t)}{\partial x_k \partial x_l}, \ x\in\Omega, \quad u^{(9)}_{h,\tau}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4.13}$$

где

$$g_1(x,t)\equiv a(x,t)\frac{\partial f_1(x,t)}{\partial x_i}, \quad g_2(x,t)\equiv f_{2,h,\tau}(x,t).$$

В соответствии с леммой 3.3, равномерно по $t\in[0,T-h-\tau]$ выполнено

$$\begin{aligned}\left|u^{(9)}_{h,\tau}(\cdot,t)\right|^{(\alpha)}_{\overline{\Omega}} &\le C\left|g_1(\cdot,t)\right|^{(2+\alpha)}_{\overline{\Omega}}\left|g_2(\cdot,t)\right|^{(\alpha)}_{\overline{\Omega}} \\ &\le C\left|a(\cdot,t)\right|^{(2+\alpha)}_{\overline{\Omega}}\left|f_1(\cdot,t)\right|^{(3+\alpha)}_{\overline{\Omega}}\left|f_{2,h,\tau}(\cdot,t)\right|^{(\alpha)}_{\overline{\Omega}}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Учитывая, что в соответствии с теоремой о среднем

$$f_{2,h,\tau}(x,t) = \int\limits_0^1 \frac{\Delta_\tau}{\tau^{1/2}}\frac{\partial f_2(x,t+\theta h)}{\partial t}\,d\theta,$$

получаем, что

$$|f_{2,h,\tau}(\cdot,t)|^{(\alpha)}_{\overline{\Omega}} \le \left\langle\frac{\partial f_2}{\partial t}\right\rangle^{(1/2)}_{t,\overline{\Omega}_T} + \left[\frac{\partial f_2}{\partial t}\right]^{(\alpha,1/2)}_{\overline{\Omega}_T} \le |f_2|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\overline{\Omega}_T}. \tag{4.15}$$

Поэтому, из (4.14), (4.14) следует

$$\left|u^{(9)}_{h,\tau}(\cdot,t)\right|^{(\alpha)}_{\overline{\Omega}} \le C\,|a|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\overline{\Omega}_T}\,|f_1|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\overline{\Omega}_T}\,|f_2|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\overline{\Omega}_T}. \tag{4.16}$$

Если же $a(x,t)$ удовлетворяет условию (4.5), то с некоторым $\alpha'\in(\alpha,1)$ для первого множителя справа в (4.14)

$$|a(\cdot,t)|_{\overline{\Omega}}^{(2+\alpha)} = \sum_{|r|\le 2} |D_x^r a(\cdot,t)|_{\overline{\Omega}}^{(\alpha)} \le \sum_{|r|\le 2} |D_x^r a|_{\overline{\Omega}_T}^{(\alpha)}$$
$$\le CT^{\mu} \sum_{|r|\le 2} |D_x^r a|_{\overline{\Omega}_T}^{(\alpha')} \le CT^{\mu}\, |a|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}\,, \quad (4.17)$$

где мы воспользовались тем, что, ввиду (2.13), $a_{x_i x_j} \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T)$. Поэтому, в этом случае, в дополнение к (4.16) имеем

$$\left| u_{h,\tau}^{(9)}(\cdot,t)\right|_{\overline{\Omega}}^{(\alpha)} \le CT^{\mu}\, |a|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}\, |f_1|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}\, |f_2|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}\,. \quad (4.18)$$

Аналогично для функции $u_{h,\tau}^{(5)}$ с правой частью I_5 имеем задачу

$$\triangle u_{h,\tau}^{(5)} = g_1(x,t)\frac{\partial g_2(x,t)}{\partial x_i},\ x\in\Omega, \quad u_{h,\tau}^{(5)}|_{\partial\Omega} = 0,$$

где

$$g_1(x,t) = a(x,t)\frac{\partial^2 f_2(x,t+h+\tau)}{\partial x_k \partial x_l}, \quad g_2(x,t) = f_{1,h,\tau}(x,t).$$

