Український математичний вісник
Том 11 **(2014)**, № 4, 447 – 479

Эллиптико-параболическое уравнение и соответствующая задача со свободной границей II: гладкое решение

Сергей П. Дегтярев

(*Представлена А. Е. Шишковым*)

Аннотация. Рассмотрена задача с неизвестной границей раздела областей параболичности и эллиптичности квазилинейного эллиптико-параболического уравнения. Такая задача моделирует фильтрацию в частично насыщенной пористой среде. Локально по времени доказано существование гладкого решения задачи, включая гладкость неизвестной границы.

2010 MSC. 35R35, 35K65.

Ключевые слова и фразы. Эллиптико-параболическое уравнение, свободная граница, классическое решение, априорная оценка.

1. Постановка задачи и основной результат

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^N$, $T > 0$, $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$. Пусть, далее, $g(x,t), (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]$, $u_0(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, $f(x,t), (x,t) \in \overline{\Omega_T}$ — заданные функции, и пусть заданная функция $c(u), u \in \mathbb{R}^1$ — такова, что $c(u) \equiv 0$ при $u \leq 0$ и $c'(u) > 0$ при $u \geq 0$. Рассмотрим в области Ω_T следующую начально-краевую задачу для неизвестной функции $u(x,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} c(u) - \Delta u = 0, \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1.1}$$

$$c(u(x,0)) = c(u_0(x)), \tag{1.2}$$

$$u(x,t) = g(x,t), \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]. \tag{1.3}$$

Задача подобного типа возникает, в частности, в теории фильтрации, см. по этому поводу [1–12] и имеющуюся там библиографию, а также в некоторых других областях. Так как в той области, где $u > 0$

Статья поступила в редакцию 3.06.2013

ISSN 1810 – 3200.

уравнение (1.1) является параболическим, а в области, где $u < 0$ оно эллиптично, то задача (1.1)–(1.3) представляет собой эллиптико-параболическую задачу. При этом уравнение (1.1) естественным образом порождает задачу со свободной границей — ключевыми неизвестными в рассматриваемой задаче являются сами области , где $u < 0$ или $u > 0$, а также граница раздела между ними, которая и представляет собой свободную (неизвестную) границу.

В случае одной пространственной переменной, когда Ω представляет собой отрезок прямой, $\Omega = (a, b)$, задача вида (1.1)–(1.3) изучалась в [2–10], где, при определенных предположениях на данные задачи, было получено существование слабого решения, а также существование регулярной функции $x = s(t) \in (a, b)$, разделяющей области $u > 0$ и $u < 0$.

В работе [11] рассматриваемая задача изучалась в случае двумерной фильтрации, когда $\Omega \subset R^2$, и при некоторых условиях типа монотонности на данные задачи было установлено, что свободная граница является непрерывной.

В многомерном же случае, когда $\Omega \subset \mathbb{R}^N,\ N \geq 2$, уравнение (1.1) и задача (1.1)–(1.3) в обобщенной постановке рассматривались, в частности, в [1] и в [12], причем в [12] задача рассматривалась в терминах вязких решений и была доказана корректность задачи в такой обобщенной постановке.

Классические решения многомерной задачи (1.1)–(1.3), включающие гладкость свободной границы, рассматривались в работе [13]. При этом в указанной работе решение уравнения (1.1) и неизвестная поверхность раздела изучались в классах гладких функций, являющихся модификациями анизотропных пространств Гельдера. В этих пространствах для всех производных рассматриваемых функций предполагались конечными двойные полунормы вида (1.16). Кроме того, в эллиптической области уравнения (1.1) не доказывалась гладкость производной по времени от решения.

Кроме указанных работ, касающихся задач, подобных задаче (1.1)–(1.3), не претендуя на полноту обзора, отметим также работы [14–23].

Целью данной работы является рассмотреть задачу (1.1)–(1.3) в общей многомерной постановке, $\Omega \subset \mathbb{R}^N,\ N \geq 2$, причем рассмотреть задачу не в обобщенной постановке, а в классических терминах гладких решений. При этом мы будем рассматривать квазилинейное уравнение (1.1) и задачу (1.1)–(1.3) как задачу со свободной границей и сконцентрируем внимание на самой свободной границе. Важным является то, что, в отличие от работы [13], мы покажем, что свободная граница и решение в параболической области принадлежат обычным анизотропным пространствам Гельдера $C^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}$ (без дополнительной “экзотики”), а в эллиптической области решение принадлежит “почти” классу $C^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}$ — оно имеет в этой области производную по времени из класса Гельдера. Мы считаем эти обстоятельства достаточно важными, так как применяемая в данной работе техника сопряжения эллиптической и параболической частей задачи позволяет рассмотреть и другие эллиптико-параболические задачи в стандартных пространствах Гельдера. Отметим, что данная работа существенно опирается на результаты работы [24].

Введем теперь некоторые обозначения, функциональные пространства и сформулируем задачу (1.1)–(1.3) в эквивалентной формулировке, традиционной для задач со свободной границей.

Во-первых, пусть для простоты (как нетрудно видеть из приведенных ниже рассуждений, для нас на самом деле важно лишь, что $c'(u) > 0$ при $u \geq 0$)

$$c(u) = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ u, & u \geq 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Пусть, далее, Ω — двусвязная область в R^N с границей, состоящей из двух непересекающихся поверхностей Γ^+ и Γ^-, $\partial\Omega = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$. Пусть $\Gamma \subset \Omega$ — гладкая поверхность, лежащая строго между Γ^+ и Γ^- и разделяющая область Ω на две подобласти Ω^+ и Ω^- с границами соответственно $\partial\Omega^+ = \Gamma^+ \cup \Gamma$ и $\partial\Omega^- = \Gamma^- \cup \Gamma$. Мы обозначаем для $T > 0 : \Omega_T \equiv \Omega \times [0, T]$, $\Gamma_T \equiv \Gamma \times [0, T]$, $\Gamma^\pm_T \equiv \Gamma^\pm \times [0, T]$.

Пусть в областях $\Omega^\pm$ заданы функции $u_0^\pm(x)$, такие, что

$$u_0^+ > 0 \text{ в } \Omega^+, \quad u_0^- < 0 \text{ в } \Omega^-, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial u_0^+}{\partial n} = \frac{\partial u_0^-}{\partial n} \geq \gamma > 0, \quad u_0^\pm(x) = 0, \quad x \in \Gamma; \quad \Delta u_0^-(x) = 0, \quad x \in \Omega^-, \tag{1.6}$$

где $\overrightarrow{n}$ — нормаль к Γ, направленная в сторону Ω^+, а через γ, ν, μ и C мы будем обозначать все встречающиеся абсолютные константы, либо константы, зависящие только от раз и навсегда зафиксированных данных задачи. Функции $u_0^\pm(x)$ — начальные данные для нашей задачи, а поверхность Γ — начальное положение свободной границы, которую мы также будем называть границей раздела фаз.

Введем теперь функцию, параметризующую неизвестную поверхность раздела фаз в моменты времени $t > 0$, как это сделано в [25]. Для этого, предполагая Γ достаточно гладкой (точное требование сформулировано ниже), введем в достаточно малой окрестности $\mathcal{N}$ поверхности Γ координаты (ω, λ), где ω - локальные координаты на поверхности Γ, $\lambda \in R$, $|\lambda| \le \lambda_0$, так что, если $x \in \mathcal{N}$, то при фиксированном выборе локальных координат ω единственным образом

$$x = x_\Gamma(\omega) + \lambda \overrightarrow{n}(\omega) = x(\omega, \lambda), \quad |\lambda| \le \lambda_0, \tag{1.7}$$

где $x_\Gamma(\omega) \in \Gamma$, а λ — отклонение точки x от поверхности Γ по нормали $\overrightarrow{n}$ к Γ, направленной, напомним, внутрь Ω^+.

Пусть $\rho(x,t)$ — достаточно малая функция, определенная на $\Gamma_T = \Gamma \times [0,T]$, $\rho(x,0) \equiv 0$. Так как мы будем использовать локальные координаты ω на Γ, то каждым таким локальным координатам ω и функции $\rho(x,t)$ естественным образом соответствует функция $\rho(\omega,t)$ за которой мы сохраняем то же самое обозначение ρ. Тогда параметризация

$$x = x_\Gamma(\omega) + \overrightarrow{n}(\omega)\rho(\omega,t)$$

при каждом $t \in [0,T]$ задает некоторую поверхность $\Gamma_\rho(t)$, разделяющую область Ω на две подобласти Ω^+_ρ и Ω^-_ρ. Отметим, что эта поверхность не зависит от того или иного выбора локальных координат ω, а определяется только значениями функции $\rho(x,t)$ на поверхности Γ_T. Обозначим поверхность в $\Omega_T \equiv \Omega \times [0,T]$ через $\Gamma_{\rho,T} \equiv \cup_{t\in[0,T]}\Gamma_\rho(t) \times \{t\}$. Обозначим также через $\Omega^\pm_{\rho,T}$ те области, на которые поверхность $\Gamma_{\rho,T}$ разбивает область Ω_T.

Пусть еще на поверхностях $\Gamma^\pm_T \equiv \Gamma^\pm \times [0,T]$ заданы функции $g^\pm(x,t)$ такие, что

$$g^+(x,t) > \nu > 0 \text{ и } g^-(x,t) < -\nu < 0 \ \text{ при } (x,t) \in \Gamma^\pm_T \tag{1.8}$$

соответственно.

Рассмотрим задачу определения неизвестной функции $\rho(\omega,\tau)$, определенной на Γ_T, и функций $u^\pm(y,\tau)$, определенных в $\Omega_{\rho,T}$ из соотношений (мы изменили обозначение точки (x,t) на (y,τ) ввиду последующей замены переменных)

$$L_0^+ u^+(y,\tau) \equiv \frac{\partial u^+(y,\tau)}{\partial \tau} - \Delta u^+(y,\tau) = 0, \quad (y,\tau) \in \Omega^+_{\rho,T}, \tag{1.9}$$

$$L_0^- u^-(y,\tau) \equiv -\Delta u^+(y,\tau) = 0, \quad (y,\tau) \in \Omega^-_{\rho,T}, \tag{1.10}$$

$$u^\pm(y,0) = u_0^\pm(y), y \in \overline{\Omega^\pm}; \quad \rho(\omega,0) = 0,\ \omega \in \Gamma, \tag{1.11}$$

$$u^\pm(y,\tau) = g^\pm(y,\tau), \quad (y,\tau) \in \Gamma^\pm_T, \tag{1.12}$$

$$u^+(y,\tau) = u^-(y,\tau) = 0, \quad (y,\tau) \in \Gamma_{\rho,T}, \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial u^+(y,\tau)}{\partial \nu_\tau} = \frac{\partial u^-(y,\tau)}{\partial \nu_\tau}, \quad (y,\tau) \in \Gamma_{\rho,T}, \tag{1.14}$$

где ν_τ — нормаль к $\Gamma_\rho(\tau)$, направленная в сторону $\Omega^+_{\rho,T}$.

Нетрудно видеть, что, в силу условий (1.13) и (1.14), а также в силу условий на $g^\pm(y,\tau)$ и принципа максимума, задача (1.9)–(1.14) полностью эквивалентна задаче (1.1)–(1.3) для квазилинейного уравнения (1.1) с определенной в (1.4) функцией $c(u)$, причем функция $u(y,\tau) \equiv u^\pm(y,\tau)$, $(y,\tau) \in \Omega^\pm_{\rho,T}$, удовлетворяет уравнению (1.1) в классическом смысле (благодаря непрерывности самой функции и ее градиента при переходе через поверхность раздела фаз).

Определим теперь нужные нам пространства гладких функций. Для $l > 0$ нецелого $H^l(\overline{\Omega}) \equiv C^l(\overline{\Omega})$ означает стандартное пространство функций $u(x)$, непрерывных в $\overline{\Omega}$ по Гельдеру с показателем $\alpha = l - [l]$ вместе со своими частными производными до порядка $[l]$ включительно с нормой $|u|^{(l)}_{\overline{\Omega}}$, $H^{l,l/2}(\overline{\Omega_T}) \equiv C^{l,l/2}(\overline{\Omega_T})$ — аналогичное пространство гладких функций $u(x,t)$ с гладкостью до порядка l по переменным x и с гладкостью до порядка $l/2$ по переменной t с нормой $|u|^{(l)}_{\overline{\Omega_T}}$ — см. определение этих пространств, например, в [26].

