Український математичний вісник
Том 11 **(2014)**, № 2, 203 – 226

К теории неотрицательных точечных гамильтонианов на плоскости и в пространстве

Юрий Ковалев

(*Представлена М. М. Маламудом*)

Аннотация. Пусть Y — счетное множество точек в $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, таких, что $d_*(Y) := \inf\{|y - y'| : y, y' \in Y,\ y \neq y'\} > 0$. Используя связь между пространством Соболева $W_2^2(\mathbb{R}^d)$ и гильбертовым пространством ℓ_2, доказано, что система дельта-функций Дирака $\{\delta(x - y),\ y \in Y,\ x \in \mathbb{R}^d,\ d = 2, 3\}$ образует базис Рисса в своей линейной оболочке в $W_2^{-2}(\mathbb{R}^d)$. Исследуются свойства расширений Фридрихса и Крейна для неотрицательного симметрического оператора $A_{Y,d} := -\Delta$:

$$\mathrm{dom}(A_{Y,d}) = \Big\{ f \in W_2^2(\mathbb{R}^d) : f(y) = 0,\ y \in Y \Big\}.$$

Единообразным способом построены граничные тройки для операторов $A_{Y,2}^*$ и $A_{Y,3}^*$.

2010 MSC. 35Q51.

Ключевые слова и фразы. Точечные взаимодействия, базис Рисса, расширение Фридрихса, расширение Крейна, трансверсальность, дизъюнктность, граничные тройки, функция Вейля.

1. Введение

В дальнейшем $W_2^{\pm 1}(\mathbb{R}^d)$, $W_2^{\pm 2}(\mathbb{R}^d)$ — пространства Соболева [8]. Тройки $W_2^2(\mathbb{R}^d) \subset L_2(\mathbb{R}^d) \subset W_2^{-2}(\mathbb{R}^d)$ и $W_2^1(\mathbb{R}^d) \subset L_2(\mathbb{R}^d) \subset W_2^{-1}(\mathbb{R}^d)$ — оснащенные гильбертовы пространства [8], т.е. гильбертово пространство $W_2^{-2}(\mathbb{R}^d)$ $(W_2^{-1}(\mathbb{R}^d))$ — множество всех непрерывных антилинейных функционалов на $W_2^2(\mathbb{R}^d)$ (на $W_2^1(\mathbb{R}^d)$). Имеем цепочку гильбертовых пространств

$$W_2^2(\mathbb{R}^d) \subset W_2^1(\mathbb{R}^d) \subset L_2(\mathbb{R}^d) \subset W_2^{-1}(\mathbb{R}^d) \subset W_2^{-2}(\mathbb{R}^d).$$

Статья поступила в редакцию 27.09.2013

ISSN 1810 – 3200.

Пусть $Y = \{y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ — счетное множество точек в $\mathbb{R}^d$ (здесь и далее $d = 2, 3$) таких, что

$$\inf\{|y_j - y_k|,\ j \neq k\} =: d_*(Y) > 0. \tag{1.1}$$

Определим в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ линейный оператор

$$A_{Y,d} := -\Delta, \quad \mathrm{dom}(A_{Y,d}) := \left\{f \in W_2^2(\mathbb{R}^d) : f(y) = 0,\ y \in Y\right\}, \tag{1.2}$$

где Δ — оператор Лапласа в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Оператор $A_{Y,d}$ — основа для исследований гамильтонианов в $\mathbb{R}^d$, соответствующих δ взаимодействиям [4], см. также [3, 5, 7, 9, 13, 16–19, 24, 25, 32, 33]. $A_{Y,d}$ — плотно определенный, замкнутый, симметрический и неотрицательный оператор, являющийся сужением самосопряженного неотрицательного оператора A_d (свободного гамильтониана) [4]:

$$A_d = -\Delta, \quad \mathrm{dom}(A_d) = W_2^2(\mathbb{R}^d). \tag{1.3}$$

Как известно, функция $\delta(\cdot - y)$ принадлежит $W_2^{-2}(\mathbb{R}^d) \setminus W_2^{-1}(\mathbb{R}^d)$ при любом $y \in \mathbb{R}^d$ [4]. Определим следующее подпространство в $W_2^{-2}(\mathbb{R}^d)$:

$$\Phi_{Y,d} := \overline{\mathrm{span}}\,\{\delta(\cdot - y),\ y \in Y\} \quad (\text{замыкание в } W_2^{-2}(\mathbb{R}^d)). \tag{1.4}$$

Тогда $\Phi_{Y,d} \cap L_2(\mathbb{R}^d) = \{0\}$ [4], а область определения оператора $A_{Y,d}$ можно задать так:

$$\mathrm{dom}(A_{Y,d}) = \{f \in W_2^2(\mathbb{R}^d) :\ (f, \varphi) = 0,\ \varphi \in \Phi_{Y,d}\}.$$

В настоящей статье мы доказываем, что при условии (1.1) система дельта-функций

$$\{\delta(\cdot - y),\ y \in Y\}$$

образует базис Рисса в $\Phi_{Y,d}$, $d = 2,\ 3$. Случай $d = 1$ был рассмотрен в нашей статье [27]. М. Маламуд и К. Шмюдген в [31] доказали, что система функций $\left\{\frac{e^{-|x-y|}}{|x-y|}\right\}_{y\in Y}$ образует базис Рисса в дефектном пространстве $\mathfrak{N}_{-1}(A_{Y,3})$. Наш метод отличается от подхода, используемого в [31]. А именно, как и в [27], мы устанавливаем определенную связь между пространствами Соболева $W_2^2(\mathbb{R}^d)$ и гильбертовым пространством $\ell_2(\mathbb{N})$. В статье мы также изучаем свойства неотрицательных самосопряженных расширений Фридрихса $(A_{Y,d})_F$ и Крейна $(A_{Y,d})_K$ оператора $A_{Y,d}$ [29]. В частности, мы показываем, что:

- фридрихсовым расширением оператора $A_{Y,d}$ является оператор A_d,

- операторы A_2 и $(A_{Y,2})_K$ дизъюнктны, но не трансверсальны,
- операторы A_3 и $(A_{Y,3})_K$ дизъюнктны, а их трансверсальность имеет место в том и только в том случае, если линейный оператор, порожденный матрицей
$$M_{jk} = \begin{cases} \frac{1-e^{-|y_k-y_j|}}{|y_k-y_j|}, & j \neq k, \\ 1, & j = k, \end{cases}$$
является ограниченным в $\ell_2(\mathbb{N})$.

В нашей статье единообразным способом построены граничные тройки для операторов $A^*_{Y,2}$ и $A^*_{Y,3}$ и вычислены соответствующие им функции Вейля [11,12]. Наша конструкция граничной тройки для $A^*_{Y,2}$ является новой, а для $A^*_{Y,3}$ аналогична соответствующей конструкции в [31].

2. Неотрицательные самосопряженные расширения и пространство граничных значений

2.1. Расширения Фридрихса и Крейна неотрицательного симметрического оператора

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство и пусть $\mathcal{A}$ — плотно определенный, замкнутый, симметрический и неотрицательный оператор. Обозначим через $\mathcal{A}^*$ сопряженный оператор к $\mathcal{A}$, через $\widetilde{\mathcal{A}}$ — неотрицательное самосопряженное расширение оператора $\mathcal{A}$. Как известно, оператор $\mathcal{A}$ допускает хотя бы одно неотрицательное самосопряженное расширение $\mathcal{A}_F$ — *расширение по Фридрихсу*, которое определяется следующим образом. Известно, что полуторалинейная форма $(\mathcal{A}f, g)$, $f, g \in \operatorname{dom}(\mathcal{A})$, замыкаема в H [22]. Обозначим через $\mathcal{A}[\cdot,\cdot]$ замыкание этой формы и через $\mathcal{D}[\mathcal{A}]$ — область определения этого замыкания. Согласно первой теореме о представлении [22] существует неотрицательный самосопряженный оператор $\mathcal{A}_F$, ассоциированный с $\mathcal{A}[\cdot,\cdot]$, то есть
$$(\mathcal{A}_F h, \psi) = \mathcal{A}[h, \psi], \quad \psi \in \mathcal{D}[\mathcal{A}],\ h \in \operatorname{dom}(\mathcal{A}_F).$$
Очевидно $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_F \subset \mathcal{A}^*$. Отсюда следует, что
$$\operatorname{dom}(\mathcal{A}_F) = \mathcal{D}[\mathcal{A}] \cap \operatorname{dom}(\mathcal{A}^*).$$
По второй теореме о представлении выполняются равенства
$$\mathcal{D}[\mathcal{A}] = \operatorname{dom}(\mathcal{A}_F^{1/2}) \quad \text{и} \quad \mathcal{A}[\phi, \psi] = (\mathcal{A}_F^{1/2}\phi, \mathcal{A}_F^{1/2}\psi), \quad \phi, \psi \in \mathcal{D}[\mathcal{A}].$$

Минимальное неотрицательное самосопряженное расширение оператора $\mathcal{A}$ найдено М. Г. Крейном в [29]. Это расширение мы обозначаем $\mathcal{A}_K$ и называем *расширением Крейна* оператора $\mathcal{A}$. Оператор $\widetilde{\mathcal{A}}$ является неотрицательным самосопряженным расширением оператора $\mathcal{A}$ в том и только том случае, если выполняется неравенство $\mathcal{A}_K \le \widetilde{\mathcal{A}} \le \mathcal{A}_F$ в смысле ассоциированных замкнутых квадратичных форм [29] или, что эквивалентно, для некоторого $a > 0$ (следовательно, для всех $a > 0$):

$$(\mathcal{A}_F + aI)^{-1} \le (\widetilde{\mathcal{A}} + aI)^{-1} \le (\mathcal{A}_K + aI)^{-1}.$$

В этом смысле расширение по Фридрихсу является максимальным, а расширение Крейна, соответственно, минимальным.