При этом, равномерно по t, h, τ

$$|g_1(\cdot,t)|_{\overline{\Omega}}^{(1+\alpha)} \le |a(\cdot,t)|_{\overline{\Omega}}^{(1+\alpha)} \left|\frac{\partial^2 f_2(\cdot,t+h+\tau)}{\partial x_k \partial x_l}\right|_{\overline{\Omega}}^{(1+\alpha)}$$
$$\le |a|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}\, |f_1|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}\,, \quad (4.19)$$

и, аналогично (4.15),

$$|g_2(\cdot,t)|_{\overline{\Omega}}^{(0)} = |f_{1,h,\tau}(\cdot,t)|_{\overline{\Omega}}^{(0)} \le \left\langle \frac{\partial f_1}{\partial t}\right\rangle_{t,\overline{\Omega}_T}^{(1/2)} \le |f_2|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}\,.$$

Таким образом, в силу леммы 3.3,

$$\left| u_{h,\tau}^{(5)}(\cdot,t)\right|_{\overline{\Omega}}^{(\alpha)} \le C\, |a|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}\, |f_1|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}\, |f_2|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}\,. \quad (4.20)$$

Кроме того, при выполнении (4.5), из первого неравенства в (4.19), полностью аналогично (4.17)

$$|a(\cdot,t)|_{\overline{\Omega}}^{(1+\alpha)} \le |a|_{\overline{\Omega}_T}^{(1+\alpha)} \le CT^{\mu}\, |a|_{\overline{\Omega}_T}^{(1+\alpha')} \le CT^{\mu}\, |a|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}\,.$$

Так что наряду с (4.20) в этом случае получаем

$$\left| u_{h,\tau}^{(5)}(\cdot,t)\right|_{\overline{\Omega}}^{(\alpha)} \le CT^{\mu}\mathbf{N}_T. \quad (4.21)$$

Для функции $u^{(6)}_{h,\tau}$ имеем

$$\triangle u^{(6)}_{h,\tau} = g_1(x,t)\frac{\partial g_2(x,t)}{\partial x_k},\ x\in\Omega, \quad u^{(5)}_{h,\tau}|_{\partial\Omega}=0, \tag{4.22}$$

где

$$g_1(x,t)=a(x,t)\frac{\partial f_{1,\tau}(x,t)}{\partial x_i}, \quad g_2(x,t)=\frac{\partial}{\partial x_l}f_{2,h}(x,t+\tau).$$

При этом, аналогично (4.15),

$$g_2(x,t)=\int\limits_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x_l\partial t}f_2(x,t+\theta h+\tau)\,d\theta,$$

так что, ввиду (2.13),

$$|g_2(\cdot,t)|^{(\alpha)}_{\overline{\Omega}} \le \max_t \left|\frac{\partial^2 f_2(\cdot,t)}{\partial x_l\partial t}\right|^{(\alpha)}_{\overline{\Omega}} \le |f_2|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\overline{\Omega}_T}.$$

Кроме того, ввиду (2.12),

$$\left|\frac{\partial f_{1,\tau}}{\partial x_i}(\cdot,t)\right|^{(1+\alpha)}_{\overline{\Omega}} \le \left\langle\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right\rangle^{(1/2)}_{t,\overline{\Omega}_T} + \sum_{k=1}^N\left\langle\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i\partial x_k}\right\rangle^{(1/2)}_{t,\overline{\Omega}_T} + \sum_{k=1}^N\left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i\partial x_k}\right]^{(\alpha,1/2)}_{\overline{\Omega}_T} \le |f_1|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\overline{\Omega}_T}.$$

Следовательно,

$$\left|u^{(6)}_{h,\tau}(\cdot,t)\right|^{(\alpha)}_{\overline{\Omega}} \le C\,|a|^{(1+\alpha)}_{\overline{\Omega}_T}\,|f_1|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\overline{\Omega}_T}\,|f_2|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\overline{\Omega}_T}. \tag{4.23}$$

Если же для $a(x,t)$ выполнено (4.5), то полностью аналогично предыдущему случаю

$$\left|u^{(6)}_{h,\tau}(\cdot,t)\right|^{(\alpha)}_{\overline{\Omega}} \le CT^{\mu}\mathbf{N}_T. \tag{4.24}$$