Для произвольной функции $f(x,t)$ и для двух точек (x,t), (y,τ) обозначим разности от функции $f(x,t)$ по переменным x и t, соответственно:

$$\Delta_{x,y} f(x,t) = f(x,t) - f(y,t), \quad \Delta_{t,\tau} f(x,t) = f(x,t) - f(x,\tau). \tag{1.15}$$

Следуя работе [27], введем следующую полунорму для $\alpha, \beta \in (0,1)$ и функции $u(x,t)$:

$$\begin{aligned}[u]^{(\alpha,\beta)}_{\overline{\Omega_T}} &= \sup_{(x,t),(y,\tau)\in\overline{\Omega_T}} \frac{|u(x,t) - u(y,t) - u(x,\tau) + u(y,\tau)|}{|x-y|^\alpha\,|t-\tau|^\beta} \\ &= \sup_{(x,t),(y,\tau)\in\overline{\Omega_T}} \frac{|\Delta_{t,\tau}\Delta_{x,y} u(x,t)|}{|x-y|^\alpha\,|t-\tau|^\beta}.\end{aligned} \tag{1.16}$$

Определим банахово пространство гладких функций $C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega_T})$ как пространство, в котором конечна норма ($\alpha \in (0,1)$):

$$\begin{aligned}|u|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\overline{\Omega_T}} &\equiv |u|_{C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega_T})} \\ &\equiv |u|^{(\alpha)}_{\overline{\Omega_T}} + \sum_{|s|=1} |D^s_x u|^{(2+\alpha)}_{\overline{\Omega_T}} + \sum_{|s|=2} |D^s_x u|^{(1+\alpha)}_{\overline{\Omega_T}} + \sum_{|s|=3} |D^s_x u|^{(\alpha)}_{\overline{\Omega_T}} \\ &\quad + |u_t|^{(\alpha)}_{\overline{\Omega_T}} + \sum_{|s|=1} |D^s_x u_t|^{(\alpha)}_{\overline{\Omega_T}} + \langle u_t\rangle^{(1/2)}_{t,\overline{\Omega_T}} + [u_t]^{(\alpha,1/2)}_{\overline{\Omega_T}},\end{aligned} \tag{1.17}$$

где

$$\langle v\rangle^{(\gamma)}_{t,\overline{\Omega}_T} \equiv \sup_{(x,t),(x,\bar t)\in\overline{\Omega}_T} \frac{|v(x,t) - v(x,\bar t)|}{|t-\bar t|^\gamma},$$

$$\langle v\rangle^{(\gamma)}_{x,\overline{\Omega}_T} \equiv \sup_{(x,t),(\overline{x},t)\in\overline{\Omega}_T} \frac{|v(x,t)-v(\overline{x},t)|}{|x-\overline{x}|^\gamma},$$

являются константами Гельдера от функции $v(x,t)$ по переменным t и x соответственно. Мы используем также обозначение

$$|v|^{(0)}_{\overline{\Omega}_T} = \max_{\overline{\Omega}_T} |v(x,t)|.$$

Отметим, что пространство $C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega_T})$ шире пространства $C^{3+\alpha\frac{3+\alpha}{2}}(\overline{\Omega_T})$. Оно отличается от пространства $C^{3+\alpha\frac{3+\alpha}{2}}(\overline{\Omega_T})$ тем, что не содержит $\langle u_t\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,\overline{\Omega}_T}$ с показателем $\frac{1+\alpha}{2}$, а содержит только $\langle u_t\rangle^{(1/2)}_{t,\overline{\Omega}_T}$ с показателем $1/2$, но вместо этого дополнительно содержит $[u_t]^{(\alpha,1/2)}_{\overline{\Omega}_T}$ (для функций из пространства $C^{3+\alpha\frac{3+\alpha}{2}}(\overline{\Omega_T})$ последняя полунорма также конечна). По поводу свойств пространства $C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega_T})$ см. [24], отметим только, что производные от функций этого класса по пространственным переменным принадлежат в точности тем же пространствам, что и соответствующие производные от функций из стандартного класса $C^{3+\alpha\frac{3+\alpha}{2}}(\overline{\Omega_T})$.

Аналогично, обычным образом с использованием локальной параметризации определяются поверхности классов $C^{l,l/2}$ и $C^{3+\alpha;3/2,\alpha}$ и соответствующие классы функций, определенных на этих поверхностях.

Кроме того, аналогично [26], мы используем пространства с “нулем внизу”, то есть пространства $C^{l,l/2}_0$ и $C^{3+\alpha;3/2,\alpha}_0$. Эти пространства определяются как собственные подпространства соответствующих пространств, состоящие из функций, обращающихся в ноль при $t=0$ вместе со всеми своими производными по переменной t, допускаемым соответствующим пространством.

Относительно заданных функций в (1.9)–(1.14) мы, кроме условий (1.6) и (1.8), предполагаем следующее.

Пусть $\alpha\in(0,1)$ фиксировано. Поверхности Γ, $\Gamma^\pm$ и функции $u_0^\pm$, $g^\pm$ принадлежат классам

$$\Gamma,\Gamma^\pm\in C^{6+\alpha},\quad u_0^\pm(y)\in C^{6+\alpha}(\overline{\Omega}^\pm),\quad g^\pm(y,\tau)\in C^{6+\alpha}(\Gamma^\pm_T). \tag{1.18}$$

Кроме условий гладкости данных задачи, ввиду того, что мы хотим получить гладкое решение, мы предполагаем выполненными стандартные условия согласования граничных и начальных условий до первого порядка включительно при $\tau=0$, $y\in\Gamma,\Gamma^\pm$. Опишем эти условия.

Во-первых, должны выполняться условия согласования нулевого порядка:

$$u^{\pm}(y,0)|_{\Gamma^{\pm}} = u_0^{\pm}(y)|_{\Gamma^{\pm}} = g^{\pm}(y,0), \quad u^{\pm}(y,0)|_{\Gamma} = u_0^{\pm}(y)|_{\Gamma} = 0. \quad (1.19)$$

Заметим, далее, что из задачи (1.9)–(1.14) определяются начальные значения производных по времени от функций u^+, u^- и ρ, которые мы обозначим, соответственно,

$$u^{(1)+}(y) = \frac{\partial u^+}{\partial \tau}(y,0), \quad u^{(1)-}(y) = \frac{\partial u^-}{\partial \tau}(y,0), \quad \rho^{(1)}(y) = \frac{\partial \rho}{\partial \tau}(y,0).$$

Функция $u^{(1)+}(y)$ определяется из уравнения (1.9):

$$u^{(1)+}(y) = \frac{\partial u^+}{\partial \tau}(y,0) = \Delta u^+(y,0) = \Delta u_0^+(y) \in C^{4+\alpha}(\overline{\Omega}^+).$$

Эта функция должна удовлетворять условию на Γ^+

$$u^{(1)+}(y)|_{y\in\Gamma^+} = \frac{\partial u^+}{\partial \tau}(y,0)|_{y\in\Gamma^+} = \frac{\partial g^+}{\partial \tau}(y,0). \quad (1.20)$$

Определим теперь функцию $\rho^{(1)}(x) = \rho^{(1)}(\omega)$. Из условия (1.13) следует, что при $\tau \geq 0$ и при $(y,\tau) \in \Gamma_{\rho,T}$, то есть при $y = y(\omega,\tau) = y(\omega) + \overrightarrow{n}(\omega)\rho(\omega,\tau)$, выполнено

$$u^+(y(\omega) + \overrightarrow{n}(\omega)\rho(\omega,\tau),\tau) = 0.$$

Дифференцируя это равенство по τ при $\tau = 0$, ввиду определения функций $u^{(1)+}$ и $\rho^{(1)}(x)$, получаем

$$\frac{\partial u_0^+}{\partial \overrightarrow{n}}\rho^{(1)}(x) + u^{(1)+}(x) = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Отсюда

$$\rho^{(1)}(x) = -u^{(1)+}(x)/\frac{\partial u_0^+}{\partial \overrightarrow{n}} \in C^4(\Gamma). \quad (1.21)$$

Рассмотрим функцию $u^{(1)-}(x)$. По условию задачи, функция $u^-(y,\tau)$ при $\tau \geq 0$ удовлетворяет задаче

$$-\triangle u^-(y,\tau) = 0, \quad (y,\tau) \in \Omega^-_{\rho,T},$$

$$u^-(y,\tau)|_{\Gamma_T^-} = g^-(y,\tau), \quad u^-(y,\tau)|_{\Gamma_{\rho,T}} = 0. \quad (1.22)$$

Дифференцируя первые два из этих соотношений по τ при $\tau = 0$, причем понимая производную от уравнения Лапласа в смысле распределений, получаем соотношения

$$-\triangle u_\tau^-(y,0) = 0, \quad y \in \Omega^-, \quad (1.23)$$

$$u_\tau^-(y,0)|_{\Gamma^-} = g_\tau^-(y,0), \tag{1.24}$$

где уравнение понимается в обобщенном смысле. Так как при $(y,\tau) \in \Gamma_{\rho,T}$ выполнено $y = y(\omega,\tau) = y(\omega) + \overrightarrow{n}(\omega)\rho(\omega,\tau)$, то третье условие в (1.22) имеет вид

$$u^-(y(\omega) + \overrightarrow{n}(\omega)\rho(\omega,\tau),\tau) = 0.$$

Дифференцируя это соотношение по τ, получаем

$$\begin{aligned}\big\langle \nabla_y u^-(y(\omega) + \overrightarrow{n}(\omega)\rho(\omega,\tau),\tau)\rho_\tau(\omega,\tau), \overrightarrow{n}(\omega)\big\rangle \\ + u_\tau^-(y(\omega) + \overrightarrow{n}(\omega)\rho(\omega,\tau),\tau) = 0.\end{aligned} \tag{1.25}$$

Полагая в этом соотношении $\tau = 0$, получаем, что

$$u_\tau^-(y,0)|_\Gamma = -\frac{\partial u_0^-(y)}{\partial \overrightarrow{n}}\rho_\tau(\omega,0) = -\frac{\partial u_0^-(y)}{\partial \overrightarrow{n}}\rho^{(1)}(\omega). \tag{1.26}$$

Таким образом, функция $u^{(1)-}(y) = u_\tau^-(y,0)$ однозначно определяется из задачи (1.23), (1.24), (1.26), причем, ввиду наших предположений о гладкости данных задачи, $u^{(1)-}(y) \in C^{4+\alpha}(\overline{\Omega}^-)$.

Приведем, наконец, еще одно условие согласования на поверхности Γ при $\tau = 0$, которое является необходимым следствием условия (1.14). Полагая в этом условии, как и выше, $y = y(\omega,\tau) = y(\omega) + \overrightarrow{n}(\omega)\rho(\omega,\tau)$, дифференцируя полученное соотношение по τ при $\tau = 0$, используя условие (1.6) (благодаря которому сокращаются слагаемые с $\frac{\partial \nu_\tau}{\partial \tau}$), ввиду определения функций $u^{(1)+}$, $u^{(1)-}$ и $\rho^{(1)}$, получаем

$$\left(\frac{\partial^2 u_0^-}{\partial \overrightarrow{n}^2} - \frac{\partial^2 u_0^+}{\partial \overrightarrow{n}^2}\right)\rho^{(1)}(x) + \left(\frac{\partial u^{(1)-}}{\partial \overrightarrow{n}} - \frac{\partial u^{(1)+}}{\partial \overrightarrow{n}}\right) \equiv 0, \quad x \in \Gamma. \tag{1.27}$$

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 1.1. *Пусть в задаче* (1.9)–(1.14) *выполнены условия* (1.5), (1.6), (1.8), (1.18), (1.19), (1.20), (1.27). *Тогда для некоторого* $T > 0$ *задача* (1.9)–(1.14) *(а тем самым и задача* (1.1)–(1.3)*) имеет единственное гладкое решение для* $\tau \in [0,T]$, *причем*

$$|\rho|_{\Gamma_T}^{(3+\alpha)} + \left|u^+\right|_{\overline{\Omega}_{\rho,T}^+}^{(3+\alpha)} + \left|u^-\right|_{\overline{\Omega}_{\rho,T}^-}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)} \le C_0(T),$$

то есть, в частности, граница раздела фаз является гладкой поверхностью.

Доказательство этой теоремы будет дано в последующих параграфах статьи и базируется на методе, изложенном в [13, 28–30], где неизвестные функции удовлетворяют иным условиям на свободной границе, причем этот метод представляет собой, по существу, метод Ньютона решения нелинейных уравнений.

Общая схема применяемого нами метода такова. С помощью некоторой описанной ниже замены переменных, зависящей от неизвестной функции ρ, задача (1.9)–(1.14) сводится к задаче в известных фиксированных областях для неизвестной тройки $\psi = (u^+, u^-, \rho)$. При этом вся задача может быть представлена в виде уравнения в некоторых банаховых пространствах

$$A(\psi) = F \tag{1.28}$$

с некоторым гладким по ψ нелинейным оператором A (точные определения будут даны ниже). Далее определяется элемент $\psi_0 = (w^+, w^-, \sigma)$ как продолжение в область $t > 0$ начальных значений задачи (1.9)-(1.14) таким образом, что, кроме того, $\partial w^\pm/\partial t = \partial u^\pm/\partial t$, $\partial\sigma/\partial t = \partial\rho/\partial t$ при $t = 0$. При этом, ввиду требований повышенной гладкости начальных данных, элемент ψ_0 является более гладким, чем произвольный элемент ψ из рассматриваемого пространства. Затем уравнение (1.28) представляется в виде

$$A'(\psi_0)\varphi = [F - A(\psi_0)] - [A(\psi_0 + \varphi) - A(\psi_0) - A'(\psi_0)\varphi] \equiv F_0 + R(\varphi), \tag{1.29}$$

где $\varphi = \psi - \psi_0$, $A'(\psi_0)$ — линейный оператор, представляющий собой производную Фреше оператора $A(\psi)$ в точке ψ_0, то есть главная линейная часть оператора $A(\psi)$ в точке ψ_0. Ввиду повышенной гладкости элементов F и $A(\psi_0)$, а также ввиду гладкости оператора $A(\psi)$ по ψ, для правой части (1.29) при достаточно малых T и φ справедливы оценки (так как оператор $R(\varphi)$ содержит только “квадратичные” по φ слагаемые)

$$\begin{gathered} \|F_0\| \le CT^\delta, \quad \|R(\varphi)\| \le C\|\varphi\|^2, \\ \|R(\varphi_2) - R(\varphi_1)\| \le C\max_i \|\varphi_i\|\,\|\varphi_2 - \varphi_1\|. \end{gathered} \tag{1.30}$$

Далее нашей задачей будет показать, что линейный оператор $A'(\psi_0)$ имеет ограниченный обратный, и, следовательно, уравнение (1.29) может быть записано в виде

$$\varphi = [A'(\psi_0)]^{-1}F_0 + [A'(\psi_0)]^{-1}R(\varphi) \equiv K(\varphi). \tag{1.31}$$

В силу соотношений (1.30) легко проверить, что при достаточно малом $T > 0$ оператор $K(\varphi)$ в правой части последнего соотношения переводит достаточно малый шар $\mathcal{B}_r = \{\varphi : \|\varphi\| \leq r\}$ в себя и является там сжимающим, то есть имеет в $\mathcal{B}_r$ единственную неподвижную точку, что и дает решение уравнения (1.23), а, тем самым, и задачи (1.9)–(1.14).