2.2. $\mathbf{H_{-2}}$ конструкции

Пусть A — неограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H и пусть

$$H_{+2} \subset H_{+1} \subset H \subset H_{-1} \subset H_{-2} \quad —$$

цепочка оснащенных гильбертовых пространств [8], построенных с помощью оператора A:

$$H_{+2} = \mathrm{dom}(A),\ H_{+1} = \mathrm{dom}(|A|^{1/2})$$

с нормами

$$\|f\|_k = \left(\left\| |A|^{k/2} f \right\|^2 + \|f\|^2 \right)^{1/2}, \quad k = 1, 2.$$

Гильбертовы пространства с “отрицательной” нормой H_{-k} $(k=1,2)$ — это пополнения H по нормам

$$\|f\|_{-k} = \sup_{\|g\|_k = 1} |(f, g)|.$$

Оператор A имеет непрерывное продолжение $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(H_k, H_{k-2})$, $k = 0, 1$ $(H_0 := H)$ и $|\mathbf{A}|^{1/2} \in \mathcal{L}(H_k, H_{k-1})$, $k = -1, 0$ — это продолжение $|A|^{1/2}$. Резольвента $\mathrm{R}_z = (A - zI)^{-1}$, $z \in \rho(A)$ имеет продолжение $\mathbf{R}_z = (\mathbf{A} - zI)^{-1} \in \mathcal{L}(H_{-k}, H_{-k+2})$, $k = 0, 1, 2$.

Пусть Φ — подпространство в H_{-2} такое, что $\Phi \cap H = \{0\}$, тогда оператор $\mathcal{A}$, определенный следующим образом:

$$\mathrm{dom}(\mathcal{A}) = \Big\{ f \in H_{+2} : (f, \varphi) = 0,\ \forall\, \varphi \in \Phi \Big\}, \quad \mathcal{A} = A \restriction \mathrm{dom}(\mathcal{A}), \quad (2.1)$$

является замкнутым, плотно определенным, симметрическим оператором с индексами дефекта, равными $\dim(\Phi)$. Для дефектного пространства $\mathfrak{N}_z(\mathcal{A}) = \ker(\mathcal{A}^* - zI)$ справедлива формула $\mathfrak{N}_z(\mathcal{A}) = \mathbf{R}_z\Phi$. Более того, если A — неотрицательный самосопряженный оператор и $\mathcal{A}$ определен формулами (2.1), то имеет место утверждение [26]

Предложение 2.1. *Оператор A является расширением по Фридрихсу оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\Phi \cap H_{-1} = \{0\}$.*

Напомним, что два самосопряженных расширения $\widetilde{\mathcal{A}}_1$ и $\widetilde{\mathcal{A}}_2$ симметрического оператора $\mathcal{A}$ называются *дизъюнктными*, если $\mathrm{dom}(\widetilde{\mathcal{A}}_1) \cap \mathrm{dom}(\widetilde{\mathcal{A}}_2) = \mathrm{dom}(\mathcal{A})$, и *трансверсальными*, если

$$\mathrm{dom}(\widetilde{\mathcal{A}}_1) + \mathrm{dom}(\widetilde{\mathcal{A}}_2) = \mathrm{dom}(\mathcal{A}^*).$$

Теорема 2.1 ([6, 7, 29, 30]). *Пусть A — неотрицательный самосопряженный оператор и пусть оператор $\mathcal{A}$ задан формулами* (2.1). *Предположим, что A является фридрихсовым расширением оператора $\mathcal{A}$.*

1. *Следующие условия эквивалентны:*

   (*a*) *расширение Крейна $\mathcal{A}_K$ оператора $\mathcal{A}$ и оператор A трансверсальны;*

   (*b*) $A^{1/2}H_{+1} \supset \mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A})$*;*

   (*c*) $A^{1/2}H_{+1} \supset (\mathbf{A}^2 + I)^{-1}\Phi$*;*

   (*d*) $\mathbf{A}^{1/2}H_{-1} \supset \Phi$*.*

2. *Следующие условия эквивалентны:*

   (*a*) *расширение Крейна $\mathcal{A}_K$ оператора $\mathcal{A}$ и оператор A дизъюнктны;*

   (*b*) $A^{1/2}H_{+1} \cap \mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A})$ *плотно в* $\mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A})$ *по норме* H*;*

   (*c*) $A^{1/2}H_{+1} \cap (\mathbf{A}^2 + I)^{-1}\Phi$ *плотно в* $(\mathbf{A}^2 + I)^{-1}\Phi$ *по норме* H_{+1}*;*

   (*d*) $\mathbf{A}^{1/2}H_{-1} \cap \Phi$ *плотно в* Φ *по норме* H_{-2}*.*

2.3. Граничные тройки и функции Вейля

Пусть $\mathcal{A}$ — замкнутый, плотно определенный, симметрический оператор в $\mathfrak{H}$ с равными индексами дефекта. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $G, \Gamma : \mathrm{dom}(\mathcal{A}^*) \to \mathcal{H}$ — линейные отображения. Тройка $\Pi = \{\mathcal{H}, G, \Gamma\}$ называется *граничной тройкой для сопряженного оператора* $\mathcal{A}^*$ [10, 20, 23], если выполняется тождество Грина

$$(\mathcal{A}^*x, y) - (x, \mathcal{A}^*y) = (\Gamma x, Gy)_{\mathcal{H}} - (Gx, \Gamma y)_{\mathcal{H}}, \quad \forall\, x, y \in \mathrm{dom}(\mathcal{A}^*), \quad (2.2)$$

и отображение $\mathbf{\Gamma} : x \mapsto \{Gx, \Gamma x\}$, $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{A}^*)$ является сюрьекцией $\mathrm{dom}(\mathcal{A}^*) \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. С граничной тройкой Π ассоциированы два самосопряженных оператора [11]:

$$\widetilde{\mathcal{A}}_0 := \mathcal{A}^* \upharpoonright \ker(G) \quad \text{и} \quad \widetilde{\mathcal{A}}_1 := \mathcal{A}^* \upharpoonright \ker(\Gamma).$$

Определение 2.1 ([11]). Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, G, \Gamma\}$ — граничная тройка для $\mathcal{A}^*$, тогда операторно-значные функции $\gamma(z) : \rho(\mathcal{A}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathfrak{H})$ и $M(z) : \rho(\mathcal{A}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$

$$\gamma(z) := (G \upharpoonright \mathfrak{N}_z)^{-1}, \quad M(z) := \Gamma\gamma(z), \quad z \in \rho(\mathcal{A}), \tag{2.3}$$

называются γ-полем и функцией Вейля, соответственно.

Теорема 2.2 ([12]). *Пусть $\mathcal{A}$ — это замкнутый, плотно определенный, неотрицательный, симметрический оператор в $\mathfrak{H}$ и пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, G, \Gamma\}$ — это граничная тройка для $\mathcal{A}^*$ такая, что $\widetilde{\mathcal{A}}_0 \geq 0$, и $M(z)$ — соответствующая функция Вейля. Тогда*

1. *Оператор $\mathcal{A}$ имеет не единственное самосопряженное расширение в том и только в том случае, если*

$$\mathcal{D} := \left\{h \in \mathcal{H} : \lim_{x \uparrow 0} (M(x)h, h)_{\mathcal{H}} < \infty\right\} \neq \{0\},$$

и квадратичная форма

$$\tau[h] := \lim_{x \uparrow 0} (M(x)h, h)_{\mathcal{H}}, \quad \mathrm{dom}(\tau) = \mathcal{D}$$

ограничена снизу. Ассоциированное неотрицательное самосопряженное линейное отношение $M(0)$ — это сильный резольвентный предел $M(x)$ при $x \to -0$.

2. *Если $\widetilde{\mathcal{A}}_0 = \mathcal{A}_F$, то $\mathcal{A}_F$ и $\mathcal{A}_K$ дизъюнктны в том и только в том случае, если $M(0)$ плотно определенный оператор в $\mathcal{H}$, и трансверсальны в том и только в том случае, если $M(0)$ ограниченый оператор в $\mathcal{H}$.*

3. *Если $\widetilde{\mathcal{A}}_0 = \mathcal{A}_F$, то отображение*

$$\widetilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A}_\Theta \to \Theta := \mathbf{\Gamma}(\mathrm{dom}(\widetilde{\mathcal{A}})) = \{(Gf, \Gamma f) : \ f \in \mathrm{dom}(\widetilde{\mathcal{A}})\}$$

устанавливает взаимнооднозначное соответствие между множеством всех собственных неотрицательных самосопряженных расширений оператора $\mathcal{A}$ и множеством всех самосопряженных линейных отношений Θ в $\mathcal{H}$ таких, что $M(0) \leq \Theta$.