Остальные слагаемые $u^{(r)}_{h,\tau}$ рассматриваются полностью аналогично. В итоге, суммирование оценок для всех $u^{(r)}_{h,\tau}$ дает в результате

$$|u_{h,\tau}(\cdot,t)|^{(\alpha)}_{\overline{\Omega}} \le C\mathbf{N}_T + C\,|g|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\Gamma_T}. \tag{4.25}$$

Или, если выполнено условие (4.5), то

$$|u_{h,\tau}(\cdot,t)|^{(\alpha)}_{\overline{\Omega}} \le CT^{\mu}\mathbf{N}_T + CT^{\mu}\,|g|^{(3+\alpha')}_{\Gamma_T}. \tag{4.26}$$

Переходя теперь к пределу в левой части (4.25) (или (4.26)) при $h \to 0$, получаем

$$\left| \frac{\partial u_\tau(\cdot, t)}{\partial t} \right|_{\overline{\Omega}}^{(\alpha)} \leq C\mathbf{N}_T + C\, |g|_{\Gamma_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)} \tag{4.27}$$

или

$$\left| \frac{\partial u_\tau(\cdot, t)}{\partial t} \right|_{\overline{\Omega}}^{(\alpha)} \leq CT^\mu \mathbf{N}_T + CT^\mu\, |g|_{\Gamma_T}^{(3+\alpha')}. \tag{4.28}$$

Отсюда, ввиду определения нормы в $C^\alpha(\overline{\Omega})$ и произвольности $\tau > 0$, следует

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle_{t,\overline{\Omega}_T}^{(1/2)} + \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_{\overline{\Omega}_T}^{(\alpha,1/2)} \leq C\mathbf{N}_T + C\, |g|_{\Gamma_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)} \tag{4.29}$$

или

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle_{t,\overline{\Omega}_T}^{(1/2)} + \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_{\overline{\Omega}_T}^{(\alpha,1/2)} \leq CT^\mu \mathbf{N}_T + CT^\mu\, |g|_{\Gamma_T}^{(3+\alpha')} \tag{4.30}$$

Тем самым оценки (4.4), (4.6) и теорема 4.1 доказаны. □

Теорема 4.2. *Пусть для задачи* (4.1), (4.2) *выполнены условия* (4.3). *Если* $g \in C_0^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\Gamma_T)$, *а из трех функций* a, f_1, f_2 *либо одна принадлежит классу с нулем* $C_0^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega}_T)$, *либо две из этих функций обращаются в ноль при* $t = 0$, *то решение задачи* (4.1), (4.2) $u(x,t)$ *принадлежит пространству с нулем* $C_0^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega}_T)$, *то есть*

$$u(x,0) \equiv \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \equiv 0.$$

Доказательство. Во-первых, если хотя бы одна из трех функций a, f_1, f_2 обращается в ноль при $t = 0$, то, так как $g(x,0) = 0$ на Γ_T, то

$$\triangle u(x,0) = 0,\ x \in \Omega; \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4.31}$$

Следовательно, в условиях теоремы $u(x,0) \equiv 0$.

Далее, покажем, что производная $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$ также удовлетворяет задаче (4.31). Так как $g \in C_0^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\Gamma_T)$, то $\partial g(x,0)/\partial t \equiv 0$, и, следовательно,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \right|_{\partial\Omega} = \frac{\partial g}{\partial t}(x,0) = 0. \tag{4.32}$$

Пусть, далее, как и в теореме 4.1,

$$u_h(x,t) = \frac{u(x,t+h) - u(x,t)}{h}.$$

Тогда функция $u_h(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\triangle u_h = a_h(x,t)\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x,t+h)\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_k \partial x_l}(x,t+h)$$
$$+ a(x,t)\frac{\partial f_{1,h}}{\partial x_i}(x,t)\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_k \partial x_l}(x,t+h) + a(x,t)\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x,t)\frac{\partial^2 f_{2,h}}{\partial x_k \partial x_l}(x,t). \tag{4.33}$$