Последующие параграфы статьи содержат конкретную реализацию этой схемы.

2. Сведение задачи (1.9)–(1.14) к задаче в фиксированных областях. Линеаризация задачи

Пусть функция $\chi(\lambda) \in C^\infty$ такова, что $\chi(0) = 1$, $0 \leq \chi(\lambda) \leq 1$, $\chi(\lambda) \equiv 0$ при $|\lambda| \geq \lambda_0$, $|\chi'| \leq 2/\lambda_0$, где λ_0 — число из соотношения (1.7). Пусть, далее, $\rho(\omega, t)$ — функция класса $C^{3+\alpha, \frac{3+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$, такая, что $|\rho| \leq \lambda_0/4$. Определим отображение $(x, t) \to (y, \tau)$ области Ω_T на саму себя по формуле (определения координат $(\omega, \lambda) = (\omega(x), \lambda(x))$ и окрестности $\mathcal{N}$ поверхности Γ даны выше в параграфе 1

$$e_\rho : \begin{cases} y = \begin{cases} x_\Gamma(\omega(x)) + \overrightarrow{n}(\omega(x))(\lambda(x) + \chi(\lambda(x))\rho(\omega(x), t)) \\ \qquad = x + \overrightarrow{n}(\omega(x))\chi(\lambda(x))\rho(\omega, t), & x \in \mathcal{N}; \\ x, & x \notin \mathcal{N}, \end{cases} \\ \tau = t. \end{cases} \tag{2.1}$$

Таким образом, в окрестности $\mathcal{N}_T \equiv \mathcal{N} \times [0, T]$ поверхности Γ_T, в которой отображение e_ρ только и отличается от тождественного, пространственные координаты (ω, λ) точек $y = y(x, t)$ и x связаны соотношениями

$$\omega(y) = \omega(x), \quad \lambda(y) = \lambda(x) + \chi(\lambda(x))\rho(\omega(x), t). \tag{2.2}$$

Легко видеть, что отображение e_ρ взаимно однозначно переводит области $\overline{\Omega}_T^\pm$ на области $\overline{\Omega}_{\rho,T}^\pm$, а образом поверхности Γ_T является искомая поверхность $\Gamma_{\rho,T}$. При этом, так как $\rho(\omega, 0) \equiv 0$, то $e_\rho(x, 0) \equiv (x, 0)$.

Отметим, что определение отображения e_ρ не зависит от выбора тех или иных локальных координат ω на различных участках поверхности Γ, а определяется только значениями функции $\rho(x, t)$ на поверхности Γ_T.

Функции $u^\pm$ после замены переменных будем для простоты обозначать тем же символом, то есть

$$u^\pm(x, t) \equiv u^\pm(y, \tau) \circ e_\rho(x, t),$$

причем $u^{\pm}(x,t)$ определены уже в известных фиксированных областях $\overline{\Omega}_T^{\pm}$.

После замены переменных в (1.9)–(1.14), определяемой отображением $e_\rho(x,t)$, задача (1.9)–(1.14) примет вид

$$L_\rho^+ u^+(x,t) \equiv \frac{\partial u^+}{\partial t} - \overrightarrow{h}_\rho \nabla u^+(x,t) - \nabla_\rho^2 u^+ = 0, \quad (x,t) \in \Omega_T^+, \qquad (2.3)$$

$$L_\rho^- u^-(x,t) \equiv -\nabla_\rho^2 u^- = 0, \quad (x,t) \in \Omega_T^-, \qquad (2.4)$$

$$u^{\pm}(x,0) = u_0^{\pm}(x), \quad x \in \overline{\Omega}^{\pm}; \quad \rho(\omega,0) = 0, \qquad (2.5)$$

$$u^{\pm}(x,t) = g^{\pm}(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma_T^{\pm}, \qquad (2.6)$$

$$u^+(x,t) = u^-(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Gamma_T, \qquad (2.7)$$

$$\frac{\partial u^+(x,t)}{\partial n} - \frac{\partial u^-(x,t)}{\partial n} = 0, \quad (x,t) \in \Gamma_T, \qquad (2.8)$$

где $L_\rho^{\pm}$ — соответствующие дифференциальные операторы, получающиеся после замены переменных из $L_0^{\pm}$, с коэффициентами, гладко зависящими от ρ (эта гладкость вытекает из построения отображения e_ρ и гладкости поверхности Γ), $\overrightarrow{n}$ — как и выше, нормаль к Γ, направленная внутрь Ω^+. Например, здесь

$$L_\rho^+ u^+ \equiv \frac{\partial u^+}{\partial t} - \overrightarrow{h}_\rho \nabla u^+ - \nabla_\rho^2 u^+, \quad L_\rho^- u^- \equiv -\nabla_\rho^2 u^-, \qquad (2.9)$$

где

$$\overrightarrow{h}_\rho(x,t) \equiv \left\{ \frac{\partial x_1}{\partial \lambda}, \dots, \frac{\partial x_N}{\partial \lambda} \right\} \frac{\chi(\lambda(x))}{1 + \chi'(\lambda)\rho(\omega(x),t)} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \qquad (2.10)$$

$$\nabla_\rho \equiv E_\rho(x,t)\nabla, \quad \nabla \equiv \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big), \qquad (2.11)$$

$E_\rho(x,t)$ — матрица, обратная к матрице Якоби преобразования $e_\rho : x \to y$, причем, так как $\rho \equiv 0$ при $t = 0$, то при $t = 0$ выполнено $E_\rho(x,0) \equiv I$, $\nabla_\rho \equiv \nabla$. Отметим, что E_ρ и $\overrightarrow{h}_\rho$ гладко зависят от ρ ввиду гладкой зависимости от ρ самой замены переменных. Подробный вывод полученных соотношений можно найти в [25, 28].

Таким образом, нелинейный оператор $A(\psi)$, $\psi = (u^+, u^-, \rho)$, упомянутый в параграфе 1, определяется левыми частями соотношений (2.3)–(2.8).

Построим теперь тот элемент ψ_0, на котором будет линеаризовано уравнение $A(\psi) = F$, как это описано выше в параграфе 1.

Продолжим функции $u_0^{\pm}(y)$, $u^{(1)\pm}(y)$ с областей $\overline{\Omega}^{\pm}$ на всю область $\overline{\Omega}$ с сохранением класса и тех же обозначений и построим, далее, такие функции $w^{\pm}(y,\tau)$, определенные в $\overline{\Omega}_T$, и функцию $\sigma(\omega,t)$, определенную на Γ_T, что

$$w^{\pm}(y,0) = u_0^{\pm}(y), \quad \frac{\partial w^{\pm}}{\partial \tau}(y,0) = u^{(1)\pm}(y) = \frac{\partial u^{\pm}}{\partial \tau}(y,0), \tag{2.12}$$

$$\sigma(\omega,0) = \rho(\omega,0) = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t}(\omega,0) = \rho^{(1)}(\omega) = \frac{\partial \rho}{\partial t}(\omega,0), \tag{2.13}$$

$$w^{\pm}(y,\tau) = g^{\pm}(y,\tau) \ \text{ на } \Gamma_T^{\pm}. \tag{2.14}$$

Способ построения таких функций, то есть продолжения через поверхность Γ и в область $t > 0$ описан, например, в [26], причем построенные функции сохраняют ту же норму, что и $u_0^{\pm}$, то есть

$$|w^{\pm}|_{\overline{\Omega}_T}^{(6+\alpha)} + |\sigma|_{\Gamma_T}^{(6+\alpha)} \le C(|u_0^+|_{\overline{\Omega}^+}^{(6+\alpha)} + |u_0^-|_{\overline{\Omega}^-}^{(6+\alpha)} + |g^+|_{\Gamma_T^+}^{(6+\alpha)} + |g^-|_{\Gamma_T^-}^{(6+\alpha)}). \tag{2.15}$$

Введем в рассмотрение замену координат e_σ, которая означает замену (2.1) с $\rho = \sigma$, а также функции $w^{\pm} \circ e_\sigma$. Тройка $\psi_0 = (w^+ \circ e_\sigma, w^- \circ e_\sigma, \sigma)$ и есть, по существу тот элемент, на котором будет линеаризована задача (2.3)–(2.8). Однако, процедура линеаризации соотношений (2.3)–(2.8), приведенная ниже, будет несколько отличаться от непосредственного нахождения производной Фреше от операторов в (2.3)–(2.8) по переменной $\psi = (u^+, u^-, \rho)$ в точке $\psi_0 = (w^+ \circ e_\sigma, w^- \circ e_\sigma, \sigma)$. Данное отличие имеет целью упростить процедуру линеаризации и получить в результате более простые соотношения. Так, в работах [13, 28–30] было выяснено, что если после непосредственного нахождения главной линейной части (производной Фреше) соотношений (2.3)–(2.8), вместо приращений $(u^{\pm} - w^{\pm} \circ e_\sigma)$ ввести новые переменные

$$\begin{aligned}(u^{\pm} - w^{\pm} \circ e_\sigma) - \left(\frac{\partial w^{\pm}}{\partial \lambda} \circ e_\sigma\right) \chi(\lambda)(\rho - \sigma) \\ = u^{\pm} - \left[w^{\pm} \circ e_\sigma + \left(\frac{\partial w^{\pm}}{\partial \lambda} \circ e_\sigma\right) \chi(\lambda)(\rho - \sigma)\right],\end{aligned} \tag{2.16}$$

то дифференциальные операторы в (2.3), (2.4) принимают прежний простой вид. Это, по существу, связано с тем, что в наших обозначениях $u^{\pm}(x,t) = u^{\pm}(y,\tau) \circ e_\rho(x,t)$, так что “вариация” переменных $u^{\pm}(y,\tau) \circ e_\rho(x,t)$ связана, по существу с изменением самих функций, $u^{\pm}(y,\tau)$ и с изменением отображения $e_\rho(x,t)$. Отметим в этой связи, что для $\delta(\omega,t) \in {}^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$, как легко проверить,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{w^{\pm}\circ e_{\sigma+\varepsilon\delta} - w^{\pm}\circ e_{\sigma}}{\varepsilon} = \left(\frac{\partial w^{\pm}}{\partial\lambda}\circ e_{\sigma}\right)\chi(\lambda(x))\delta(\omega(x),t) \tag{2.17}$$

является главной линейной частью отображения $\rho \to w^{\pm}\circ e_{\rho}$ при $\rho=\sigma$. В работе [31] было замечено, что, если вместо вычитания в (2.16) нулевой и линейной по $(\rho-\sigma)$ частей отображения $\rho\to w^{\pm}\circ e_{\rho}$, вычесть полное выражение $w^{\pm}\circ e_{\rho}$, то операция линеаризации упрощается. В соответствии с этим, обозначим

$$v^{\pm}(x,t) = u^{\pm}(x,t) - w^{\pm}(y,\tau)\circ e_{\rho}(x,t), \quad \delta(\omega,t) = \rho(\omega,t)-\sigma(\omega,t). \tag{2.18}$$

Учитывая, что для любой функции f

$$(L_0^{\pm} f)\circ e_{\rho} = L_{\rho}^{\pm}(f\circ e_{\rho}),$$

так что

$$L_{\rho}^{\pm}(w^{\pm}\circ e_{\rho}) = (L_0^{\pm}w^{\pm})\circ e_{\rho},$$

представим соотношения (2.3)-(2.8) в виде (линеаризация):

$$\begin{aligned} L_0^{+}v^{+} &= \frac{\partial v^{+}}{\partial t} - \triangle v^{+} \\ &= -\left\{(L_{\sigma}^{+}-L_0^{+})v^{+}\right\} - \left\{(L_{\rho}^{+}-L_{\sigma}^{+})v^{+}\right\} - \left\{(L_0^{+}w^{+})\circ e_{\rho}\right\} \\ &\equiv -F_1^{+}(v^{+}) - F_2^{+}(v^{+},\delta) - F_3^{+}(\delta), \quad (x,t)\in\Omega_T^{+}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} L_0^{-}v^{-} = \triangle v^{-} &= -\left\{\left(\nabla_{\sigma}^{2}-\nabla^{2}\right)v^{-}\right\} - \left\{\left(\nabla_{\rho}^{2}-\nabla_{\sigma}^{2}\right)v^{-}\right\} - (\triangle w^{-})\circ e_{\rho} \\ &\equiv -F_1^{-}(v^{-}) - F_2^{-}(v^{-},\delta) - F_3^{-}(\delta), \quad (x,t)\in\Omega_T^{-}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned} v^{\pm} + \frac{\partial u_0^{\pm}}{\partial\overline{n}}\delta &= -\left\{w^{\pm}\circ e_{\rho} - w^{\pm}\circ e_{\sigma} - \left[\frac{\partial w^{\pm}}{\partial\overline{n}}\circ e_{\sigma}\right]\delta\right\} \\ -\left\{\left[\frac{\partial w^{\pm}}{\partial\overline{n}}\circ e_{\sigma} - \frac{\partial u_0^{\pm}}{\partial\overline{n}}\right]\delta\right\} &\equiv -F_4^{\pm}(\delta) - F_5^{\pm}(\delta), \quad (x,t)\in\Gamma_T, \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^{+}}{\partial\overline{n}} - \frac{\partial v^{-}}{\partial\overline{n}} &= \frac{\partial}{\partial\overline{n}}\left(w^{-}\circ e_{\rho} - w^{+}\circ e_{\rho}\right) \\ &= \left(\frac{\partial w^{-}}{\partial\lambda} - \frac{\partial w^{+}}{\partial\lambda}\right)\circ e_{\sigma+\delta} \equiv F_6(\delta), \quad (x,t)\in\Gamma_T, \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$v^{\pm}(x,t)|_{\Gamma_T^{\pm}} = 0, \tag{2.23}$$

$$v^{\pm}(x,0) = 0, \quad x \in \Omega^{\pm}, \quad \delta(\omega,0) = 0. \tag{2.24}$$

где мы учли, что $\chi(\lambda) \equiv 1$ в окрестности Γ и отображения e_ρ и e_σ являются тождественными отображениями вне некоторой окрестности Γ.