3. Базис Рисса

Напомним [15], что счетное множество векторов $\{e_j\}$ образует *базис Рисса* в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, если

$$\overline{\operatorname{span}}\,\{e_j\} = \mathfrak{H}$$

и существуют две положительные константы c_1 и c_2 такие, что для каждого натурального n и каждого набора комплексных чисел $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ выполняется неравенство

$$c_2 \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \leq \Big\| \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \Big\|_{\mathfrak{H}}^2 \leq c_1 \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2.$$

Поскольку $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ образует базис Рисса в $\mathfrak{H}$, каждый $f \in \mathfrak{H}$ имеет разложение $f = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j e_j$ такое, что $\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_j|^2 < \infty$, и наоборот, если $\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_j|^2 < \infty$, то ряд $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j e_j$ сходится в $\mathfrak{H}$.

Оператор A_d, заданный формулами (1.3) — неотрицательный и самосопряженный в $H = L_2(\mathbb{R}^d)$. Положим

$$H_{+2} = \operatorname{dom}(A_d) = W_2^2(\mathbb{R}^d), \quad H_{+1} = \operatorname{dom}(A_d^{1/2}) = W_2^1(\mathbb{R}^d),$$
$$H_{-1} = W_2^{-1}(\mathbb{R}^d), \quad H_{-2} = W_2^{-2}(\mathbb{R}^d), \quad d = 2, 3,$$
$$\|f\|_k := \|f\|_{H_k}, \quad f \in H_k,\ k = \pm 1, \pm 2.$$

Мы докажем, что система дельта-функций $\{\delta(\cdot - y_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ образует базис Рисса подпространства $\Phi_{Y,d}$. Сначала мы установим определенную связь между $W_2^2(\mathbb{R}^d)$ и ℓ_2, как и в [27] для случая $d = 1$.

Предложение 3.1. *Пусть Y удовлетворяет условию* (1.1) *и пусть $\{a_j,\ j \in \mathbb{N}\} \in \ell_2(\mathbb{N})$, тогда существует функция $f(x) \in W_2^2(\mathbb{R}^d)$, $d = 2, 3$, такая, что $\|f\|_2 = 1$ и $f(y_j) = A \cdot a_j,\ \forall\, j \in \mathbb{N},\ A = \mathrm{const}$.*

Доказательство. Пусть

$$g(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j g_j(x),$$

где $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$ и

$$g_j(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{|x-y_j|^2}{|x-y_j|^2-\alpha^2}\right), & |x-y_j| < \alpha < d_*(Y)/2, \\ 0, & |x-y_j| \geq \alpha. \end{cases}$$

Поскольку

$$\|g_j\|_2 = \sqrt{\int\limits_{|x|<\alpha} \left[e^{\frac{2|x|^2}{|x|^2-\alpha^2}} + \left|\Delta e^{\frac{|x|^2}{|x|^2-\alpha^2}}\right|^2 \right] dx} =: \gamma(\alpha) < \infty,$$

то $\|g(x)\|_2 = \gamma(\alpha)\|a\|$ и $g(y_j) = a_j$, $\forall\, j \in \mathbb{N}$.

Положим $f(x) := \frac{g(x)}{\|a\|\gamma(\alpha)}$, тогда $\|f\|_2 = 1$ и $f(y_j) = \frac{a_j}{\gamma(\alpha)\|a\|}$, $\forall\, j \in \mathbb{N}$. $\square$

Предложение 3.2. *При условии* (1.1) *система дельта-функций* $\{\delta(x - y_j),\ x \in \mathbb{R}^d\}_{j\in\mathbb{N}}$ *образует базис Рисса подпространства* $\Phi_{Y,d}$, $d = 2, 3$.

Доказательство. Пусть $\{a_j,\ j \in \mathbb{N}\} \in \ell_2(\mathbb{N})$ и $f = \sum_{j=1}^{n} a_j\delta(\cdot - y_j)$, тогда

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} a_j\delta(\cdot - y_j) \Big\|_{-2}^{2} = \sup_{\|g\|_2=1} |(f, g)|^2 = \sup_{\|g\|_2=1} \Big| \sum_{j=1}^{n} a_j g(y_j) \Big|^2 .$$

Из предложения 3.1 следует, что существует такая функция $g(x) \in W_2^2(\mathbb{R}^d)$, что $g(y_j) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \frac{\overline{a_j}}{\|a\|}$, $\forall\, j \in \mathbb{N}$ и $\|g\|_2 = 1$. Тогда

$$\sup_{\|g\|_2=1} \Big| \sum_{j=1}^{n} a_j g(y_j) \Big|^2 \geq \Big| \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{1}{\gamma(\alpha)} \frac{\overline{a_j}}{\|a\|} \Big|^2 = \frac{1}{\gamma^2(\alpha)} \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 .$$

С другой стороны

$$\sup_{\|g\|_2=1} \Big| \sum_{j=1}^{n} a_j g(y_j) \Big|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \sup_{\|g\|_2=1} \sum_{j=1}^{n} |g(y_j)|^2 .$$

Если $g \in W_2^2(\mathbb{R}^d)$, то $\vec{g} := \{g(y_j),\ j \in \mathbb{N}\} \subset \ell_2(\mathbb{N})$, см. [4, с. 213,398].

Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ с один раз кусочно непрерывно дифференцируемой границей Γ, тогда согласно теореме вложения [8] при $0 \leq k < l - d/p$ пространство $W_p^l(G)$ непрерывно вложено в $C^k(G \cup \Gamma)$ и выполняется неравенство

$$\|f\|_{C^k(G\cup\Gamma)} \leq c\|f\|_{W_p^l(G)}, \quad c > 0,\ f \in W_p^l(G).$$

Пусть $B(y, r)$ — шар с центром в точке $y \in \mathbb{R}^d$ и радиусом $0 < r < d_*(Y)/2$. Поскольку $l = p = 2$, то $l - d/p = 0,5$ при $d = 3$ и $l - d/p = 1$ при $d = 2$, тогда $k = 0$, $|g(y_j)| \leq \|g\|_{C(B(y_j,r))} \leq c_1\|g\|_{W_2^2(B(y_j,r))}$ и

$$\begin{aligned}\sup_{\|g\|_2=1} \sum_{j=1}^{n} |g(y_j)|^2 &\leq \sup_{\|g\|_2=1} \sum_{j=1}^{n} \|g\|^2_{C(B(y_j,r))} \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} c_1^2 \|g\|^2_{W_2^2(B(y_j,r))} \leq c_1^2\|g\|^2_{W_2^2(\mathbb{R}^d)} = c_1^2.\end{aligned}$$

Таким образом, при $n \to \infty$ мы получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \delta(\cdot - y_j) \in \Phi_{Y,d}$$

и

$$c_2^2 \sum_{j\in\mathbb{N}} |a_j|^2 \le \Big\| \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \delta(\cdot - y_j) \Big\|_{-2}^2 \le c_1^2 \sum_{j\in\mathbb{N}} |a_j|^2.$$

$\square$

Обозначим через $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d, dx) \to L^2(\mathbb{R}^d, dp)$ преобразование Фурье:

$$\mathcal{F}f = \widehat{f}(p) = \lim_{r\to\infty} (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{|x|<r} f(x) e^{-ixp} dx.$$

Тогда $\widehat{H} = L_2(\mathbb{R}^d, dp)$. Пусть $\widehat{A} = \mathcal{F} A \mathcal{F}^{-1}$. Оператор $\widehat{A}$ действует в $\widehat{H}$ и унитарно эквивалентен оператору A. Пусть $\widehat{H}_k := \mathcal{F} H_k$, $k = \pm 1, \pm 2$, $\widehat{\Phi}_{Y,d} = \mathcal{F}\Phi_{Y,d}$. Определим также симметрический оператор $\widehat{A}_{Y,d} := \mathcal{F} A_{Y,d} \mathcal{F}^{-1}$. Имеем

$$\operatorname{dom}(\widehat{A}^{k/2}) = \widehat{H}_k = \left\{ \widehat{f} \in L_2(\mathbb{R}^d, dp) : \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(p)|^2 (|p|^{2k} + 1)\, dp < \infty \right\},$$

$$(\widehat{A}^{k/2} \widehat{f})(p) = |p|^k \widehat{f}(p),$$

$$\widehat{H}_{-k} = \left\{ \widehat{f}(p) : \ \frac{\widehat{f}(p)}{|p|^{2k}+1} \in \widehat{H}_k \right\}, \quad \|\widehat{f}(p)\|_{-k}^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{|\widehat{f}(p)|^2}{|p|^{2k}+1}\, dp,$$

$$\operatorname{dom}(\widehat{A}_{Y,d}) = \left\{ \widehat{f} \in \widehat{H}_{+2} : \int\limits_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(p) e^{ipy} = 0, \ y \in Y \right\},$$

$$(\widehat{A}_{Y,d} \widehat{f})(p) = |p|^2 \widehat{f}(p),$$

$$\widehat{\Phi}_{Y,d} = \mathcal{F}\Phi_{Y,d} = \overline{\operatorname{span}} \{ e^{-ipy}, \ y \in Y \} \ \text{ замыкание в } \widehat{H}_{-2},$$

$$\widehat{\mathfrak{N}}_z(\widehat{A}_{Y,d}) = \overline{\operatorname{span}} \left\{ \frac{e^{-ipy}}{|p|^2 - z}, \ y \in Y \right\}, \ z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+, \ k = 1, 2.$$