Пусть $\eta(x) \in C_0^\infty$. Умножая (4.33) на $\eta(x)$, интегрируя по области Ω, дважды применяя интегрирование по частям в левой части и в третьем слагаемом справа в (4.33), а затем переходя к пределу при $h \to 0$, получаем

$$\int\limits_\Omega \triangle\eta(x)\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,dx$$
$$= \int\limits_\Omega \eta(x)\frac{\partial a(x,t)}{\partial t}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x,t)\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_k \partial x_l}(x,t)\,dx$$
$$+ \int\limits_\Omega \eta(x)a(x,t)\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial t}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_k \partial x_l}\,dx$$
$$+ \int\limits_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}\left[\eta(x)a\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right]\frac{\partial f_2}{\partial t}(x,t)\,dx. \tag{4.34}$$

В условиях теоремы из (4.34) следует, что при $t=0$ правая часть (4.34) равна нулю, то есть

$$\int\limits_\Omega \triangle\eta(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\,dx = 0.$$

В силу произвольности $\eta(x)$, из последнего соотношения следует, что

$$\triangle\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\right) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{4.35}$$

Из (4.32), (4.35) и (4.31) следует утверждение теоремы. □

Рассмотрим теперь задачу вида (4.1), (4.2) с несколько более общей, чем в (4.1), правой частью. А именно, рассмотрим задачу для неизвестной функции $u(x,t)$:

$$\triangle u(x,t) = S(x, f_1(x,t), \nabla f_1)\frac{\partial f_2}{\partial x_i}\frac{\partial f_3}{\partial x_j}\frac{\partial^2 f_4}{\partial x_k \partial x_l} \equiv F(x,t), \quad x \in \Omega,\ t \geq 0, \tag{4.36}$$

$$u(x,t)|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4.37}$$

Заданная функция $S(x,z,\xi)$ в (4.36), $z \in [-M,M]$, $\xi \in [-M,M]^N$, $M > 0$, предполагается принадлежащей классу $C^4(\overline{\Omega} \times [-M,M] \times [-M,M]^N)$,

$$\|S(x,z,\xi)\|_{C^4} \le S_0. \tag{4.38}$$

Функции $f_i(x,t)$ удовлетворяют условиям:

$$f_i(x,t) \in C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega}_T), i = \overline{1,4}, \quad |f_1|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\overline{\Omega}_T} \le M, \tag{4.39}$$

причем или хотя бы одна из функций $f_i(x,t)$, $i = 2,3,4$, принадлежит классу с нулем $C_0^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega}_T)$, или хотя бы две из этих функций обращаются в ноль при $t = 0$.

Теорема 4.3. *Пусть выполнены перечисленные выше условия на данные задачи* (4.36), (4.37)*. Тогда эта задача имеет единственное решение из пространства с нулем* $C_0^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega}_T)$*, которое удовлетворяет оценке*

$$|u|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\overline{\Omega}_T} \le C(S_0,M)\prod_{m=2}^{4}|f_m|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\overline{\Omega}_T} \equiv C\mathbf{N}_T. \tag{4.40}$$

Если же хотя бы две из функций $f_i(x,t)$*,* $i = 2,3,4$*, обращаются в ноль при* $t = 0$*, то справедлива также оценка*

$$|u|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\overline{\Omega}_T} \le C(S_0,M)T^{\mu}\prod_{m=2}^{4}|f_m|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\overline{\Omega}_T} \equiv CT^{\mu}\mathbf{N}_T. \tag{4.41}$$

Доказательство. Данная теорема доказывается в точности по той же схеме и с использованием в точности тех же рассуждений и оценок, что и в теореме 4.1, поэтому мы отметим только отличие, связанное с нелинейностью S в правой части уравнения.