Таким образом, исходная задача свелась к нахождению функций $v^{\pm}(x,t)$ и $\delta(\omega(x),t)$, удовлетворяющих соотношениям (2.19)–(2.24). При этом функции $v^{\pm}$ и δ построены так, что $v^{\pm}(x,0) \equiv 0$, $\frac{\partial v^{+}(x,0)}{\partial t} \equiv 0$, $\delta(\omega,0) \equiv 0$, $\frac{\partial \delta(\omega,0)}{\partial t} \equiv 0$, то есть мы должны искать решение задачи (2.19)–(2.24) в классах

$$v^{+} \in C_0^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T^{+}), \quad v^{-} \in C_0^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega}_T^{-}), \quad \delta \in C_0^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\Gamma_T),$$

где ноль внизу в обозначении пространства, напомним, означает, что сама функция и все допускаемые классом производные по времени t обращаются в 0 при $t=0$. Принципиально важно то обстоятельство, что для таких классов с нулем имеют место следующие неравенства. Если $u, v \in C_0^{l,l/2}$, то

$$|u|_{\overline{\Omega}_T}^{(l')} \le CT^{\frac{l-l'}{2}} |u|_{\overline{\Omega}_T}^{(l)}, \quad l' < l,$$

$$|uv|_{\overline{\Omega}_T}^{(l)} \le C\left\{|u|_{\overline{\Omega}_T}^{([l])} |v|_{\overline{\Omega}_T}^{(l)} + |u|_{\overline{\Omega}_T}^{(l)} |v|_{\overline{\Omega}_T}^{([l])}\right\} \le CT^{\frac{l-[l]}{2}} |u|_{\overline{\Omega}_T}^{(l)} |v|_{\overline{\Omega}_T}^{(l)}. \tag{2.25}$$

Отметим, что второе из этих соотношений верно и для пространств $C_0^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega}_T)$. Доказательство этих неравенств можно найти в [26, 32].

Отметим, далее, что из условий согласования (1.6), (1.19), (1.20), (1.27) и из построения функций σ и $w^{\pm}$ следует, что если в правых частях соотношений (2.19)–(2.22) зафиксировать некоторые заданные функции $v^{+} \in C_0^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T^{+})$, $v^{-} \in C_0^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega}_T^{-})$, $\delta \in C_0^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$, то правые части становятся функциями из пространств с нулем внизу:

$$F_1^{\pm}, F_2^{\pm}, F_3^{\pm} \in C_0^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T^{\pm}),$$

$$F_4^{\pm}, F_5^{\pm} \in C_0^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\Gamma_T), \quad F_6 \in C_0^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T).$$

Определим пространство

$$\mathcal{H} = C_0^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T^{+}) \times C_0^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega}_T^{-}) \times C_0^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\Gamma_T) \tag{2.26}$$

с элементами

$$\psi = (v^+, v^-, \delta) \in \mathcal{H}.$$

Правые части соотношений (2.19)–(2.22) мы будем при этом обозначать как $F_i^{\pm}(\psi)$, $F_6(\psi)$, в частности, $F_i^{\pm}(0) = F_i^{\pm}(\psi)|_{\psi=0}$, $F_6(0) = F_6(\psi)|_{\psi=0}$. Кроме того, обозначим через $\mathcal{B}_r$ замкнутый шар в $\mathcal{H}$ радиуса r с центром в нуле

$$\mathcal{B}_r = \{\psi \in \mathcal{H} : \quad \|\psi\| \le r\}. \tag{2.27}$$

Сделаем еще замечание по поводу обозначений. Поскольку отображение e_ρ отлично от тождественного только в окрестности $\mathcal{N}_T$ поверхности Γ_T, а в этой окрестности каждой пространственной координате x точки $(x,t) \in \mathcal{N}_T$ однозначно соответствует точка $\omega(x) \in \Gamma$ на поверхности Γ с теми или иными локальными координатами ω, то мы можем считать функции ρ, σ, δ определенными не только на Γ_T но и во всей окрестности $\mathcal{N}_T$ в соответствии с равенством $\rho(x,t) \equiv \rho(\omega(x),t)$, которое, очевидно, не зависит от выбора тех или иных локальных координат ω, а зависит только от значений указанных функций на поверхности Γ_T. При этом, так как $\Gamma \in C^6$, то отображение $x \to \omega(x)$ принадлежит классу C^5, так что

$$|\rho(x,t)|^{(3+\alpha)}_{\mathcal{N}_T} \le C|\rho(\omega,t)|^{(3+\alpha)}_{\Gamma_T}.$$

Мы можем также считать функции $\rho(x,t) \equiv \rho(\omega(x),t)$ продолженными за пределы $\mathcal{N}_T$ с сохранением класса — их значения вне $\mathcal{N}_T$ не влияют на отображение e_ρ и, следовательно, не участвуют ни в каких из используемых соотношений.

Лемма 2.1. *Для $\psi \in \mathcal{H}$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{B}_r$ функции $F_1^+(\psi), F_2^+(\psi), F_3^+(\psi)$, $F_4^{\pm}(\psi), F_5^{\pm}(\psi), F_6(\psi)$ обладают следующими свойствами. Все они принадлежат пространствам с нулем внизу*

$$F_1^+, F_2^+, F_3^+ \in C_0^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T^{\pm}),$$

$$F_4^{\pm}, F_5^{\pm} \in C_0^{3+\alpha, \frac{3+\alpha}{2}}(\Gamma_T), \quad F_6 \in C_0^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T).$$

Кроме того, справедливы следующие оценки

$$\left|F_1^+(0)\right|^{(1+\alpha)}_{\overline{\Omega}_T^+} + \left|F_2^+(0)\right|^{(1+\alpha)}_{\overline{\Omega}_T^+} + \left|F_3^+(0)\right|^{(1+\alpha)}_{\overline{\Omega}_T^+} \le CT^\mu, \tag{2.28}$$

$$\left|F_4^{\pm}(0)\right|^{(3+\alpha)}_{\Gamma_T} + \left|F_5^{\pm}(0)\right|^{(3+\alpha)}_{\Gamma_T} \le CT^\mu, \tag{2.29}$$

$$|F_6(0)|^{(2+\alpha)}_{\Gamma_T} \le CT^\mu, \tag{2.30}$$

$$\left|F_1^+(\psi_2) - F_1^+(\psi_1)\right|_{\Omega_T^+}^{(1+\alpha)} \leq C_r T^\mu \left\|\psi_2 - \psi_1\right\|, \tag{2.31}$$

$$\left|F_2^+(\psi_2) - F_2^+(\psi_1)\right|_{\Omega_T^+}^{(1+\alpha)} \leq C_r r \left\|\psi_2 - \psi_1\right\|, \tag{2.32}$$

$$\left|F_3^+(\psi_2) - F_3^+(\psi_1)\right|_{\Omega_T^+}^{(1+\alpha)} \leq C_r T^\mu \left\|\psi_2 - \psi_1\right\|, \tag{2.33}$$

$$\left|F_4^\pm(\psi_2) - F_4^\pm(\psi_1)\right|_{\Gamma_T}^{(3+\alpha)} \leq C_r r \left\|\psi_2 - \psi_1\right\|, \tag{2.34}$$

$$\left|F_5^\pm(\psi_2) - F_5^\pm(\psi_1)\right|_{\Gamma_T}^{(3+\alpha)} \leq C_r T^\mu \left\|\psi_2 - \psi_1\right\|, \tag{2.35}$$

$$\left|F_6(\psi_2) - F_6(\psi_1)\right|_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)} \leq C_r T^\mu \left\|\psi_2 - \psi_1\right\|. \tag{2.36}$$

Константа C_r в этих неравенствах остается ограниченной при ограниченных r.

Мы не приводим подробное доказательство этой леммы, так как оно полностью аналогично доказательству соответствующей леммы в [28]. Поясним только, что утверждение данной леммы следует из гладкой зависимости матрицы E_ρ и вектора $\overrightarrow{h}_\rho$ от ρ и того, что оцениваемые выражения содержат только "квадратичные" и "более гладкие" слагаемые, причем последние обращаются в ноль при $t = 0$ в силу условий согласования. Для оценки "более гладких" слагаемых мы применяем неравенства (2.25), а для оценки "квадратичных" слагаемых мы, ввиду гладкости всех рассматриваемых выражений, просто применяем теорему о среднем.

Рассмотрим теперь выражения F_1^-, F_2^- и F_3^-. Необходимость отдельного рассмотрения этих выражений связана с тем, что из эллиптического уравнения (2.20) (в котором переменная t является только параметром) нам необходимо получить его решение v^- из класса $C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega}_T^-)$ с гладкостью порядка $3/2$ по переменной t, в то время, как правая часть уравнения (2.20) принадлежит только классу $C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T^-)$. Вообще говоря, это, очевидно, невозможно. Но в нашем случае функции F_1^-, F_2^- и F_3^- имеют специальный вид комбинаций производных по переменным x от некоторых функций, имеющих нужную гладкость по переменной t.

Лемма 2.2. *Выражения $F_1^-(\psi)$, $F_2^-(\psi)$ и $F_3^-(\psi)$ обладают следующими свойствами:*

$$F_1^-(0) = F_2^-(0) \equiv 0, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}_T^-, \tag{2.37}$$

$$\left|F_3^-(0)\right|_{\Omega_T^-}^{(3+\alpha)} \leq C T^\mu, \tag{2.38}$$

выражение $F_1^-(\psi)$ *представимо в виде*

$$F_1^-(\psi) = \sum_{i=1}^N a_i(x,t)\frac{\partial v^-}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 v^-}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{2.39}$$

где

$$\sum_{i=1}^N |a_i|^{(3+\alpha)}_{\overline{\Omega}_T^-} + \sum_{i,j=1}^N |a_{ij}|^{(4+\alpha)}_{\overline{\Omega}_T^-} \le C, \tag{2.40}$$

$$a_i(x,0) \equiv 0, \quad a_{ij}(x,0) \equiv 0, \quad i,j = \overline{1,N}, \tag{2.41}$$

соответственно для $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{B}_r$

$$F_1^-(\psi_2) - F_1^-(\psi_1) = \sum_{i=1}^N a_i(x,t)\frac{\partial\left(v_2^- - v_1^-\right)}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2\left(v_2^- - v_1^-\right)}{\partial x_i \partial x_j}; \tag{2.42}$$

выражение $F_2^-(\psi_2) - F_2^-(\psi_1)$ *представимо в виде*

$$\begin{aligned} F_2^-(\psi_2) - F_2^-(\psi_1) &\\ = \delta_2\Bigg[\sum_{i=1}^N b_i^{(0)}\frac{\partial\left(v_2^- - v_1^-\right)}{\partial x_i} &+ \sum_{i,j=1}^N b_{ij}^{(0)}\frac{\partial^2\left(v_2^- - v_1^-\right)}{\partial x_i\partial x_j}\Bigg] \\ + \sum_{k=1}^N \frac{\partial\delta_2}{\partial x_k}\Bigg[\sum_{i=1}^N b_i^{(k)}\frac{\partial\left(v_2^- - v_1^-\right)}{\partial x_i} &+ \sum_{i,j=1}^N b_{ij}^{(k)}\frac{\partial^2\left(v_2^- - v_1^-\right)}{\partial x_i\partial x_j}\Bigg] \\ + \sum_{k,l=1}^N \frac{\partial^2\delta_2}{\partial x_k\partial x_l}\Bigg[\sum_{i=1}^N b_i^{(k,l)}\frac{\partial\left(v_2^- - v_1^-\right)}{\partial x_i}\Bigg] & \\ + (\delta_2-\delta_1)\Bigg[\sum_{i=1}^N d_i^{(0)}\frac{\partial v_1^-}{\partial x_i} &+ \sum_{i,j=1}^N d_{ij}^{(0)}\frac{\partial^2 v_1^-}{\partial x_i\partial x_j}\Bigg] \\ + \sum_{k=1}^N \frac{\partial(\delta_2-\delta_1)}{\partial x_k}\Bigg[\sum_{i=1}^N d_i^{(k)}\frac{\partial v_1^-}{\partial x_i} &+ \sum_{i,j=1}^N d_{ij}^{(k)}\frac{\partial^2 v_1^-}{\partial x_i\partial x_j}\Bigg] \\ + \sum_{k,l=1}^N \frac{\partial^2(\delta_2-\delta_1)}{\partial x_k\partial x_l}\Bigg[\sum_{i=1}^N d_i^{(k,l)}\frac{\partial v_1^-}{\partial x_i}\Bigg]&, \end{aligned} \tag{2.43}$$