Предложение 3.3. *Системы функций* $\{e^{-ipy_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\left\{\frac{e^{-ipy_j}}{|p|^2+1}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ *и* $\left\{\frac{e^{-ipy_j}}{(|p|^2+1)^2}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ *образуют базисы Рисса подпространств* $\widehat{\Phi}_{Y,d}$, $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_{Y,d})$ *и* $(\widehat{\mathbf{A}}_d + I)^{-1} \widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_{Y,d})$, *соответственно.*

Доказательство. Поскольку оператор $\mathcal{F}$ унитарно отображает H_{-2} на $\widehat{H}_{-2}$, то по предложению 3.2 система $\{e^{-ipy_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ образует базис Рисса подпространства $\widehat{\Phi}_{Y,d}$. Пусть $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_{Y,d}) = \ker(\widehat{A}^*_{Y,d} + I)$, тогда

$$\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_{Y,d}) = (\widehat{\mathbf{A}}_d + I)^{-1}\widehat{\Phi}_{Y,d}$$

и $\bigl\{\frac{e^{-ipy_j}}{|p|^2+1}\bigr\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\bigl\{\frac{e^{-ipy_j}}{(|p|^2+1)^2}\bigr\}_{j\in\mathbb{N}}$ образуют базисы Рисса подпространств $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_{Y,d}) \subset \widehat{H}$ и $(\widehat{\mathbf{A}}_d + I)^{-1}\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_{Y,d})$, соответственно. $\square$

Предложение 3.4. *Пусть $A_{Y,2}$ и $A_{Y,3}$ — операторы, определенные формулами* (1.2), *и пусть Y удовлетворяет условию* (1.1). *Тогда*

$$\begin{gathered}\mathfrak{N}_z(A_{Y,3}) = \overline{\operatorname{span}}\Bigl\{\varphi^{(3)}_{k,z}(x) := \frac{e^{i\sqrt{z}|x-y_k|}}{|x-y_k|},\ k\in\mathbb{N}\Bigr\},\\ (-\Delta - zI)^{-1}\mathfrak{N}_z(A_{Y,3}) = \overline{\operatorname{span}}\Bigl\{\tau^{(3)}_{k,z}(x) := \frac{ie^{i\sqrt{z}|x-y_k|}}{2\sqrt{z}},\ k\in\mathbb{N}\Bigr\},\\ z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty),\quad \operatorname{Im}\sqrt{z}\ge 0,\end{gathered} \tag{3.1}$$

и

$$\begin{gathered}\mathfrak{N}_z(A_{Y,2}) = \overline{\operatorname{span}}\Bigl\{\varphi^{(2)}_{k,z}(x) := \frac{\pi i}{2}H^{(1)}_0(\sqrt{z}|x-y_k|),\ k\in\mathbb{N}\Bigr\},\\ (-\Delta - zI)^{-1}\mathfrak{N}_z(A_{Y,2})\\ = \overline{\operatorname{span}}\Bigl\{\tau^{(2)}_{k,z}(x) := \frac{\pi|x-y_k|}{4i\sqrt{z}}H^{(1)}_1(\sqrt{z}|x-y_k|), k\in\mathbb{N}\Bigr\},\\ z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty),\quad \operatorname{Im}\sqrt{z}\ge 0,\end{gathered} \tag{3.2}$$

где $H^{(1)}_0(z)$, $H^{(1)}_1(z)$ — функции Ханкеля [2].

Доказательство. По предложению 3.3 системы функций $\{e^{-ipy_j}\}$, $\{\frac{e^{-ipy_j}}{|p|^2-z}\}$ и $\{\frac{e^{-ipy_j}}{(|p|^2-z)^2}\}$, $j\in\mathbb{N}$, $z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$, $\operatorname{Im}\sqrt{z}\ge 0$, образуют базисы Рисса подпространств $\widehat{\Phi}_{Y,d}$, $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_{Y,d})$ и $(-\widehat{\Delta} + I)^{-1}\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_{Y,d})$, соответственно. Применяя обратное преобразование Фурье, мы получим (3.1) и (3.2) (см. [4]). $\square$

Замечание 3.1. В [31, теорема 3.8] доказано, что условие (1.1) является необходимым, чтобы системы $\{\varphi^{(3)}_{k,z}(x)\}$ и $\{\varphi^{(2)}_{k,z}(x)\}$ были базисами в $\mathfrak{N}_z(A_{Y,3})$ и $\mathfrak{N}_z(A_{Y,2})$, соответственно.

Замечание 3.2. Далее, мы будем использовать следующие обозначения (для случая $z=-1$):

$$\varphi^{(d)}_k(x) := \varphi^{(d)}_{k,-1}(x) \quad \text{и} \quad \tau^{(d)}_k(x) := \tau^{(d)}_{k,-1}(x). \tag{3.3}$$

Лемма 3.1. *Пусть функции* $\varphi_j^{(d)}(\cdot)$ *и* $\tau_j^{(d)}(\cdot)$ *заданы формулами* (3.3) *и пусть*

$$L_d := \left(\tau_j^{(d)}(y_k)\right)_{k,j\in\mathbb{N}}, \tag{3.4}$$

$$K_d := \begin{pmatrix} 0 & \dots & \varphi_j^{(d)}(y_k) & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \\ \varphi_k^{(d)}(y_j) & \dots & 0 & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}_{k,j\in\mathbb{N}}. \tag{3.5}$$

Тогда матрицы L_d *и* K_d *определяют ограниченные самосопряженные операторы в* ℓ_2.

Доказательство. Резольвента $(-\Delta - zI)^{-1}$ яляется интегральным оператором с ядром [4]

$$G_z^{(3)}(x) = \frac{e^{i\sqrt{z}|x|}}{4\pi|x|}, \quad x \neq 0,\ x \in \mathbb{R}^3,$$

и

$$G_z^{(2)}(x) = \begin{cases} \frac{i}{4}H_0^{(1)}(\sqrt{z}|x|), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Поскольку $(-\Delta + I)^{-1}\varphi_j^{(d)}(x) = \tau_j^{(d)}(x)$, то $\tau_j^{(d)}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} G_{-1}^{(d)}(x - t)\varphi_j^{(d)}(t)\,dt$, а значит

$$\tau_j^{(3)}(y_k) = \frac{1}{2}e^{-|y_k-y_j|} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-|y_k-t|}}{|y_k-t|}\frac{e^{-|y_j-t|}}{|y_j-t|}\,dt = \frac{1}{4\pi}\left(\varphi_k^{(3)}, \varphi_j^{(3)}\right)_{L_2(\mathbb{R}^3)}$$

и

$$\begin{aligned} \tau_j^{(2)}(y_k) &= \frac{-\pi|y_j-y_k|}{4}H_1^{(1)}(i|y_k-y_j|) \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{i}{4}H_0^{(1)}(i|y_k-t|)\frac{\pi i}{2}H_0^{(1)}(i|y_j-t|)dt = \frac{2}{\pi}\left(\varphi_k^{(2)}, \varphi_j^{(2)}\right)_{L_2(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Мы получили, что

$$L_d = \left(\tau_j^{(d)}(y_k)\right)_{j,k\in\mathbb{N}} = q_d\left((\varphi_k^{(d)}, \varphi_j^{(d)})\right)_{j,k\in\mathbb{N}}, \tag{3.6}$$

где $q_2 = \frac{2}{\pi}$ в случае $\mathbb{R}^2$ и $q_3 = \frac{1}{4\pi}$ в случае $\mathbb{R}^3$.

Пусть $f \in \mathfrak{N}_{-1}(A_{Y,d})$, так как $\{\varphi_j^{(d)}(x),\ j \in \mathbb{N}\}$ образуют базис Рисса подпространства $\mathfrak{N}_{-1}(A_{Y,d})$, то $f(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} c_j \varphi_j^{(d)}(x),\ c = \{c_j,\ j \in \mathbb{N}\} \in \ell_2(\mathbb{N})$ и $\forall\, c \in \ell_2(\mathbb{N})$ выполняется неравенство

$$\|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \sum_{j,k\in\mathbb{N}} (\varphi_k^{(d)}, \varphi_j^{(d)}) c_k \overline{c}_j = (L_d c, c)_{\ell_2(\mathbb{N})} \le C \sum_{j\in\mathbb{N}} |c_j|^2 < \infty.$$

Следовательно, L_d — ограниченный оператор на $\ell_2(\mathbb{N})$.