Как и в теореме 4.1, поскольку выражение $F(x,t)$ в правой части (4.37) представляет собой произведение четырех величин, то выражение $\frac{\Delta_h}{h}\frac{\Delta_\tau}{\tau^{1/2}}F(x,t)$ можно представить в виде суммы 16 выражений, в которых операторы взятия разности $\frac{\Delta_h}{h}$ и $\frac{\Delta_\tau}{\tau^{1/2}}$ действуют поочередно на каждый из сомножителей

$$F_{h,\tau}(x,t) \equiv \frac{\Delta_h}{h}\frac{\Delta_\tau}{\tau^{1/2}}F(x,t) = \sum_{m=1}^{16} I_m(x,t). \tag{4.42}$$

В соответствии с этим, функция $u_{h,\tau}$ разбивается на сумму функций

$$u_{h,\tau} = \sum_{m=1}^{16} u^{(m)}_{h,\tau},$$

где

$$\triangle u_{h,\tau}^{(m)} = I_m(x,t), x \in \Omega, \quad u_{h,\tau}^{(m)}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4.43}$$

При этом для каждого $m = \overline{1,16}$ величина $|u_{h,\tau}^{(m)}(\cdot,t)|_{\overline{\Omega}}^{(\alpha)}$ оценивается с использованием теоремы 4.1 и оценки (3.31).

При этом те выражения I_m, которые соответствуют случаям, когда один или оба оператора разности $\frac{\Delta_h}{h}$ и $\frac{\Delta_\tau}{\tau^{1/2}}$ действуют на функцию $S(x, f_1(x,t), \nabla f_1(x,t))$, рассматриваются полностью аналогично оценкам теоремы 4.1. Действительно, рассмотрим, например, разность

$$\begin{aligned}
&\frac{\Delta_h}{h} S(x, f_1(x,\theta), \nabla f_1(x,\theta)) \\
&\quad = \frac{1}{h}\left[S(x, f_1(x,\theta+h), \nabla f_1(x,\theta+h)) - S(x, f_1(x,\theta), \nabla f_1(x,\theta))\right] \\
&\qquad\qquad = A_0(x,\theta)\frac{\Delta_h f_1(x,\theta)}{h} + \sum_{i=1}^{N} A_i(x,\theta)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\Delta_h f_1(x,\theta)}{h},
\end{aligned} \tag{4.44}$$

где

$$\begin{aligned}
&A_0(x,\theta) \equiv A_0(x, f_1(x,\theta), \nabla f_1(x,\theta), f_1(x,\theta+h), \nabla f_1(x,\theta+h)) \\
&\quad = \int_0^1 \frac{\partial S}{\partial z}(x, f_1(x,\theta) + \omega\Delta_h f_1(x,\theta), \nabla f_1(x,\theta) + \omega\nabla\left[\Delta_h f_1(x,\theta)\right])d\omega,
\end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}
&A_i(x,\theta) \equiv A_i(x, f_1(x,\theta), \nabla f_1(x,\theta), f_1(x,\theta+h), \nabla f_1(x,\theta+h)) \\
&\quad = \int_0^1 \frac{\partial S}{\partial \xi_i}(x, f_1(x,\theta) + \omega\Delta_h f_1(x,\theta), \nabla f_1(x,\theta) + \omega\nabla\left[\Delta_h f_1(x,\theta)\right])d\omega.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Из (4.45) и (4.46) следует, что функции $A_0(x,z,\xi,y,\eta)$ и $A_i(x,z,\xi,y,\eta)$ ($y \leftrightarrow f_1(x,\theta+h)$, $\eta \leftrightarrow \nabla f_1(x,\theta+h)$) по своим аргументам, принадлежат пространству $A_0(x,z,\xi,y,\eta), A_i(x,z,\xi,y,\eta) \in C^3(\overline{\Omega} \times [-M,M] \times [-M,M]^N \times [-M,M] \times [-M,M]^N)$, и, так как функция f_1 по переменным x принадлежит пространству $C^{3+\alpha}(\overline{\Omega})$, то, как функции переменных x, $A_0, A_i \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Аналогичное представление имеет место и в том случае, когда оба оператора разности падают на нелинейность S. Ввиду таких представлений, доказательство данной теоремы полностью идентично доказательству теоремы 4.1. $\square$

Литература

[1] H. W. Alt, S. Luckhaus, *Quasilinear elliptic-parabolic differential equations* // Math. Z., **183** (1983), No. 1, 311–341.

[2] C. J. Van Duyn, L. A. Peletier, *Nonstationary filtration in partially saturated porous media* // Arch. Rational Mech. Anal., **78** (1982), No. 2, 173–198.