с некоторыми функциями

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k)}(x,\delta_2,\nabla\delta_2), \quad b_{ij}^{(k)} = b_{ij}^{(k)}(x,\delta_2,\nabla\delta_2), \quad k=\overline{0,N},\ i,j=\overline{1,N},$$

$$b_i^{(k,l)} = b_i^{(k,l)}(x,\delta_2,\nabla\delta_2), \quad k,l=\overline{1,N},\ i=\overline{1,N},$$

$$d_i^{(k)} = d_i^{(k)}(x, \delta_1, \delta_2, \nabla\delta_1, \nabla\delta_2), \quad d_{ij}^{(k)} = d_{ij}^{(k)}(x, \delta_1, \delta_2, \nabla\delta_1, \nabla\delta_2),$$
$$k = \overline{0, N}, \quad i, j = \overline{1, N},$$

$$d_i^{(k,l)} = d_i^{(k,l)}(x, \delta_1, \delta_2, \nabla\delta_1, \nabla\delta_2), \quad k, l = \overline{1, N}, \ i = \overline{1, N}.$$

причем функции $b_i^{(k)}, b_{ij}^{(k)}, b_i^{(k,l)}, d_i^{(k)}, d_{ij}^{(k)}, d_i^{(k,l)}$ *принадлежат классу* C^4 *по своим аргументам и их* C^4*-нормы ограничены константой* $C(r)$*, остающейся ограниченной при ограниченных* r*; выражение* $F_3^-(\psi_2) - F_3^-(\psi_1)$ *можно представить в виде*

$$F_3^-(\psi_2) - F_3^-(\psi_1) = F_3^-(\delta_2) - F_3^-(\delta_1) = B(x,t)(\delta_2 - \delta_1), \tag{2.44}$$

где
$$|B(x,t)|^{(3+\alpha)}_{\overline{\Omega}_T^-} \le C(r), \quad B(x,0) \equiv 0. \tag{2.45}$$

Доказательство. Соотношение (2.37) очевидно. Далее,

$$F_3^-(0) = \big(\triangle w^-\big) \circ e_\sigma \in C^{4+\alpha, \frac{4+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T^-) \subset C^{3+\alpha', \frac{3+\alpha'}{2}}(\overline{\Omega}_T^-), \quad \alpha' \in (\alpha, 1),$$

и, кроме того,

$$F_3^-(0)|_{t=0} = \big(\triangle w^-\big) \circ e_\sigma|_{t=0} = \triangle u_0^- \equiv 0,$$
$$\left.\frac{\partial F_3^-(0)}{\partial t}\right|_{t=0} = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\triangle u_0^-\right)\rho^{(1)} + \triangle u^{(1)-} \equiv 0$$

по построению функций w^- и σ. Поэтому, оценка (2.38) следует из неравенства (2.25).

Соотношения (2.39) и (2.40), (2.41) легко следуют из гладкости функции σ и того, что при $t = 0$ выполнено $\sigma(x, 0) \equiv 0$, так что при $t = 0$ выполнено $\nabla_\sigma^2 \equiv \nabla^2$. Поэтому коэффициенты оператора $(\nabla_\sigma^2 - \nabla^2)$ обращаются в ноль при $t = 0$. Соотношение (2.42) есть следствие линейности выражения F_1^- по v^-.

Далее, несколько громоздкое соотношение (2.43) следует из двух следующих соотношений ($\psi_i = (v_i^+, v_i^-, \delta_i)$):

$$F_2^-(\psi_2) - F_2^-(\psi_1) = \big(\nabla_{\rho_2}^2 - \nabla_\sigma^2\big)\big(v_2^- - v_1^-\big) + \big(\nabla_{\rho_2}^2 - \nabla_{\rho_1}^2\big)v_1^-, \tag{2.46}$$

где $\nabla_\rho = E_\rho\nabla$, $E_\rho = E(x, \rho, \nabla\rho)$,

$$E_{\rho_2} - E_{\rho_1}$$
$$= \left[\int_0^1 \frac{\partial E}{\partial\rho}\,(x, \rho_1 + \omega(\delta_2 - \delta_1), \nabla\rho_1 + \omega\nabla(\delta_2 - \delta_1))\,d\omega\right](\delta_2 - \delta_1)$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\left[\int_0^1 \frac{\partial E}{\partial \rho_{x_k}}\left(x,\rho_1+\omega(\delta_2-\delta_1),\nabla\rho_1+\omega\nabla(\delta_2-\delta_1)\right)d\omega\right] \times \frac{\partial}{\partial x_k}(\delta_2-\delta_1), \quad (2.47)$$

и аналогичное представление для $E_{\rho_2}-E_\sigma$ с учетом того, что $\rho_2-\sigma=\delta_2$. Подставляя соотношения (2.47) в (2.46), получаем соотношение (2.43). Гладкость же указанных в (2.43) коэффициентов следует из гладкости исходных данных задачи, в частности, из гладкой зависимости матрицы E_ρ от ρ и $\nabla\rho$.

Соотношение (2.44) получается аналогично:

$$F_3^-(\psi_2)-F_3^-(\psi_1)=\left(\triangle w^-\right)\circ e_{\rho_2}-\left(\triangle w^-\right)\circ e_{\rho_1}$$
$$=\left[\int_0^1 \frac{\partial\triangle w^-}{\partial\lambda}\circ e_{\rho_1+\omega(\delta_2-\delta_1)}d\omega\right](\delta_2-\delta_1)\equiv B(x,t)(\delta_2-\delta_1).$$

При этом отметим, что, так как при $t=0$ отображение $e_{\rho_1+\omega(\delta_2-\delta_1)}$ является тождественным отображением при любом $\omega\in[0,1]$ и так как

$$\triangle w^-(x,0)=\triangle u_0^-(x,0)\equiv 0,$$

то $B(x,0)\equiv 0$. Гладкость функции $B(x,t)$ следует из гладкости функции w^- и гладкости отображения e_ρ.

На этом мы завершим доказательство леммы. □

Замечание 2.1. Из леммы 2.2 следует, что правые части соотношения (2.20) удовлетворяют условиям теорем 8–10 работы [24] .

3. Модельная эллиптико-параболическая задача в полупространствах

Пусть

$$R_+^N=\left\{x=(x',x_N)\in\mathbb{R}^N : x_N\ge 0\right\},$$

$$R_-^N=\left\{x=(x',x_N)\in\mathbb{R}^N : x_N\le 0\right\},$$

$$R^{N-1}=\left\{x=(x',x_N)\in\mathbb{R}^N : x_N=0\right\}, \quad R_{\pm,T}^N=R_\pm^N\times[0,T],$$

$$R_{\pm,\infty}^N=R_\pm^N\times[0,\infty), \quad R_T^{N-1}=R^{N-1}\times[0,T],$$

$$R_\infty^{N-1}=R^{N-1}\times[0,\infty), \quad A^+,A^-=\mathrm{const}>0, \quad k,l\in\{1,2,\dots,N\}.$$

Рассмотрим следующую задача для нахождения неизвестных функций $u^+(x,t)$, $u^-(x,t)$ и $\rho(x',t)$, определенных в $\overline{R^N_{+,\infty}}$, $\overline{R^N_{+,\infty}}$ и $\overline{R^{N-1}_\infty}$ соответственно и удовлетворяющих следующим соотношениям

$$\frac{\partial u^+}{\partial t} - \triangle u^+ = f_1^+(x,t), \quad (x,t) \in R^N_{+,\infty}, \tag{3.1}$$

$$- \triangle u^- = S(x, f_1^{-(1)}(x,t), \nabla f_1^{-(1)}) \frac{\partial f_1^{-(2)}}{\partial x_i} \frac{\partial f_1^{-(3)}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 f_1^{-(4)}}{\partial x_k \partial x_l}, \quad (x,t) \in R^N_{-,\infty}, \tag{3.2}$$

$$u^\pm(x',0,t) + A^\pm \rho(x',t) = f_2^\pm(x',t), \quad x_N = 0, t \geq 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial x_N}(x',0,t) - \frac{\partial u^-}{\partial x_N}(x',0,t) = f(x',t), \quad x_N = 0, t \geq 0, \tag{3.4}$$

$$u^\pm(x', x_N, t) \to 0, \quad |x_N| \to \infty, \tag{3.5}$$

$$u^+(x,0) = 0, \quad u^-(x,0) = 0, \quad \rho(x',0) = 0. \tag{3.6}$$

Функции, входящие в правые части соотношений (3.1)–(3.4) предполагаются финитными с носителями в $Q_{R,T} = \{(x,t) : |x| \leq R,\ 0 \leq t \leq T\}$ и принадлежащими следующим классам

$$\begin{gathered} f_1^+(x,t) \in C_0^{1+\alpha}(\overline{R^N_{+,\infty}}), \\ f_1^{-(i)}(x,t) \in C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{R^N_{-,\infty}}), \quad i = \overline{1,4}, \\ |f_1^{-(1)}|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\overline{R^N_{-,\infty}}} \leq M, \\ f_2^\pm(x,t) \in C_0^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(R^{N-1}_\infty), \quad f(x,t) \in C_0^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(R^{N-1}_\infty), \\ S(x,z,\xi) \in C^4(\overline{R^N_-} \times [-M,M] \times [-M,M]^N), \\ \|S(x,z,\xi)\|_{C^4} \leq S_0, \end{gathered} \tag{3.7}$$

причем или хотя бы одна из функций $f_1^{-(i)}$, $i = 2,3,4$, принадлежит классу с нулем $C_0^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{R^N_{-,\infty}})$ или хотя бы две из этих функций обращаются в ноль при $t = 0$.

Отметим, что, поскольку все правые части соотношений (3.1)–(3.4) обращаются в ноль при $t = 0$, и ввиду условий (3.6), для задачи (3.1)–(3.6) выполнены условия согласования до первого порядка включительно при $x_N = 0$, $t = 0$.

Лемма 3.1. *При выполнении условий* (3.7) *задача* (3.1)–(3.6) *имеет единственное решение из класса* $u^+ \in C_0^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\overline{R^N_{+,\infty}})$, $u^- \in C_0^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{R^N_{-,\infty}})$, $\rho \in C_0^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(R^{N-1}_\infty)$, *причем справедлива оценка*

$$\begin{aligned}|u^+|^{(3+\alpha)}_{R^N_{+,T}} + |u^-|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{R^N_{-,T}} + |\rho|^{(3+\alpha)}_{R^{N-1}_T} \le C(S_0,M,T)\mathbf{N}_T \\ \equiv C(S_0,M,T)\Big(|f_1^+|^{(1+\alpha)}_{R^N_{+,T}} + \prod_{r=2}^{4} \big|f_1^{-(r)}\big|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{R^N_{-,T}} + |f_2^+|^{(3+\alpha)}_{R^{N-1}_T} \\ + |f_2^-|^{(3+\alpha)}_{R^{N-1}_T} + |f|^{(2+\alpha)}_{R^{N-1}_T}\Big).\end{aligned} \tag{3.8}$$

Мы не приводим подробного доказательства данной леммы, так как оно полностью аналогично доказательству соответствующей леммы в [13] и получается посредством нахождения явного решения с помощью применения преобразований Лапласа и Фурье. При этом задача (3.1)–(3.6) может быть сведена к случаю, когда только $f(x,t)$ в (3.4) отлична от тождественного нуля — посредством представления неизвестных в виде суммы функций. Ключевым моментом является снятие правой части в эллиптическом уравнении (3.2), что делается на основании теоремы 10 работы [24]. В частности, для функции $\rho(x',t)$ в [13] получено представление

$$\rho(x',t) = \int_0^t d\tau \int_{R^{N-1}} G(x'-y,t-\tau) f(y,\tau)\,dy, \tag{3.9}$$

где $G(x',t)$ имеет явный вид

$$\begin{aligned}G(x',t) = C_1 t^{-\frac{N}{2}} \int_1^\infty \omega^{-\frac{N+2}{2}} \Big[(N-1) - 2\frac{(x')^2}{4t}\Big] \exp\Big(-\frac{(x')^2}{4t\omega}\Big) d\omega \\ + C_2 t^{-\frac{N}{2}} \exp\Big(-\frac{(x')^2}{4t}\Big).\end{aligned}$$

Дальнейшие рассуждения полностью аналогичны работе [13] и даже проще, так как в нашем случае функция $f(x,t)$ в (3.4) принадлежит обычному классу. □