Так как, $\varphi_j^{(d)}(y_k) \sim \frac{\tau_j^{(d)}(y_k)}{|y_j - y_k|},\ j \neq k$, то $|\varphi_j^{(d)}(y_k)| \le C|\tau_j^{(d)}(y_k)|,\ j \neq k$ для достаточно больших значений j и k. Значит, K_d — ограниченный оператор на $\ell_2(\mathbb{N})$. □

Замечание 3.3. Пусть Y из $\mathbb{R}^d$ удовлетворяет условию (1.1), $F = \{f_k := e^{i(\cdot, y_k)}\}_{k=1}^{\infty}$, $y_k \in Y$. В [31] доказана эквивалентность следующих утверждений:

(i) матрица Грама

$$Gr_F = ((f_k, f_j)_{L^2(\mathbb{R}^d;\mu)})_{k,j\in\mathbb{N}}$$

определяет ограниченный оператор на $\ell_2(\mathbb{N})$,

(ii) существует положительная постоянная C такая, что для любого m и для любого набора комплексных чисел $\xi_1, \dots, \xi_m$ справедливо неравенство

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \xi_j f_j \right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le C \sum_{j=1}^{m} |\xi_j|^2.$$

4. Трансверсальность расширений Фридрихса и Крейна

Теорема 4.1. *Оператор A_d, определенный равенством* (1.3), *является расширением по Фридрихсу оператора $A_{Y,d}$.*

Доказательство. Пусть $\widehat{\varphi} \in \widehat{\Phi}_{Y,d}$, тогда по предложению 3.3

$$\widehat{\varphi}(p) = \sum_{j\in\mathbb{N}} c_j e^{-ipy_j}, \quad \vec{c} = \{c_j,\ j \in \mathbb{N}\} \subset \ell_2(\mathbb{N}).$$

Функция $\widehat{\varphi}(p) \in \widehat{H}_{-1}$ тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{|\widehat{\varphi}(p)|^2}{|p|^2+1}\, dp = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \sum_{j,k=1}^{\infty} c_j \overline{c}_k \frac{e^{-ip(y_j - y_k)}}{|p|^2+1}\, dp < \infty.$$

Легко видеть, что
$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{dp}{|p|^2+1} = \infty.$$
Поскольку (см. [2, с. 182, 196], [21, с. 420, 692])
$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos(x\cos t)\,dt, \quad \int\limits_0^{\infty} \frac{x\sin(ax)}{1+x^2}dx = \pi e^{-a}, \quad a>0,$$
$$\int\limits_0^{\infty} \frac{xJ_0(xz)}{1+x^2}dx = K_0(z), \quad \operatorname{Re} z>0,\ K_0(z) = \frac{\pi i}{2}H_0^{(1)}(iz),$$
то при $j \neq k$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{-ip(y_j-y_k)}}{|p|^2+1}\,dp = 2\pi^{d-1}\varphi_k^{(d)}(y_j),$$
где функция $\varphi_k^{(d)}(x)$ определена в (3.1), (3.2), (3.3). Тогда
$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \sum_{j,k\neq j} c_j\overline{c}_k \frac{e^{-ip(y_j-y_k)}}{|p|^2+1}\,dp = 2\pi^{d-1}(K_d\vec{c},\vec{c})_{\ell_2(\mathbb{N})}.$$
В силу леммы 3.1, оператор K_d является ограниченым на $\ell_2(\mathbb{N})$. Значит для любого $\widehat{\varphi}(p)$ из $\widehat{\Phi}_{Y,d}$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{|\widehat{\varphi}(p)|^2}{|p|^2+1}\,dp = +\infty.$$
Значит, $\Phi_{Y,d} \cap H_{-1} = \{0\}$, следовательно, по предложению 2.1 оператор A_d является расширением по Фридрихсу оператора $A_{Y,d}$. $\square$

Замечание 4.1. В [31] равенство $(A_{Y,3})_F = A_3$ доказано с использованием свойств функции Вейля [11, 12].

Теорема 4.2. *Расширения Фридрихса* $(A_{Y,2})_F$ $(= A_d)$ *и Крейна* $(A_{Y,2})_K$ *оператора* $A_{Y,2}$ *дизъюнктны, но не трансверсальны.*

Доказательство. Перейдем к преобразованиям Фурье. Пусть $\varphi \in \widehat{\Phi}_{Y,2}$, тогда по предложению 3.3 $\varphi(p) = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j e^{-ipy_j}$, $\{a_j,\, j\in\mathbb{N}\} \subset \ell_2(\mathbb{N})$. Пусть
$$h_j(p) = \frac{e^{-ipy_j}}{|p|^2+1}, \quad j\in\mathbb{N}.$$

По предложению 3.3 система функций $\{h_j(p)\}_{j\in\mathbb{N}}$ является базисом Рисса в дефектном подпространстве $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}$ оператора $\widehat{A}_{Y,2}$. Поскольку

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{dp}{|p|^2(|p|^2+1)} = +\infty,$$

то $h_j \neq \widehat{A}_2^{1/2}\widehat{H}_{+1}$, $j \in \mathbb{N}$. Поэтому, по теореме 2.1 расширения Фридрихса $\widehat{A}_2$ и Крейна $(\widehat{A}_{Y,2})_K$ оператора $\widehat{A}_{Y,2}$ не трансверсальны.

Рассмотрим линейное многообразие

$$\mathcal{L} := \operatorname{span}\{g_j(p) = h_j(p) - h_{j+1}(p),\ j \in \mathbb{N}\}.$$

Так как любой вектор из $\mathcal{L}$ имеет конечное число ненулевых координат относительно базиса $\{h_j(p)\}_{j\in\mathbb{N}}$ и сумма координат равна нулю, то $\mathcal{L}$ всюду плотно в $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}$. С другой стороны,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|e^{-ipy_j} - e^{-ipy_{j+1}}|^2}{|p|^2(|p|^2+1)}\,dp = 4\pi(\gamma + K_0(|y_j - y_{j+1}|)) < \infty,$$

где γ — постоянная Эйлера и $K_0(z) = \frac{\pi i}{2}H_0^{(1)}(iz)$ — цилиндрическая функция мнимого аргумента. Это означает, что $g_j(p) \in \widehat{A}_2^{1/2}\widehat{H}_{+1}$ для любого $j \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что $\mathcal{L} \subset \widehat{A}_2^{1/2}\widehat{H}_{+1}$. В силу теоремы 2.1 получаем, что $\widehat{A}_2$ и $(\widehat{A}_{Y,2})_K$ дизъюнктны. Используя унитарную эквивалентность, получаем дизъюнктность A_2 и $(A_{Y,2})_K$. $\square$

Теорема 4.3. *Пусть*

$$M_{jk} = \begin{cases} \frac{1-e^{-|y_k-y_j|}}{|y_k-y_j|}, & j \neq k, \\ 1, & j = k. \end{cases} \tag{4.1}$$

Расширения Фридрихса и Крейна оператора $A_{Y,3}$ дизъюнктны. Они трансверсальны тогда и только тогда, когда оператор M, определенный матрицей $\|M_{jk}\|_{j,k}$, ограничен на $\ell_2(\mathbb{N})$.

Доказательство. Перейдем к преобразованиям Фурье. По предложению 3.3

$$\varphi \in \widehat{\Phi}_{Y,3} \iff \varphi(p) = \sum_{j\in\mathbb{N}} c_j e^{-ipy_j}, \quad \vec{c} = \{c_j,\ j \in \mathbb{N}\} \subset \ell_2(\mathbb{N}).$$

Отметим, что

$$g(p) := \frac{\varphi(p)}{|p|^2+1} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{c_j e^{-ipy_j}}{|p|^2+1} \in (\widehat{\mathbf{A}}_3 + I)^{-1}\widehat{\Phi}_{Y,3} = \widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_{Y,3}).$$

Кроме того,

$$\left\| \frac{e^{-ipy_j}}{|p|(|p|^2+1)} \right\|^2_{\widehat{H}_{+1}} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|p|^2(|p|^2+1)}\, dp = 2\pi^2 < \infty.$$

Это означает, что для любого $j \in \mathbb{N}$

$$\frac{e^{-ipy_j}}{|p|^2+1} \in \widehat{A}_3^{1/2} \widehat{H}_{+1}.$$

Так как линейная оболочка системы функций $\left\{\frac{e^{-ipy_j}}{|p|^2+1}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ плотна в $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_{Y,3})$, то по теореме 2.1 операторы $\widehat{A}_{3K}$ и $\widehat{A}_{3F}$ дизъюнктны.

Допустим, что они трансверсальны. Тогда по теореме 2.1 справедливо включение $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_{Y,3}) \subset \widehat{A}_3^{1/2} \widehat{H}_{+1}$. Оператор $\widehat{A}_3^{1/2}$ непрерывно действует из $\widehat{H}_{+1}$ в $\widehat{H} = L_2(\mathbb{R}^3, dp)$. Поэтому $\widehat{A}_3^{-1/2}$ — замкнутый оператор из $\widehat{H}$ в $\widehat{H}_{+1}$. Поскольку $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_{Y,3})$ является подпространством в $\widehat{H}$ (замкнутым линейным многообразием), то по теореме о замкнутом графике сужение $\widehat{A}_3^{-1/2} \restriction \widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_{Y,3})$ — ограниченный оператор из $\widehat{H}$ в $\widehat{H}_{+1}$, т.е.

$$\|\widehat{A}_3^{-1/2} g\|^2_{\widehat{H}_{+1}} \leq \gamma \|g\|^2, \quad \forall\, g \in \widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_{Y,3}).$$

Но $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_{Y,3}) = (\widehat{\mathbf{A}}_3 + I)^{-1} \widehat{\Phi}_{Y,3}$, причем оператор $(\mathbf{A}_3 + I)^{-1} \restriction \widehat{\Phi}_{Y,3}$ непрерывно действует из $\widehat{H}_{-2}$ в $\widehat{H}$, т.е.

$$\left\|(\widehat{\mathbf{A}}_3 + I)^{-1}\varphi\right\|^2_{\widehat{H}} \leq C\, \|\varphi\|^2_{\widehat{H}_{-2}} \quad \forall\, \varphi \in \widehat{\Phi}_{Y,3}.$$