[3] M. Bertsch, J. Hulshof, *Regularity results for an elliptic-parabolic free boundary problem* // Trans. Amer. Math. Soc., **297** (1986), No. 1, 337–350.

[4] E. Di Benedetto, R. Gariepy, *Local behavior of solutions of an elliptic-parabolic equation* // Arch. Rational. Mech. Anal., **97** (1987), No. 1, 1–17.

[5] A. Fasano, M. Primicerio, *Nonstationary filtration in partially saturated porous media* // J. Inst. Math. Appl., **23**, (1979), No. 4, 503–517.

[6] J. Hulshof, *An elliptic-parabolic free boundary problem: continuity of the interface* // Proc. Royal Soc. Edinburg, **106A** (1987), No. 3, 327–339.

[7] J. Hulshof, L. A. Peletier, *An elliptic-parabolic free boundary problem* // Nonlinear Anal: Theory, Method Appl., **10** (1986), No. 12, 1327–1346.

[8] C. J. Van Duyn, *Nonstationary filtration in partially saturated porous media: contunuity of the free boundary* // Arch. Rational Mech. Anal., **79** (1982), No. 3, 261–265.

[9] C. J. Van Duyn, J. Hulshof, *An elliptic-parabolic with a nonlocal boundary condition* // Arch. Rational Mech. Anal., **99** (1987), No. 1, 61–73.

[10] R. Gianni, P. Mannucci, *A free boundary problem for a degenerate parabolic equation: Regularity of the solution* // Adv. Math. Sci. Appl., **9** (1999), No. 1, 557–569.

[11] X. Chen, A. Friedman and T. Kimura, *Nonstationary filtration in partially saturated porous media* // Eur. J. Appl. Math., **5** (1994), No. 3, 405–429.

[12] A. S. Kalashnikov, *On continuous dependence of generalized solutions of the equation of unsteady filtration of a function determining the flow mode* // J. Appl. Math. Mech., **42** (1978), No. 1, 183—185.

[13] B. Andreianov, M. Bendahmane, K. H. Karlsen, S. Ouaro, *Well-posedness results for triply nonlinear degenerate parabolic equations* // J. Differential Equations, **247** (2009), No. 1, 277—302.

[14] I. Borsi, A. Farina, R. Gianni, M. Primicerio, *Continuous dependence on the constitutive functions for a class of problems describing fluid flow in porous media* // Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl., **20** (2009), No. 1, 1—24.

[15] V. Pluschke, F. Weber, *The local solution of a parabolic-elliptic equation with a nonlinear Neumann boundary condition* // Comment. Math. Univ. Carolin., **40** (1999), No. 1, 13—38.

[16] V. Pluschke, *Solution of a quasilinear parabolic-elliptic boundary value problem* // Evolution equations and their applications in physical and life sciences (Bad Herrenalb, 1998), 265—276, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **215** Dekker, New York, 2001.

[17] J. Filo, V. Pluschke, *A free boundary problem in dermal drug delivery* // SIAM J. Math. Anal., **33** (2002), No. 6, 1430—1454.

[18] P. Mannucci, J. L. Vazquez, *Viscosity solutions for elliptic-parabolic problems* // Nonlinear Differ. Equ. Appl., **14** (2007), No. 1–2, 75–90.

[19] I. C. Kim, N. Požár, *Nonlinear Elliptic-Parabolic Problems* // Arch. Rational Mech. Anal., **210** (2013), No. 3, 975–1020.

[20] P. A. Domencio, F. W. Schwartz, *Physical and Chemical Hydrogeology*, Wiley, New-York, 1998.

[21] W. Merz, P. Rybka, *Strong solutions to the Richards equation in the unsaturated zone* // J. Math. Anal. Appl., **371** (2010), 741—749.

[22] L. A. Richards, *Capillary conduction of liquids through porous mediums* // Physics, **1** (1931), 318–333.

[23] B. V. Bazaliy, S. P. Degtyarev, *Classical solutions of many-dimensional elliptic-parabolic free boundary problems* // NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., **16** (2009), No. 4, 421–443.