4. Линейная эллиптико-параболическая задача в ограниченных областях

Рассмотрим в области $\Omega_T = \Omega_T^+ \cup \Omega_T^-$ следующую задачу для нахождения неизвестных функций $u^+(x,t)$, $u^-(x,t)$ и $\rho(\omega,t)$:

$$\frac{\partial u^+(x,t)}{\partial t} - \triangle u^+(x,t) = f_1^+(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T^+, \tag{4.1}$$

$$-\triangle u^-(x,t) = S(x, f_{11}^-, \nabla f_{11}^-)\frac{\partial f_{12}^-}{\partial x_i}\frac{\partial f_{13}^-}{\partial x_k}\frac{\partial^2 f_{14}^-}{\partial x_l \partial x_m} + a(x,t)\frac{\partial F_1^-}{\partial x_j}\frac{\partial^2 F_2^-}{\partial x_n \partial x_r}, \quad (x,t) \in \Omega_T^+, \tag{4.2}$$

$$u^\pm|_{\Gamma_T^\pm} = f_0^\pm(x,t), \tag{4.3}$$

$$u^\pm|_{\Gamma_T} + A^\pm(x)\rho = f_2^\pm(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma_T, \tag{4.4}$$

$$\left.\left(\frac{\partial u^+}{\partial \overline{n}} - \frac{\partial u^-}{\partial \overline{n}}\right)\right|_{\Gamma_T} = f_3(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma_T, \tag{4.5}$$

$$u^\pm(x,0) = 0, \quad \rho(\omega,0) = 0. \tag{4.6}$$

Здесь $A^\pm(x) \in C^{3+\alpha}(\Gamma)$ — заданные функции только от переменных x,

$$\nu \le A^\pm(x) \le \nu^{-1}. \tag{4.7}$$

Правые части соотношений (4.1)–(4.6) предполагаются принадлежащими следующим классам

$$\begin{gathered}
f_1^+ \in C_0^{3+\alpha, \frac{3+\alpha}{2}}(\overline{\Omega_T^+}), \quad f_{1i}^- \in C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega_T^-}), \quad i = \overline{1,4}, \\
F_1^-, F_2^- \in C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega_T^-}), \\
f_2^\pm \in C_0^{3+\alpha, \frac{3+\alpha}{2}}(\Gamma_T), \quad f_0^+ \in C_0^{3+\alpha, \frac{3+\alpha}{2}}(\Gamma_T), \\
f_0^- \in C_0^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\Gamma_T), \quad f_3 \in C_0^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T), \\
S(x,z,\xi) \in C^4(\overline{\Omega}^- \times [-M,M] \times [-M,M]^N), \quad \|S\|_{C^4} \le S_0, \\
\left|f_{11}^-\right|_{\overline{\Omega_T^-}}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)} \le M, \quad a(x,0) = 0,
\end{gathered} \tag{4.8}$$

и хотя бы одна из функций F_1^-, F_2^- обращается в ноль при $t=0$, а также или хотя бы одна из функций f_{1i}^-, $i=2,3,4$, принадлежит классу с нулем $C_0^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega_T^-})$ или хотя бы две из этих функций обращаются в ноль при $t=0$.

Теорема 4.1. *При выполнении* (4.8) *для решения* (u^+, u^-, ρ) *задачи* (4.1)–(4.6) *из классов*

$$u^+ \in C_0^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\overline{\Omega_T^+}), \quad u^- \in C_0^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega_T^-}), \quad \rho \in C_0^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\Gamma_T) \quad (4.9)$$

справедлива следующая априорная оценка

$$\begin{aligned} &\left|u^+\right|^{(3+\alpha)}_{\overline{\Omega}_T^+} + \left|u^-\right|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\overline{\Omega}_T^-} + |\rho|^{(3+\alpha)}_{\Gamma_T} \le C_{T,S_0,M}\left(\mathbf{N}_T + T^\mu \mathcal{M}_T\right) \\ &\equiv C_{T,S_0,M}\Bigg(\left|f_1^+\right|^{(1+\alpha)}_{\overline{\Omega}_T^+} + \prod_{r=2}^{4} \left|f_{1r}^-\right|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\overline{\Omega}_T^-} + \left|f_2^+\right|^{(3+\alpha)}_{\Gamma_T} \\ &+ \left|f_2^-\right|^{(3+\alpha)}_{\Gamma_T} + |f_3|^{(2+\alpha)}_{\Gamma_T} + \left|f_0^+\right|^{(3+\alpha)}_{\Gamma_T^+} + \left|f_0^-\right|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\Gamma_T^-} \Bigg) \\ &+ C_{T,S_0,M} T^\mu\, |a|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\overline{\Omega}_T^-} |F_1|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\overline{\Omega}_T^-} |F_2|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\overline{\Omega}_T^-}. \quad (4.10) \end{aligned}$$

Доказательство. Априорная оценка (4.10) получается по стандартной схеме получения априорных оценок Шаудера (см., например, [33], [34]) с использованием оценки эллиптико-параболической модельной задачи предыдущего параграфа. Отметим только, что применение стандартной техники априорных оценок дает сначала, вместо (4.10), оценку

$$\left|u^+\right|^{(3+\alpha)}_{\overline{\Omega}_T^+} + \left|u^-\right|^{(3+\alpha;3/2,\alpha)}_{\overline{\Omega}_T^-} + |\rho|^{(3+\alpha)}_{\Gamma_T} \le C_{T,S_0,M}\big(\mathbf{N}_T + T^\mu \mathcal{M}_T + \langle u^-\rangle^{(1/2)}_{t,\overline{\Omega}_T^-}\big) \quad (4.11)$$

со слагаемым $\langle u^-\rangle^{(1/2)}_{t,\overline{\Omega}_T^-}$ в правой части, т.к. эта величина не может быть интерполирована, ввиду особенности пространства $C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega}_T^-)$. Эта величина оценивается из эллиптической части задачи (4.2)–(4.4) для u^-. Из этой задачи, полностью аналогично оценкам работы [24], получается оценка

$$\langle u^-\rangle^{(1/2)}_{t,\overline{\Omega}_T^-} \le C_{T,S_0,M}\left(\mathbf{N}_T + T^\mu \mathcal{M}_T + \langle \rho\rangle^{(1/2)}_{t,\Gamma_T}\right).$$

Однако,

$$\langle \rho\rangle^{(1/2)}_{t,\Gamma_T} \le T^{\alpha/2} \langle \rho\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,\Gamma_T} \le T^{\alpha/2}\, |\rho|^{(3+\alpha)}_{\Gamma_T}.$$

Считая величину T достаточно малой, подставляя последнее неравенство в предыдущие неравенство, а затем в (4.11) и перенося величину с малым параметром $T^{\alpha/2}\,|\rho|^{(3+\alpha)}_{\Gamma_T}$ в левую часть (4.11), получаем оценку (4.10) при T достаточно малом. Двигаясь затем вверх по оси Ot с шагом $T/2$, как это сделано в [26, гл. IV], получаем оценку (4.10) на любом конечном интервале времени $[0, T]$. □

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия* (4.8). *Тогда задача* (4.1)–(4.6) *имеет единственное решение из классов*

$$u^+ \in C_0^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\overline{\Omega_T^+}), \quad u^- \in C_0^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega_T^-}), \quad \rho \in C_0^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\Gamma_T), \tag{4.12}$$

причем справедлива оценка (4.10).

Доказательство. Во первых, единственность решения из указанного класса следует из оценки (4.10), которая уже доказана в теореме 4.1. Поэтому докажем существование решения.

Далее, как и в случае модельной задачи в параграфе 3, не ограничивая общности, можно считать, что в задаче (4.1)–(4.6) отлична от тождественного нуля только функция $f_3(x,t)$. Действительно, общий случай сводится к указанному заменой неизвестных функций $u^\pm \to v^\pm$

$$u^\pm(x,t) = v^\pm(x,t) + w^\pm(x,t),$$

w^+ — решение уравнения (4.1) с граничными условиями

$$w^+(x,t)|_{\Gamma_T} = f_2^+, \quad w^+(x,t)|_{\Gamma_T^+} = f_0^+,$$

а w^- — решение уравнения (4.2) с граничными условиями

$$w^-(x,t)|_{\Gamma_T} = f_2^-, \quad w^-(x,t)|_{\Gamma_T^-} = f_0^-.$$

Нужные свойства и оценка (4.10) функции w^+ следуют из, например, [26], а свойства и оценка (4.10) для функции w^- следуют из теорем 8–10 работы [24]. Поэтому ниже в данном доказательстве мы считаем отличной только функцию $f_3(x,t)$.

Схема доказательства разрешимости задачи (4.1)–(4.6) состоит в следующем. Во первых, мы можем считать функцию продолженной с сохранением класса нулем в область $t < 0$ и продолженной с сохранением класса в область $t > T$ до функции, равной тождественному нулю при $t > 2T$. Мы произведем сглаживание функции $f_3(x,t)$ по переменной t, совершим в задаче (4.1)–(4.6) преобразование Лапласа по t и сведем ее к эллиптической задаче с параметром p — переменная преобразования Лапласа функции $\widetilde{f}_3(x,p)$. Далее, мы исключим из условия (4.4) неизвестное $\widetilde{\rho}$ (преобразование Лапласа от ρ — преобразованные функции мы обозначаем волной сверху) и получим для $\widetilde{u}^\pm$ хорошо известную задачу сопряжения. Получим оценку решения этой задачи в зависимости от параметра p и совершим в найденном решении обратное преобразование Лапласа. Полученные функции, по построению, дадут решение задачи (4.1)–(4.6) со сглаженной правой частью. Так как для полученного решения справедлива оценка

(4.10), то решение исходной задачи получается предельным переходом по параметру сглаживания.

Итак, пусть $f_3(x,t)$ продолжена для всех значений переменной t до финитной по t функции, как указано в предыдущем абзаце. Пусть $h \in (0,1/2)$ и пусть

$$g_h(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_h(t-\tau) f_3(x,\tau-3h)\,d\tau, \tag{4.13}$$

где $\omega_h(t)$ — семейство сглаживающих δ-образных функций класса C^∞ с параметром $h \in (0,1/2)$ и с носителями в интервале

$$\operatorname{supp}(\omega_h(t)) \subset [-h,h]. \tag{4.14}$$

Из того, что $f_3 \equiv 0$ при $t \le 0$ и из условия (4.14) следует, что

$$g_h(x,t) \equiv 0, \quad t \le h. \tag{4.15}$$

Кроме того, так как $f_3 \in C_0^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$, то несложная проверка показывает, что при любом $\gamma \in (0,1)$ выполнено $f_3(x,t-3h) \to f_3(x,t)$ в пространстве $C^{\gamma,\gamma/2}(\Gamma_T)$ при $h \to 0$, то есть

$$|f_3(x,t-3h) - f_3(x,t)|_{\Gamma_T}^{(\gamma)} \to 0, \quad h \to 0. \tag{4.16}$$

Поэтому таким же свойством обладают и функции $g_h(x,t)$

$$|g_h(x,t) - f_3(x,t)|_{\Gamma_T}^{(\gamma)} \to 0, \quad h \to 0. \tag{4.17}$$

Из свойства (4.15) функций $g_h(x,t)$ следует также, что

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} g_h(x,0) \equiv 0, \quad k = 1,2,\dots. \tag{4.18}$$

Кроме того, в силу того, что $f_3(x,t)$ принадлежит пространству с нулем $C_0^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$, то (и это важный момент доказательства) равномерно по h

$$|f_3(x,t-3h)|_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)} \le |f_3(x,t)|_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)}, \tag{4.19}$$

$$|g_h(x,t)|_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)} \le |f_3(x,t-3h)|_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)} \le |f_3(x,t)|_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)}. \tag{4.20}$$

Рассмотрим задачу (4.1)–(4.6) с заменой f_3 на g_h из (4.13). Совершим в этой задаче преобразование Лапласа по переменной t (обоснованность этой операции будет видна из приведенных ниже оценок) и обозначим преобразованные функции волной сверху, то есть при $p \in \mathbf{C}$,

$\mathbf{Re}p > 0$,

$$\widetilde{u}^{\pm}(x,p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} u^{\pm}(x,t)\,dt, \quad \mathrm{Re}\,p > 0.$$

Тогда задача (4.1)–(4.6) примет вид

$$-\triangle\widetilde{u}^{+}(x,p) + p\widetilde{u}^{+}(x,p) = 0, \quad x \in \Omega^{+}, \tag{4.21}$$

$$-\triangle\widetilde{u}^{-}(x,p) = 0, \quad x \in \Omega^{-}, \tag{4.22}$$

$$\widetilde{u}^{\pm}(x,p)|_{\Gamma^{\pm}} = 0, \tag{4.23}$$

$$\widetilde{u}^{\pm}|_{\Gamma} + A^{\pm}(x)\rho = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{4.24}$$

$$\left(\frac{\partial\widetilde{u}^{+}}{\partial\overline{n}} - \frac{\partial\widetilde{u}^{-}}{\partial\overline{n}}\right)\bigg|_{\Gamma_T} = \widetilde{g}_h(x,p), \quad x \in \Gamma, \tag{4.25}$$

где при каждом фиксированном p выполнено $\widetilde{g}_h \in C^{2+\alpha}(\Gamma)$.