Таким образом, для

$$g(p) = (\widehat{\mathbf{A}}_3 + I)^{-1}\varphi(p) = \frac{\varphi(p)}{|p|^2+1}, \quad \widehat{\mathbf{A}}_3^{-1/2} g(p) = \frac{\varphi(p)}{|p|(|p|^2+1)}$$

с учетом того, что $\left\{e^{-ipy_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ — базис Рисса в $\widehat{\Phi}_{Y,3}$, имеем

$$\|\widehat{\mathbf{A}}_3^{-1/2} g\|^2_{\widehat{H}_{+1}} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{|\varphi(p)|^2}{|p|^2(|p|^2+1)}\, dp,$$

$$\|g\|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{|\varphi(p)|^2}{(|p|^2+1)^2}\, dp, \quad \|\varphi\|^2_{\widehat{H}_{-2}} \leq C \sum_{j\in\mathbb{N}} |c_j|^2,$$

Это влечет

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left|\sum_{j\in\mathbb{N}} c_j e^{-ipy_j}\right|^2}{|p|^2(|p|^2+1)}\, dp \le C \sum_{j\in\mathbb{N}} |c_j|^2, \tag{4.2}$$

при любом выборе $\vec{c} = \{c_j,\ j \in \mathbb{N}\} \subset \ell_2(\mathbb{N})$.

Раскрывая формально числитель, мы получаем

$$\left|\sum_{j\in\mathbb{N}} c_j e^{-ipy_j}\right|^2 = \sum_{j,k\in\mathbb{N}} c_j \overline{c_k} e^{ip(y_k-y_j)}.$$

Поскольку (см. [21, с. 422])

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ipa}}{|p|^2(|p|^2+1)} dp = \frac{4\pi}{|a|} \int_0^{+\infty} \frac{\sin r|a| dr}{r(r^2+1)} = 2\pi^2 \frac{1-e^{-|a|}}{|a|},$$

то

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left|\sum_{j\in\mathbb{N}} c_j e^{-ipy_j}\right|^2}{|p|^2(|p|^2+1)}\, dp = 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 + 2\pi^2 \sum_{j\neq k} \frac{1-e^{-|y_k-y_j|}}{|y_k-y_j|} c_j \overline{c_k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\pi^2 \sum_{j,k=1}^{n} M_{jk} c_j \overline{c_k}, \tag{4.3}$$

где M_{jk} определены равенствами (4.1). Таким образом,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left|\sum_{j\in\mathbb{N}} c_j e^{-ipy_j}\right|^2}{|p|^2(|p|^2+1)}\, dp = \lim_{n\to\infty} 2\pi^2 \sum_{j,k=1}^{n} M_{jk} c_j \overline{c_k} \le C \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2.$$

Теперь (4.2), (4.3) влечет

$$0 < \sum_{j,k=1}^{n} M_{jk} c_j \overline{c_k} \le C \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2,$$

для любого $\vec{c} \in \ell_2(\mathbb{N})$, $\vec{c} \neq 0$ и для любого $n \in \mathbb{N}$. Это означает, что M — ограниченный самосопряженный и неотрицательный оператор в $\ell_2(\mathbb{N})$ (см. [1, гл. II, с. 88–94]).

Исходя из ограниченности оператора M в $\ell_2(\mathbb{N})$ и проводя рассуждения в обратном порядке, мы получим, что расширения Фридрихса и Крейна трансверсальны. $\square$

Замечание 4.2. Используя подход граничных троек и функций Вейля в разделе 5, мы получим критерий трансверсальности в таком же виде, как в [31].

5. Граничные тройки и функция Вейля для $A^*_{Y,d}$

Предложение 5.1. *Пусть* Y *— бесконечное множество точек, удовлетворяющее условию* (1.1), *и пусть* $A_{Y,d}$ *— минимальный оператор Шрёдингера, определенный формулами* (1.2). *Тогда*

$$\operatorname{dom}(A^*_{Y,d}) = \Big\{ f = f_0 + \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{fj}\varphi_j^{(d)}(x) + \sum_{j\in\mathbb{N}} b_{fj}\tau_j^{(d)}(x),$$
$$\vec{a}_f := \{a_{fj}\}_{j\in\mathbb{N}}, \vec{b}_f := \{b_{fj}\}_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N}) \Big\},$$
$$A^*_{Y,d} f = -\Delta f_0 - \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{fj}\varphi_j^{(d)}(x) + \sum_{j\in\mathbb{N}} b_{fj}\left(\varphi_j^{(d)}(x) - \tau_j^{(d)}(x)\right), \quad (5.1)$$

где функции $\varphi_j^{(d)}(x)$ *и* $\tau_j^{(d)}(x)$ *определены формулами* (3.3) *и* $f_0 \in \operatorname{dom}(A_{Y,d})$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ замкнутый, плотно определенный, симметрический оператор на $\mathfrak{H}$, оператор $\widetilde{\mathcal{A}}$ — самосопряженное расширение оператора $\mathcal{A}$ и $(-1) \in \rho(\widetilde{\mathcal{A}})$, тогда (см., например [34]):

$$\operatorname{dom}(\mathcal{A}^*) = \operatorname{dom}(\mathcal{A}) \dotplus \mathfrak{N}_{-1} \dotplus (\widetilde{\mathcal{A}} + I)^{-1}\mathfrak{N}_{-1},$$
$$\mathcal{A}^*(f_0 + f_1 + f_2) = \mathcal{A} f_0 - f_1 + \widetilde{\mathcal{A}} f_2,$$

где $f_0 \in \operatorname{dom}(\mathcal{A}),\ f_1 \in \mathfrak{N}_{-1}$ и $f_2 \in (\widetilde{\mathcal{A}} + I)^{-1}\mathfrak{N}_{-1}$.

По предложению 3.4 справедливо равенство $\tau_j^{(d)} = (-\Delta+I)^{-1}\varphi_j^{(d)}$, тогда $-\Delta\tau_j^{(d)} = -\Delta(-\Delta+I)^{-1}\varphi_j^{(d)} = \varphi_j^{(d)} - (-\Delta+I)^{-1}\varphi_j^{(d)} = \varphi_j^{(d)} - \tau_j^{(d)}$ и получаем (5.1). □

В следующем предложении мы дадим унифицированную конструкцию граничных троек для оператора $A^*_{Y,d}$ для обоих случаев $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. Другая граничная тройка для оператора $A^*_{Y,3}$ была предложена в [31].

Предложение 5.2. *Пусть* $\mathcal{H} = \ell_2(\mathbb{N})$ *и пусть линейные операторы*

$$G_d, \Gamma'_d, \Gamma_d : \operatorname{dom}(A^*_{Y,d}) \to \mathcal{H}$$

определены следующим образом:

$$G_d f = \left\{ \lim_{x\to y_k} \frac{f(x)}{\varphi_k^{(d)}(x)} \right\}_{k\in\mathbb{N}} = \{a_{fk}\}_{k\in\mathbb{N}},$$

$$\Gamma'_d f = \left\{ \lim_{x\to y_k} \left(f(x) - \sum_j a_{fj}\varphi_j^{(d)}(x) \right) \right\}_{k\in\mathbb{N}}$$
$$= L_d\vec{b}_f = \left\{ \sum_j b_{fj}\tau_j^{(d)}(y_k) \right\}_{k\in\mathbb{N}},$$

$$\Gamma_d f = \left\{ \lim_{x\to y_k} \left(f(x) - a_{fk}\varphi_k^{(d)}(x) \right) \right\}_{k\in\mathbb{N}} = K_d\vec{a}_f + L_d\vec{b}_f$$
$$= \left\{ \sum_{j\neq k} a_{fj}\varphi_j^{(d)}(y_k) + \sum_j b_{fj}\tau_j^{(d)}(y_k) \right\}_{k\in\mathbb{N}}. \quad (5.2)$$

Тогда совокупности $\Pi'_d = \{\mathcal{H}, G_d, \Gamma'_d\}$ *и* $\Pi_d = \{\mathcal{H}, G_d, \Gamma_d\}$ *являются граничными тройками для* $A^*_{Y,d}$.