[24] F. Andreu, N. Igbida, J. M. Mazón, J. Toledo, *A degenerate elliptic-parabolic problem with nonlinear dynamical boundary conditions* // Interfaces Free Bound., **8** (2006), No. 4, 447–479.

[25] F. Andreu, N. Igbida, J. M. Mazón, J. Toledo, *Renormalized solutions for degenerate elliptic-parabolic problems with nonlinear dynamical boundary conditions and L_1-data* // J. Differential Equations, **244** (2008), No. 11, 2764–2803.

[26] A. L. Amadori, J. L. Va'zquez, *Singular free boundary problem from image processing* // Math. Models Methods Appl. Sci., **15** (2005), No. 5, 689–715.

[27] E. Maitre, P. Witomski, *A pseudo-monotonicity adapted to doubly nonlinear elliptic-parabolic equations* // Nonlinear Anal., **50** (2002), No. 2, Ser. A: Theory Methods, 223–250.

[28] J. I. Dı́az, M. B. Lerena, J. F. Padial and J. M. Rakotoson, *An elliptic-parabolic equation with a nonlocal term for the transient regime of a plasma in a stellarator* // J. Differential Equations, **198** (2004), No. 2, 321–355.

[29] R. Gianni, R. Ricci, *An elliptic-parabolic problem in Bingham fluid motion* // Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, **28** (1996), No. 1-2, 247–261.

[30] F. Otto, *L1-contraction and uniqueness for quasilinear elliptic-parabolic equations* // J. Differential Equations, **131** (1996), No. 1, 20–38.

[31] B. Andreianov, P. Wittbold, *Convergence of approximate solutions to an elliptic–parabolic equation without the structure condition* // NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., **19** (2012), No. 6, 695–717.

[32] Chang Shou Lin, Kaising Tso, *On regular solutions of second order degenerate elliptic-parabolic equations* // Comm. Partial Differential Equations, **15** (1990), No. 9, 1329–1360.

[33] Lian Jun An, *The infiltration problem with large constant surface flux in partially saturated porous media*, International workshop on applied differential equations (Beijing, 1985), 177–198, World Sci. Publishing, Singapore, 1986.

[34] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, М.: “Наука”, 1967.

[35] В. А. Солонников, *Разрешимость задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью* // Изв. АН СССР, сер.мат., **41** (1977), No. 6, 1388–1424.

[36] Б. В. Базалий, С. П. Дегтярев, *О классической разрешимости многомерной задачи Стефана при конвективном движении вязкой несжимаемой жидкости* // Мат. сборник, **132(174)** (1987), No. 1, 3–19.

[37] Б. В. Базалий, С. П. Дегтярев, *Разрешимость задачи с неизвестной границей между областями определения параболического и эллиптического уравнений* // Укр. мат. журнал, **41** (1989), No. 10, 1343–1349.

[38] Б. В. Базалий, С. П. Дегтярев, *О задаче Стефана с кинематическим и классическим условием на свободной границе* // Укр. мат. журнал, **44** (1992), No. 2, 155–166.

[39] Г. И. Бижанова, *Исследование разрешимости многомерных двухфазных задач Стефана и нестационарной фильтрации Флорина для параболических уравнений второго порядка в весовых гельдеровских пространствах функций* // Зап. научн. семин. ПОМИ, **213** (1994), 14–47.

[40] К. К. Головкин, *Об эквивалентных нормировках дробных пространств* // Труды МИАН, **66** (1962), 364–383.

[41] В. А. Солонников, *Оценки решений нестационарной линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса* // Труды МИАН, **70** (1964), 213–317.

[42] A. Lunardi, *Analitic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*, Progress in nonlinear differential equations and their applications, **16**, Birkhäuser, 1995.

[43] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, М.: “Наука”, 1973.

[44] Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, М.: “Наука”, 1989.

[45] C. Goulaouic, N. Shimakura, *Regularite holderienne de certains problemes aux limites elliptiques degeneres* // Annali della Scuola Normale Superiore de Pisa, **X** (1983), No. 1, 79–108.

Сведения об авторах

Сергей Петрович Дегтярев

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины,
ул. Розы Люксембург 74,
Донецк, 83114,
Украина
E-Mail: degtyar@i.ua