Исключим из задачи (4.21)–(4.25) неизвестное $\widetilde{\rho}$, воспользовавшись соотношениями (4.24). Из этих соотношений следует, что

$$a(x)\widetilde{u}^{+} - \widetilde{u}^{-} = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{4.26}$$

$$a(x) = \frac{A^{+}(x)}{A^{-}(x)} \in C^{3+\alpha}(\Gamma), \quad \nu \le a(x) \le \nu^{-1}, \tag{4.27}$$

Заменяя условия (4.24) одним условием (4.26), получаем задачу сопряжения (задачу дифракции) (4.21)–(4.23), (4.25), (4.26) для неизвестных функций $\widetilde{u}^{\pm}$. Из результатов, например, [35–39], следует, что при каждом p, $\mathrm{Re}\,p > 0$, ввиду свойств функции $g_h(x,t)$, эта задача имеет единственное решение $\widetilde{u}^{\pm}(x,p) \in C^{3+\alpha}(\overline{\Omega}^{\pm})$, причем

$$\left|\widetilde{u}^{+}(\cdot,p)\right|^{(3+\alpha)}_{\overline{\Omega}^{+}} + \left|\widetilde{u}^{-}(\cdot,p)\right|^{(3+\alpha)}_{\overline{\Omega}^{-}} \le C(p)\,|\widetilde{g}_h|^{(2+\alpha)}_{\Gamma}, \tag{4.28}$$

а также для любого $q > 1$

$$\left\|\widetilde{u}^{+}\right\|_{W^2_q(\Omega^{+})} + \left\|\widetilde{u}^{-}\right\|_{W^2_q(\Omega^{-})} \le C(p)\,|\widetilde{g}_h|^{(2+\alpha)}_{\Gamma}. \tag{4.29}$$

Отметим здесь, что, в силу того, что $g_h(x,t)$ бесконечно дифференцируема по переменной t, и благодаря условиям (4.15), (4.18), ее преобразование Лапласа $\widetilde{g}_h$ при $|p| > 1$, $\mathrm{Re}\,p > 1$ обладает свойствами

$$|\widetilde{g}_h(\cdot,p)|^{(2+\alpha)}_{\Gamma} \le C(h,k)\,|p|^{-k}, \quad k = 1,2,\ldots. \tag{4.30}$$

то есть $|\widetilde{g}_h(\cdot,p)|^{(2+\alpha)}_{\Gamma}$ убывает быстрее любой степени $|p|$ при $|p| \to \infty$. Отсюда следует, что если мы покажем, что константа $C(p)$ в (4.28) растет не быстрее определенной степени $|p|$ при $|p| \to \infty$, то мы сможем совершить обратное преобразование Лапласа в функциях $\widetilde{u}^{\pm}(x,p)$ в силу оценки (4.28). После этого, для нахождения функции $\rho(x,t)$ достаточно будет, в силу (4.26), просто положить

$$\rho(x,t) = -\left.\frac{u^+}{A^+}\right|_{\Gamma_T} = -\left.\frac{u^-}{A^-}\right|_{\Gamma_T}. \tag{4.31}$$

Итак, оценим сначала $\|\widetilde{u}^{\pm}(x,p)\|_{L_2(\Omega^\pm)}$. Продолжим функцию $a(x)$ с границы Γ на все области $\overline{\Omega}^{\pm}$ с сохранением класса $C^{2+\alpha}$ так, что

$$|a(x)|^{(2+\alpha)}_{\overline{\Omega}^{\pm}} \le C\,|a(x)|^{(2+\alpha)}_{\Gamma}, \quad \nu \le a(x) \le \nu^{-1}. \tag{4.32}$$

Умножим уравнение (4.21) на $a(x)\overline{\widetilde{u}^+}$ (черта сверху означает комплексное сопряжение), а уравнение (4.22) — на $\overline{\widetilde{u}^-}$ и проинтегрируем по областям $\Omega^{\pm}$ соответственно. В результате получим (нормаль $\overrightarrow{n}$, напомним, направлена внутрь Ω^+)

$$\int\limits_{\Omega^+} a\left|\nabla\widetilde{u}^+\right|^2 dx + \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial \widetilde{u}^+}{\partial \overline{n}} a\overline{\widetilde{u}^+} dS + p\int\limits_{\Omega^+} a\left|\widetilde{u}^+\right|^2 dx = -\int\limits_{\Omega^+} \nabla\widetilde{u}^+\nabla a\overline{\widetilde{u}^+} dx, \tag{4.33}$$

$$\int\limits_{\Omega^-} \left|\nabla\widetilde{u}^-\right|^2 dx - \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial \widetilde{u}^-}{\partial \overline{n}} \overline{\widetilde{u}^-} dS = 0. \tag{4.34}$$

Сложим эти два соотношения. Учитывая, что $\overline{\widetilde{u}^-} = \overline{a\widetilde{u}^+} = a\overline{\widetilde{u}^+}$ на Γ, и учитывая соотношение (4.25), получим

$$\int\limits_{\Omega^+} a\left|\nabla\widetilde{u}^+\right|^2 dx + \int\limits_{\Omega^-} \left|\nabla\widetilde{u}^-\right|^2 dx + p\int\limits_{\Omega^+} a\left|\widetilde{u}^+\right|^2 dx$$
$$= -\int\limits_{\Gamma} \widetilde{g}_h a\overline{\widetilde{u}^+} dS - \int\limits_{\Omega^+} \nabla\widetilde{u}^+\nabla a\overline{\widetilde{u}^+} dx. \tag{4.35}$$

Поскольку все выражения в левой части последнего неравенства, кроме p, вещественны, и поскольку для любого комплексного числа z выполнено $\operatorname{Re} z \le |z|$, то из (4.35), с учетом (4.32), получаем, что

$$\int\limits_{\Omega^+} \left|\nabla\widetilde{u}^+\right|^2 dx + \int\limits_{\Omega^-} \left|\nabla\widetilde{u}^-\right|^2 dx + \operatorname{Re} p\int\limits_{\Omega^+} \left|\widetilde{u}^+\right|^2 dx$$
$$\le C\int\limits_{\Gamma} |\widetilde{g}_h|\left|\widetilde{u}^+\right| dS + C\int\limits_{\Omega^+} \left|\nabla\widetilde{u}^+\right|\left|\widetilde{u}^+\right| dx \equiv I_1 + I_2. \tag{4.36}$$

Оценим интегралы I_1 и I_2 отдельно.

Применяя для оценки I_1 неравенство Коши с ε, получаем

$$I_1 \le \varepsilon \int\limits_{\Gamma} \left|\widetilde{u}^+\right|^2 dS + C_\varepsilon \int\limits_{\Gamma} |\widetilde{g}_h|^2 dS. \tag{4.37}$$

Учитывая непрерывность (и даже компактность) вложения $L_2(\Gamma)$ в пространство следов на Γ функций из пространства $W_2^1(\Omega^+)$, имеем неравенство

$$\int\limits_{\Gamma} \left|\widetilde{u}^+\right|^2 dS \le C \int\limits_{\Omega^+} \left|\nabla\widetilde{u}^+\right|^2 dx + C \int\limits_{\Omega^+} \left|\widetilde{u}^+\right|^2 dx.$$

Из последнего неравенства и (4.37) при достаточно малом ε следует, что

$$I_1 \le \frac{1}{4} \int\limits_{\Omega^+} \left|\nabla\widetilde{u}^+\right|^2 + C_1 \int\limits_{\Omega^+} \left|\widetilde{u}^+\right|^2 dx + C \int\limits_{\Gamma} |\widetilde{g}_h|^2 dS. \tag{4.38}$$

с некоторой константой $C_1 = C_1(a)$. Применяя теперь для оценки I_2 неравенство Коши с ε, аналогично I_1, получаем с некоторой константой C_2

$$I_2 \le \frac{1}{4} \int\limits_{\Omega^+} \left|\nabla\widetilde{u}^+\right|^2 + C_2 \int\limits_{\Omega^+} \left|\widetilde{u}^+\right|^2 dx. \tag{4.39}$$

Теперь, из (4.36), с учетом (4.38), (4.39), следует, что при $\operatorname{Re} p \ge 2(C_1 + C_2) \equiv b_0$

$$\int\limits_{\Omega^+} \left|\nabla\widetilde{u}^+\right|^2 + \int\limits_{\Omega^-} \left|\nabla\widetilde{u}^-\right|^2 dx + \frac{\operatorname{Re} p}{2} \int\limits_{\Omega^+} \left|\widetilde{u}^+\right|^2 dx \le C \int\limits_{\Gamma} |\widetilde{g}_h|^2 dS. \tag{4.40}$$

Так как $\widetilde{u}^\pm$ равны нулю на $\Gamma^\pm$, то из (4.40) и неравенства Пуанкаре вытекает оценка

$$\left\|\widetilde{u}^+(x,p)\right\|_{L_2(\Omega^+)} + \left\|\widetilde{u}^-(x,p)\right\|_{L_2(\Omega^-)} \le C \int\limits_{\Gamma} |\widetilde{g}_h|^2 dS \le C \left|\widetilde{g}_h(\cdot,p)\right|_{\Gamma}^{(2+\alpha)}. \tag{4.41}$$

Таким образом, L_2-нормы решений $\widetilde{u}^\pm(x,p)$ оценены независимо от p при $\operatorname{Re} p \ge b_0$.

Перенесем теперь слагаемое $p\widetilde{u}^+$ в правую часть соотношения (4.21) и снова рассмотрим задачу сопряжения (4.21)–(4.23), (4.25), (4.26). Полностью аналогично оценке (4.28), справедливы оценки

$$\left|\widetilde{u}^+\right|_{\overline{\Omega}^+}^{(3+\alpha)} + \left|\widetilde{u}^-\right|_{\overline{\Omega}^-}^{(3+\alpha)} \le C \left|\widetilde{g}_h\right|_{\Gamma}^{(2+\alpha)} + C\,|p| \left|\widetilde{u}^+\right|_{\overline{\Omega}^+}^{(\alpha)}, \tag{4.42}$$

$$\left\|\widetilde{u}^{+}\right\|_{W_{q}^{2}(\Omega^{+})}+\left\|\widetilde{u}^{-}\right\|_{W_{q}^{2}(\Omega^{-})}\leq C_{q}\left|\widetilde{g}_{h}\right|_{\Gamma}^{(2+\alpha)}+C_{q}\left|p\right|\left\|\widetilde{u}^{+}\right\|_{L_{q}(\Omega^{+})}. \quad (4.43)$$

Выберем и зафиксируем $q>1$ настолько большим, что выполнено вложение

$$\left|\widetilde{u}^{+}\right|_{\overline{\Omega}^{+}}^{(\alpha)}\leq C\left\|\widetilde{u}^{+}\right\|_{W_{q}^{1}(\Omega^{+})}\leq C\left\|\widetilde{u}^{+}\right\|_{W_{q}^{2}(\Omega^{+})}. \quad (4.44)$$

Далее, воспользуемся известным неравенством Соболева–Ниренберга–Гальярдо:

$$\left\|\widetilde{u}^{+}\right\|_{L_{q}(\Omega^{+})}\leq C\left(\left\|\widetilde{u}^{+}\right\|_{W_{q}^{1}(\Omega^{+})}\right)^{\omega}\left(\left\|\widetilde{u}^{+}\right\|_{L_{2}(\Omega^{+})}\right)^{1-\omega},\quad \omega=\omega_{q}\in(0,1). \quad (4.45)$$

Применяя для оценки величины $C_{q}\left|p\right|\|\widetilde{u}^{+}\|_{L_{q}(\Omega^{+})}$ в правой части (4.43) сначала неравенство (4.45), а затем неравенство Юнга с ε, и учитывая, что $\|\widetilde{u}^{+}\|_{W_{q}^{1}(\Omega^{+})}\leq\|\widetilde{u}^{+}\|_{W_{q}^{2}(\Omega^{+})}$, получаем, ввиду (4.41),

$$\begin{aligned}C_{q}\left|p\right|\left\|\widetilde{u}^{+}\right\|_{L_{q}(\Omega^{+})}&\leq C\left(\left\|\widetilde{u}^{+}\right\|_{W_{q}^{1}(\Omega^{+})}\right)^{\omega}\left(\left|p\right|^{\frac{1}{1-\omega}}\left\|\widetilde{u}^{+}\right\|_{L_{2}(\Omega^{+})}\right)^{1-\omega}\\&\leq\frac{1}{2}\left\|\widetilde{u}^{+}\right\|_{W_{q}^{1}(\Omega^{+})}+C\left|p\right|^{\frac{1}{1-\omega}}\left\|\widetilde{u}^{+}\right\|_{L_{2}(\Omega^{+})}\\&\leq\frac{1}{2}\left\|\widetilde{u}^{+}\right\|_{W_{q}^{2}(\Omega^{+})}+C\left|p\right|^{\frac{1}{1-\omega}}\left|\widetilde{g}_{h}(\cdot,p)\right|_{\Gamma}^{(2+\alpha)}. \quad (4.46)\end{aligned}$$

Из (4.46) и (4.43) следует, что

$$\left\|\widetilde{u}^{+}\right\|_{W_{q}^{2}(\Omega^{+})}\leq C\left|\widetilde{g}_{h}(\cdot,p)\right|_{\Gamma}^{(2+\alpha)}\left(1+\left|p\right|^{\frac{1}{1-\omega}}\right). \quad (4.47)$$

А тогда, ввиду (4.44), из (4.42) получаем, что при $\operatorname{Re}p\geq b_{0}$

$$\left|\widetilde{u}^{+}\right|_{\overline{\Omega}^{+}}^{(3+\alpha)}+\left|\widetilde{u}^{-}\right|_{\overline{\Omega}^{-}}^{(3+\alpha)}\leq C\left|p\right|^{1+\frac{1}{1-\omega}}\left|\widetilde{g}_{h}(\cdot,p)\right|_{\Gamma}^{(2+\alpha)}. \quad (4.48)$$

Наконец, применение к неравенству (4.48) неравенства (4.30), дает при достаточно большом $k>0$

$$\left|\widetilde{u}^{+}(\cdot,p)\right|_{\overline{\Omega}^{+}}^{(3+\alpha)}+\left|\widetilde{u}^{-}(\cdot,p)\right|_{\overline{\Omega}^{-}}^{(3+\alpha)}\leq C_{h,k}\left|p\right|^{-\left(k-\frac{2-\omega}{1-\omega}\right)}. \quad (4.49)$$