Доказательство. Пусть f и g из $\mathrm{dom}(A^*_{Y,d})$, тогда, в силу предложения 5.1, получим:

$$(A^*_{Y,d}f, g) - (f, A^*_{Y,d}g) = \sum_{j,k} b_{fj}\overline{a}_{gk}\tau_j^{(d)}(y_k) - \sum_{j,k} a_{fj}\overline{b}_{gk}\tau_j^{(d)}(y_k),$$

$$(\Gamma'_d f, G_d g)_{\mathcal{H}} - (G_d f, \Gamma'_d g)_{\mathcal{H}} = \sum_{j,k} b_{fj}\overline{a}_{gk}\tau_j^{(d)}(y_k) - \sum_{j,k} a_{fj}\overline{b}_{gk}\tau_j^{(d)}(y_k)$$

и

$$(\Gamma_d f, G_d g)_{\mathcal{H}} - (G_d f, \Gamma_d g)_{\mathcal{H}}$$
$$= \sum_{j,k\neq j} a_{fj}\overline{a}_{gk}\varphi_j^{(d)}(y_k) + \sum_{j,k} b_{fj}\overline{a}_{gk}\tau_j^{(d)}(y_k)$$
$$- \sum_{j,k} a_{fj}\overline{b}_{gk}\tau_j^{(d)}(y_k) - \sum_{j,k\neq j} a_{fk}\overline{a}_{gj}\varphi_j^{(d)}(y_k)$$
$$= \sum_{j,k} b_{fj}\overline{a}_{gk}\tau_j^{(d)}(y_k) - \sum_{j,k} a_{fj}\overline{b}_{gk}\tau_j^{(d)}(y_k).$$

Значит, тождество Грина (2.2) выполняется. Более того,

$$\lim_{x\to y_k} \frac{f(x)}{\varphi_k^{(d)}(x)} = \lim_{x\to y_k} \left(\frac{f_0(x)}{\varphi_k^{(d)}(x)} + a_{fk} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\varphi_k^{(d)}(x)} \sum_{j\neq k} a_{fj}\varphi_j^{(d)}(x) + \frac{1}{\varphi_k^{(d)}(x)} \sum_j a_{fj}\tau_j^{(d)}(x) \right) = a_{fk},$$

$$\lim_{x\to y_k}\left(f(x)-\sum_j a_{fj}\varphi_j^{(d)}(x)\right)$$
$$=\lim_{x\to y_k}\left(f_0(x)+\sum_j b_{fj}\tau_j^{(d)}(x)\right)=\sum_j b_{fj}\tau_j^{(d)}(y_k),$$

$$\lim_{x\to y_k}\left(f(x)-a_{fk}\varphi_k^{(d)}(x)\right)$$
$$\lim_{x\to y_k}\left(f_0(x)+\sum_{j\neq k} a_{fj}\varphi_j^{(d)}(x)+\sum_j b_{fj}\tau_j^{(d)}(x)\right)$$
$$=\sum_{j\neq k} a_{fj}\varphi_j^{(d)}(y_k)+\sum_j b_{fj}\tau_j^{(d)}(y_k),$$

следовательно, формулы (5.2) справедливы. Исходя из леммы 3.4, отображения $\boldsymbol{\Gamma}_d : x \mapsto \{G_d x, \Gamma_d x\}$ и $\boldsymbol{\Gamma}'_d : x \mapsto \{G_d x, \Gamma'_d x\}$ являются сюръекциями из $\mathrm{dom}(A^*_{Y,d})$ на $\ell_2 \times \ell_2$. $\square$

Замечание 5.1. В [31, предложение 5.3] граничная тройка $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ для оператора $A^*_{Y,3}$ определяется следующим образом: $\mathcal{H} = \ell_2(\mathbb{N})$,

$$\Gamma_0 f = \{\lim_{x\to y_k} f(x)|x-y_k|\}_1^\infty = \vec{a}_f,$$
$$\Gamma_1 f = \{\lim_{x\to y_k}(f(x)-a_{fk}|x-y_k|^{-1})\}_1^\infty = T_0\vec{a}_f + T_1\vec{b}_f,$$

где $T_0 = K_3 - I$, $T_1 = L_3$, а $\vec{a}_f, \vec{b}_f \in \ell_2$ определены в предложении 5.1.

Очевидно, ввиду эквивалентности $\varphi_k^{(3)}(x) \sim \frac{1}{|x-y_k|}$, при $x \to y_k$, мы получаем $\Gamma_0 f = G_3 f$ и $\Gamma_1 f = \Gamma_3 f + I a_f$.

Предложение 5.3. *Пусть граничная тройка $\Pi_d = \{\mathcal{H}, G_d, \Gamma_d\}$ задана формулами (5.2), тогда γ-поле и функция Вейля $M^{(d)}(z)$ определяются следующим образом:*

$$\gamma^{(d)}(z)(\{a\}) = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \varphi_{j,z}^{(d)}(x), \tag{5.3}$$

$$M^{(d)}(z)(\{a\}) = \left\{\sum_{j\neq k} a_j\varphi_{j,z}^{(d)}(y_k) + a_k \lim_{x\to y_k}\left(\varphi_{k,z}^{(d)}(x)-\varphi_k^{(d)}(x)\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}}, \tag{5.4}$$
$$\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N}), \quad z \in \mathbb{C}\setminus[0,+\infty), \quad \mathrm{Im}\sqrt{z} \geq 0.$$

Оператор-функции $M^{(d)}(z)$ задаются матрицами $\|M_{kj}^{(d)}(z)\|_{k,j\in\mathbb{N}}$, где

$$M_{kj}^{(3)}(z) = \begin{cases} i\sqrt{z}+1, & k=j,\\ \frac{e^{i\sqrt{z}|y_k-y_j|}}{|y_k-y_j|}, & k\neq j,\end{cases}$$

$$M_{kj}^{(2)}(z) = \begin{cases} \frac{\pi i}{2} - \frac{1}{2}\ln z, & k = j, \\ \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(\sqrt{z}|y_k - y_j|), & k \neq j. \end{cases} \tag{5.5}$$

Доказательство. Очевидно, γ-поле — ограниченный оператор на $\ell_2(\mathbb{N})$ и

$$G_d \gamma^{(d)}(z)(\{a\}) = \left\{ a_k \lim_{x \to y_k} \frac{\varphi_{k,z}^{(d)}(x)}{\varphi_k^{(d)}(x)} \right\}_{k \in \mathbb{N}} = \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}},$$

так как $H_0^{(1)}(z) \sim \frac{2i}{\pi} \ln z$, при $z \to 0$ [2], то $\lim_{x \to y_k} \frac{\varphi_{k,z}^{(d)}(x)}{\varphi_k^{(d)}(x)} = 1$. Тогда, из (2.3) мы получаем (5.3).

Далее, из (5.3) и (5.2) получаем (5.4):

$$\begin{aligned} M^{(d)}(z)(\{a\}) &= \Gamma_d \gamma^{(d)}(z)(\{a\}) = \Gamma_d \Bigg(\sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \varphi_{j,z}^{(d)}(x) \Bigg) \\ &= \left\{ \sum_{j \neq k} a_j \varphi_{j,z}^{(d)}(y_k) + a_k \lim_{x \to y_k} \left(\varphi_{k,z}^{(d)}(x) - \varphi_k^{(d)}(x) \right) \right\}_{k \in \mathbb{N}}. \end{aligned}$$

В случае $\mathbb{R}^3$:

$$\lim_{x \to y_k} \left(\varphi_{k,z}^{(3)}(x) - \varphi_k^{(3)}(x) \right) = \lim_{x \to y_k} \frac{e^{i\sqrt{z}|x - y_k|} - e^{-|x - y_k|}}{|x - y_k|} = i\sqrt{z} + 1.$$

В случае $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to y_k} \left(\varphi_{k,z}^{(2)}(x) - \varphi_k^{(2)}(x) \right) \\ &\qquad = \lim_{x \to y_k} \frac{\pi i}{2} \left(H_0^{(1)}(\sqrt{z}|x - y_k|) - H_0^{(1)}(i|x - y_k|) \right) \\ &\qquad\qquad = \lim_{x \to y_k} \left(\ln(i|x - y_k|) - \ln(\sqrt{z}|x - y_k|) \right) = \frac{\pi i}{2} - \frac{1}{2} \ln z. \end{aligned}$$

Функция Вейля $M^{(d)}(z)$ — ограниченный оператор при $z \in \rho(A_{Y,d})$, так как Γ_d и $\gamma^{(d)}(z),\ z \in \rho(A_{Y,d})$ — ограниченные операторы. $\square$

Отметим, что $\gamma^{(3)}(z) = \gamma(z)$ и $M^{(3)}(z) = M(z) + I$, где I единичная матрица, $M(z)$ и $\gamma(z)$ — функция Вейля и γ-поле, соответственно, построенные М. Маламудом и К. Шмюдгеном в [31].

Используя теорему 2.2, мы приходим к следующему утверждению (см. [31, лемма 5.6, теорема 5.8]).

Следствие 5.1. *Расширения A_3 и $(A_{Y,3})_K$ дизъюнктны. Они трансверсальны в том и только том случае, если оператор $M^{(3)}(0)$ ограничен на $\ell_2(\mathbb{N})$. Самосопряженный оператор $M^{(3)}(0)$ ассоциирован с формой t:*

$$t[c] = \sum_{k,j\neq k} \frac{1}{|y_j - y_k|} c_j \overline{c_k} + \|c\|^2_{\ell_2(\mathbb{N})},$$
$$\operatorname{dom}(t) = \left\{ c \in \ell_2(\mathbb{N}) : \sum_{k,j\neq k} \frac{1}{|y_j - y_k|} c_j \overline{c_k} < \infty \right\},$$
$$(M^{(3)}(0)a, b) = \sum_{k,j\neq k} \frac{1}{|y_j - y_k|} a_j \overline{b_k} + \sum_j a_j \overline{b_j},$$
$$a \in \operatorname{dom}(M^{(3)}(0)) \subset \operatorname{dom}(t), \quad b \in \operatorname{dom}(t).$$

Дадим еще одно доказательство дизъюнктности, но не трансверсальности расширений A_2 и $(A_{Y,2})_K$ (см. теорему 4.2).

Пусть $e_j = \{e_{jk} = \delta_{jk},\ k \in \mathbb{N}\}$ — стандартный ортонормированный базис в $\ell_2(\mathbb{N})$. Тогда из (5.5) получаем

$$(M^{(2)}(0)e_j, e_j) = \lim_{z\uparrow 0} (M^{(2)}(z)e_j, e_j) = \lim_{z\uparrow 0} \frac{-1}{2} \ln(-z) = +\infty.$$

Рассмотрим линейное многообразие $S_0 := \operatorname{span}\{f_j = e_j - e_{j+1}\}$ из ℓ_2. Пусть $a \in S_0$, тогда для любого $n_0 \in \mathbb{N}$

$$(M^{(2)}(0)a, a) = \sum_{k,j\leq n_0} a_j \overline{a_k} \lim_{z\uparrow 0} (M^{(2)}(z)f_j, f_k),$$

$$\begin{aligned} &\lim_{z\uparrow 0} (M^{(2)}(z)f_j, f_k) \\ &= \begin{cases} 2\ln|y_j - y_{j+1}| - 2\psi(1) - 2\ln 2, & k = j, \\ \ln \frac{|y_{j+2}-y_j|}{|y_{j+2}-y_{j+1}|} - \ln|y_j - y_{j+1}| + \ln 2 + \psi(1), & k = j+1, \\ \ln \frac{|y_{j-1}-y_{j+1}|}{|y_{j-1}-y_j|} - \ln|y_j - y_{j+1}| + \ln 2 + \psi(1), & k = j-1, \\ \ln \frac{|y_{j+1}-y_k|}{|y_j-y_k|} - \ln \frac{|y_{j+1}-y_{k+1}|}{|y_j-y_{k+1}|}, & k \leq j-2 \\ & \text{или } k \geq j+2, \end{cases} \end{aligned}$$

так как (см. [2])

$$\begin{aligned} &\frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(\sqrt{z}|y_k - y_j|) \\ &\quad = J_0(\sqrt{z}|y_k - y_j|) \left(\frac{\pi i}{2} - \frac{1}{2}\ln z + \ln 2 - \ln|y_k - y_j| \right) \end{aligned}$$

$$+\psi(1)+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s\psi(s+1)}{(s!)^2}\left(\frac{z|y_k-y_j|^2}{4}\right)^s,$$

где $\psi(1)=-\gamma$ и γ — постоянная Эйлера.

Следовательно,

$$S_0\subseteq\mathcal{D}:=\Big\{h\in\ell_2(\mathbb{N}):\lim_{z\uparrow 0}(M^{(2)}(z)h,h)<\infty\Big\}.$$

Линейное многообразие S_0 плотно в $\ell_2(\mathbb{N})$. Действительно, предположим, что $h\in\ell_2(\mathbb{N})$ и $h\perp S_0$, тогда $(h,a)_{\ell_2(\mathbb{N})}=0$ для всех $a\in S_0$, то есть

$$\sum_{j=1}^{n_0}(h_j-h_{j+1})\overline{a_j}=0,$$

тогда, $h_j=h_{j+1}$. Следовательно, $h=0$ и линейное многообразие S_0 плотно в ℓ_2. Значит, $\mathcal{D}$ плотно в $\ell_2(\mathbb{N})$, но $\mathcal{D}\neq\ell_2(\mathbb{N})$. По теореме 2.2 расширения A_2 и $(A_{Y,2})_K$ дизъюнктны, но не трансверсальны.

Замечание 5.2. В случае конечного числа точечных взаимодействий в $\mathbb{R}^3$ расширения Фридрихса и Крейна трансверсальны [7]. В случае $\mathbb{R}^2$ расширения Фридрихса и Крейна не трансверсальны и $\dim(D[(A_{Y,2})_K]/D[A_2])=n-1$, где n — число точек в Y и если $n=1$, то расширения Фридрихса и Крейна совпадают (см. [3, 14, 16, 28]).

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность проф. Ю. М. Арлинскому за постановку задач и постоянное внимание к работе. Автор также благодарит проф. М. М. Маламуда за обсуждение статьи, критические замечания и конструктивные предложения.

Литература

[1] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, М.: Наука, 1966.

[2] M. Abramovitz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, New-York, 1972.

[3] V. Adamyan, *Nonnegative Perturbations of Nononegative Self-adjoint Operators* // Methods Funct. Anal. Topology, **13** (2007), No. 2, 103–109.

[4] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, and H. Holden, *Solvable models in quantum mechanics*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, New York.

[5] S. Albeverio, A. Kostenko, and M. Malamud, *Spectral theory of semibounded Sturm-Liouville operators with local interactions on a discrete set* // J. Math. Phys., **51** (2010), No. 10.

[6] Yu. M. Arlinskiĭ and E. R. Tsekanovskiĭ, *On the theory of non-negative selfadjoint extensions of a nonnegative symmetric operator* // Reports of National Academy of Sciences of Ukraine, (2002), No. 11, 30–37.

[7] Yu. M. Arlinskiĭ and E. R. Tsekanovskiĭ, *The von Neumann problem for nonnegative symmetric operators* // Integral Equation and Operator Theory, (2005), 315–356.

[8] Ю. М. Березанский, *Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов*, Киев: "Наукова думка", 798 с.

[9] Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев, *Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом* // Докл. Акад. наук СССР, **137** (1967) No. 5, 1011–1014.

[10] В. М. Брук, *Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии* // Мат. сб., **100** (1976), No. 2, 210–216.

[11] V. A. Derkach, M. M. Malamud, *Generalized resolvents and the boundary value problems for hermitian operators with gaps* // J. Funct. Anal., **95** (1991), 1–95.

[12] V. A. Derkach, M. M. Malamud, *The extension theory of Hermitian operators and the moment problem* // J. Math. Sci. (New York), **73** (1995), 141–242.

[13] В. А. Деркач, М. М. Маламуд, Э. Р. Цекановский, *Секториальные расширения положительного оператора и характеристическая функция* // Укр. мат. журн., **41** (1989), No. 2, 151–158.

[14] F. Gesztesy, N. Kalton, K. Makarov, E. Tsekanovskiĭ, *Some aplications of operator-valued Herglotz functions* // Oper. Theory, Adv. and Appl., **123** (2001), 271–321.

[15] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, М.: Наука, 1965, 448 с.

[16] N. Goloschapova, *Multi-dimensional Schrödinger operators with point interactions* // MFAT, **17** (2011), No. 2, 126–143.

[17] N. Goloshchapova, M. Malamud, and V. Zastavnyi, *Radial positive definite functions and spectral theory of the Schrųdinger operators with point interactions* // Math. Nachr., **285** (2012), No. 14–15, 1839–1859.

[18] Н. И. Голощапова, Л. Л. Оридорога, *Одномерный оператор Шрёдингера с точечными δ- и δ'-взаимодействиями* // Матем. заметки, **84**:1 (2008), 127–131.

[19] Н. И. Голощапова, В. П. Заставный, М. М. Маламуд, *Положительно определенные функции и спектральные свойства оператора Шредингера с точечными взаимодействиями* // Матем. заметки, **90**:1 (2011), 151–156.

[20] М. Л. Горбачук, В. И. Горбачук, *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений*, Киев: Наук. думка, 1984. 284 с.

[21] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, М: ФИЗМАТГИЗ, 1963, 1108 с.

[22] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, М.: Мир, 1972, 740 с.

[23] А. Н. Кочубей, *О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений* // Мат. заметки, **17** (1975), No. 1, 41–48.

[24] А. Н. Кочубей, *Одномерные точечные взаимодействия* // Укр. мат. журн., **41** (1989), No. 10, 90–95.

[25] A. Kostenko and M. Malamud, *1–D Schrödinger operators with local point interactions on a discrete set* // J. Differential Equations, **249** (2010), 253–304.

[26] В. Д. Кошманенко, *Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов*, Киев: Наук. думка, 1993.

[27] Yu. G. Kovalev, *1D Nonnegative Schrödinger operators with point interactions* // Matematychni Studii, **39** (2013), No. 2, 150–163.

[28] Ю. Г. Ковалев, *Неотрицательные 2D гамильтонианы для точечных взаимодействий* // Весник ВНУ им. В. Даля, **150** (2010), No. 8, 150–159.

[29] М. Г. Крейн, *Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения* // Мат. сб., **20** (1947), No. 3, 431–495.

[30] М. М. Маламуд, *О некоторых классах расширений эрмитова оператора с лакунами* // Укр. мат. журн., **44** (1992), No. 2, 215–234.

[31] M. M. Malamud and K. Schmüdgen, *Spectral theory of Schrödinger operators with infinitely many point interactions and radial positive definite functions* // Journ. of Funct. Anal., **263** (2012), 3144—3194.

[32] V. A. Mikhailets, *Spectral properties of the one-dimensional Schrödinger operator with point intersections* // Reports on Mathematical Physics, **36** (1995), No. 2–3, 495–500.

[33] В. А. Михайлец, *Одномерный оператор Шредингера с точечными взаимодействиями* // Доклады РАН, **49** (1994), 345–349.

[34] М. И. Вишик, *Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений* // Тр. Моск. мат. об-ва, **1** (1952), 187–246.

Сведения об авторах

Юрий Ковалев

Восточноукраинский национальный
университет им. В. Даля,
Квартал Молодежный 20а,
Луганск 91034,
Украина
E-Mail: yury.kovalev.lugansk@gmail.com