Оценка (4.49) позволяет совершить в функциях $\widetilde{u}^{\pm}(x,p)$ обратное преобразование Лапласа и получить функции $u^{\pm}(x,t)$, $\rho(x,t)$, которые бесконечно дифференцируемы по переменной t и принадлежат $C^{3+\alpha}$ по переменным x. Кроме того, так как функции $\widetilde{u}^{\pm}(x,p)$ и $\widetilde{\rho}$ удовлетворяют соотношениям (4.21)–(4.25), то функции $u^{\pm}(x,t)$ и $\rho(x,t)$, в силу свойств преобразования Лапласа, удовлетворяют условиям (4.1)–(4.6). Заметим, что условие (4.6) также следует из свойств обратного преобразования Лапласа и (4.49). Действительно, при $M > b_0 + 1$

$$\left|u^{\pm}(x,0)\right| = \left|\int\limits_{M-i\infty}^{M+i\infty} e^{pt}\widetilde{u}^{\pm}(x,p)\,dp\right|_{t=0}$$
$$\leq C_k \int\limits_{-\infty}^{\infty} (M+|y|)^{-2}dy \to 0, \quad M \to \infty. \quad (4.50)$$

А также, совершенно аналогично,

$$\left|\frac{\partial u^{\pm}(x,0)}{\partial t}\right| = \left|\int\limits_{M-i\infty}^{M+i\infty} e^{pt}p\widetilde{u}^{\pm}(x,p)\,dp\right|_{t=0}$$
$$\leq C_{k+1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (M+|y|)^{-2}dy \to 0, \quad M \to \infty. \quad (4.51)$$

Таким образом, доказано существование гладкого решения задачи (4.1)–(4.6) с правой частью $g_h(x,t)$ в соотношении (4.5). При этом равномерно по h для полученного решения $u_h^{\pm}$, ρ_h задачи (4.1)–(4.6), ввиду теоремы 4.1, справедлива оценка (4.10)

$$\left|u_h^+\right|_{\overline{\Omega_T^+}}^{(3+\alpha)} + \left|u_h^-\right|_{\overline{\Omega_T^-}}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)} + |\rho_h|_{\Gamma_T}^{(3+\alpha)} \leq C_{T,S_0,M}\left(\mathbf{N}_T + T^{\mu}\mathcal{M}_T\right). \quad (4.52)$$

Пусть $0 < \beta < \alpha$. Ввиду компактности вложения пространств Гельдера $C^{\alpha} \subset C^{\beta}$ и в силу равномерной по h оценки (4.52), из множества решений (u_h^+, u_h^-, ρ_h) можно выделить последовательность с индексом $h_n \to 0$, $n \to \infty$, такую, что последовательность $(u_{h_n}^+, u_{h_n}^-, \rho_{h_n})$ сходится к некоторой тройке (u^+, u^-, ρ) в пространстве $(0 < \varepsilon \ll 1/2)$ $C_0^{3+\beta,\frac{3+\beta}{2}}(\overline{\Omega_T^+}) \times C_0^{3+\beta;1+(1/2-\varepsilon),\beta}(\overline{\Omega_T^-}) \times C_0^{3+\beta,\frac{3+\beta}{2}}(\Gamma_T)$, то есть

$$\left|u_{h_n}^+ - u^+\right|_{\overline{\Omega_T^+}}^{(3+\beta)} + \left|u_{h_n}^- - u^-\right|_{\overline{\Omega_T^-}}^{(3+\beta;1+(1/2-\varepsilon),\beta)} + |\rho_{h_n} - \rho|_{\Gamma_T}^{(3+\beta)} \to 0,$$
$$n \to \infty, \quad (4.53)$$

где пространство $C_0^{3+\beta;1+(1/2-\varepsilon),\beta}(\overline{\Omega_T^-})$ определяется точно так же, как пространство $C_0^{3+\beta;3/2,\beta}(\overline{\Omega_T^-})$, с единственным отличием, что полунорма $[u_t^-]_{\overline{\Omega_T^-}}^{(\beta,1/2)}$ заменяется на более слабую полунорму $[u_t^-]_{\overline{\Omega_T^-}}^{(\beta,1/2-\varepsilon)}$. При этом функции $g_{h_n}(x,t)$, в силу (4.17), сходятся к функции $f_3(x,t)$ в пространстве $C^{\gamma,\gamma/2}(\Gamma_T)$. Ввиду наличия указанной сходимости, переходя к пределу при $h_n \to 0$ в соотношениях (4.1)–(4.6), мы получаем, что предельная тройка (u^+, u^-, ρ) удовлетворяет задаче (4.1)–(4.6). Кроме того, из оценки (4.52) и из (4.53) следует, что предельная тройка функций (u^+, u^-, ρ) принадлежит пространству $C_0^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\overline{\Omega_T^+}) \times C_0^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega_T^-}) \times C_0^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$ и для нее справедлива оценка (4.10). Тем самым теорема 4.2 доказана. □

5. Завершение доказательства теоремы 1.1

Доказательство теоремы 1.1 завершается по схеме, описанной в параграфе 1. Определим на шаре $\mathcal{B}_r \subset \mathcal{H}$ оператор $\mathcal{K}(\psi)$, который каждому элементу $\psi \in \mathcal{B}_r$, заданному в правых частях соотношений (2.19)–(2.24), ставит в соответствие элемент $\mathcal{K}(\psi) \in \mathcal{H}$ — решение $(v^+, v^-, \delta) = \mathcal{K}(\psi)$ задачи (2.19)–(2.24) с заданными правыми частями. Из лемм 2.1, 2.2 вместе с теоремами 4.1 и 4.2 следует, что такой оператор корректно определен и обладает свойствами

$$\|K(0)\| \le CT^{\mu}, \quad \|K(\psi_2) - K(\psi_1)\| \le C(T^{\mu} + r)\,\|\psi_2 - \psi_1\|. \qquad (5.1)$$

Выбирая T и r достаточно малыми, получаем, что оператор $\mathcal{K}$ является сжимающим на $\mathcal{B}_r$, а затем, уменьшая, если нужно, T, получаем, что $\mathcal{K}$ отображает $\mathcal{B}_r$ в себя. Единственная неподвижная точка этого оператора и дает, очевидно, решение нелинейной задачи (2.19)–(2.24), а, следовательно, и задач (2.3)–(2.8), (1.9)–(1.14), (1.1)–(1.3). □

Литература

[1] H. W. Alt, S. Luckhaus, *Quasilinear elliptic-parabolic differential equations* // Math. Z., **183** (1983), No. 1, 311–341.

[2] C. J. Van Duyn, L. A. Peletier, *Nonstationary filtration in partially saturated porous media* // Arch. Rational Mech. Anal., **78** (1982), No. 2, 173–198.

[3] M. Bertsch, J. Hulshof, *Regularity results for an elliptic-parabolic free boundary problem* // Trans. Amer. Math. Soc., **297** (1986), No. 1, 337–350.

[4] E. Di Benedetto, R. Gariepy, *Local behavior of solutions of an elliptic-parabolic equation* // Arch. Rational. Mech. Anal., **97** (1987), No. 1, 1–17.

[5] A. Fasano, M. Primicerio, *Nonstationary filtration in partially saturated porous media* // J. Inst. Math. Appl., **23** (1979), No. 4, 503–517.

[6] J. Hulshof, *An elliptic-parabolic free boundary problem: continuity of the interface* // Proc. Royal Soc. Edinburg, **106A** (1987), No. 3, 327–339.

[7] J. Hulshof, L. A. Peletier, *An elliptic-parabolic free boundary problem* // Nonlinear Anal: Theory, Method Appl., **10** (1986), No. 12, 1327–1346.

[8] C. J. Van Duyn, *Nonstationary filtration in partially saturated porous media: contunuity of the free boundary* // Arch. Rational Mech. Anal., **79** (1982), No. 3, 261–265.

[9] C. J. Van Duyn, J. Hulshof, *An elliptic-parabolic with a nonlocal boundary condition* // Arch. Rational Mech. Anal., **99** (1987), No. 1, 61–73.

[10] R. Gianni, P. Mannucci, *A free boundary problem for a degenerate parabolic equation: Regularity of the solution* // Adv. Math. Sci. Appl., **9** (1999), No. 1, 557–569.

[11] X. Chen, A. Friedman and T. Kimura, *Nonstationary filtration in partially saturated porous media* // Eur. J. Appl. Math., **5** (1994), No. 3, 405–429.

[12] P. Mannucci, J. L. Vazquez, *Viscosity solutions for elliptic-parabolic problems* // Nonlinear Differ. Equ. Appl., **14** (2007), No. 1–2, 75–90.

[13] B. V. Bazaliy, S. P. Degtyarev, *Classical solutions of many-dimensional elliptic-parabolic free boundary problems* // NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., **16** (2009), No. 4, 421–443.

[14] F. Andreu, N. Igbida, J. M. Mazón, J. Toledo, *A degenerate elliptic-parabolic problem with nonlinear dynamical boundary conditions* // Interfaces Free Bound., **8** (2006), No. 4, 447–479.

[15] F. Andreu, N. Igbida, J. M. Mazón, J. Toledo, *Renormalized solutions for degenerate elliptic-parabolic problems with nonlinear dynamical boundary conditions and L1-data* // J. Differential Equations, **244** (2008), No. 11, 2764–2803.

[16] A. L. Amadori, J. L. Va'zquez, *Singular free boundary problem from image processing* // Math. Models Methods Appl. Sci., **15** (2005), No. 5, 689–715.

[17] E. Maitre, P. Witomski, *A pseudo-monotonicity adapted to doubly nonlinear elliptic-parabolic equations* // Nonlinear Anal., **50** (2002), No. 2, Ser. A: Theory Methods, 223–250.

[18] J. I. Díaz, M. B. Lerena, J. F. Padial and J. M. Rakotoson, *An elliptic-parabolic equation with a nonlocal term for the transient regime of a plasma in a stellarator* // J. Differential Equations, **198** (2004), No. 2, 321–355.

[19] R. Gianni, R. Ricci, *An elliptic-parabolic problem in Bingham fluid motion* // Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, **28** (1996), No. 1–2, 247–261.

[20] F. Otto, *L_1-contraction and uniqueness for quasilinear elliptic-parabolic equations* // J. Differential Equations, **131** (1996), No. 1, 20–38.

[21] B. Andreianov, P. Wittbold, *Convergence of approximate solutions to an elliptic–parabolic equation without the structure condition* // NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., **19** (2012), No. 6, 695–717.

[22] Chang Shou Lin, Kaising Tso, *On regular solutions of second order degenerate elliptic-parabolic equations* // Comm. Partial Differential Equations, **15** (1990), No. 9, 1329–1360.

[23] Lian Jun An, *The infiltration problem with large constant surface flux in partially saturated porous media*, International workshop on applied differential equations (Beijing, 1985), 177–198, World Sci. Publishing, Singapore, 1986.

[24] С. П. Дегтярев, *Эллиптико-параболическое уравнение и соответствующая задача со свободной границей I: Эллиптическая задача с параметром* // Укр. матем. вестник, **11** (2014), No. 1, 15–48.

[25] E.-I. Hanzawa, *Classical solutions of the Stefan problem* // Tohoku Math.Journ., **33** (1981), 297–335.

[26] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, М.: Наука, 1967.

[27] В. А. Солонников, *Разрешимость задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью* // Изв. АН СССР, сер. мат., **41** (1977), No. 6, 1388–1424.

[28] Б. В. Базалий, С. П. Дегтярев, *О классической разрешимости многомерной задачи Стефана при конвективном движении вязкой несжимаемой жидкости* // Мат. сборник, **132(174)** (1987), No. 1, 3–19.

[29] Б. В. Базалий, С. П. Дегтярев, *Разрешимость задачи с неизвестной границей между областями определения параболического и эллиптического уравнений* // Укр. мат. журнал, **41** (1989), No. 10, 1343–1349.

[30] Б. В. Базалий, С. П. Дегтярев, *О задаче Стефана с кинематическим и классическим условием на свободной границе* // Укр. мат. журнал, **44** (1992), No. 2, 155–166.

[31] М. В. Краснощок, *Розв'язність задачі з вільною межею для неоднорідного пружнього тіла* // Українский математичний вісник, **8** (2011), No. 4, 537–556.

[32] Г. И. Бижанова *Исследование разрешимости многомерных двухфазных задач Стефана и нестационарной фильтрации Флорина для параболических уравнений второго порядка в весовых гельдеровских пространствах функций* // Зап. научн. семин. ПОМИ, **213** (1994), 14–47.

[33] Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, М.: Наука, 1989.

[34] Г. И. Бижанова, В. А. Солонников, *О задачах со свободными границами для параболических уравнений второго порядка* // Алгебра и анализ, **12** (2000), No. 6, 98–139.

[35] В. А. Солонников, *Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Даглиса–Л. Ниренберга. I* // Изв. АН СССР. Сер. матем., **28** (1964), No. 3, 665–706

[36] В. А. Солонников, *Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Даглиса–Л. Ниренберга. II* // Краевые задачи математической физики. 4, Тр. МИАН СССР, **92** (1966), 233–297.

[37] О. А. Олейник, *Краевые задачи для линейных уравнений эллиптического и параболического типа с разрывными коэффициентами* // Изв. АН СССР. Сер. матем., **25** (1961), No. 1, 3–20.

[38] О. А. Ладыженская, В. Я. Ривкинд, Н. Н. Уральцева, *О классической разрешимости задачи дифракции* // Труды мат. ин-та им. В. А. Стеклова, **92** (1966), 116–146.

[39] Н. В. Житарашу, *Априорные оценки и разрешимость общих краевых задач для общих эллиптических систем с разрывными коэффициентами* // ДАН СССР, **165** (1965), No. 1, 24–27.

Сведения об авторах

Сергей Петрович Дегтярев
Институт прикладной математики
и механики НАНУ,
ул. Розы Люксембург, 74,
Донецк, 83114
E-Mail: `degtyar@i.ua`