Український математичний вісник
Том 11 **(2014)**, № 4, 586 – 597

О допустимом асимптотическом поведении функций с нулевыми интегралами по геодезическим на сфере

Виталий В. Волчков, Ирина М. Савостьянова

(*Представлена Р. М. Тригубом*)

Аннотация. Изучаются четные функции на сфере с нулевыми интегралами по всем замкнутым геодезическим (большим окружностям), не проходящими через полюсы сферы. Найдено допустимое асимптотическое поведение таких функций при подходе к полюсу.

2010 MSC. 26B15, 44A15, 49Q15, 53C65, 53C35.

Ключевые слова и фразы. Преобразование Минковского, свойство Лиувилля, функции Лежандра.

Введение

Одним из очевидных свойств периодических функций на вещественной оси является невозможность их стремления к нулю на бесконечности. В многомерном случае, где возможны различные обобщения понятия периодичности, ситуация становится значительно сложнее. Развивая теорию периодических в среднем функций, Ф. Йон [1, гл. 6] получил следующее нетривиальное обобщение указанного факта: если непрерывная функция f на $\mathbb{R}^3$ имеет нулевые интегралы по всем сферам единичного радиуса и $f(x) = o(1/|x|)$ при $x \to \infty$, то $f \equiv 0$ (см. также [2], где рассмотрен n-мерный случай). Примеры показывают (см. [1, 2]), что условие убывания функции f является точным.

Теорема Йона получила дальнейшее развитие и уточнение в разных направлениях [3–15].

Во первых, изучались ее обобщения для функций f, удовлетворяющих уравнению свертки $f * T = 0$, где T — заданное ненулевое

Статья поступила в редакцию 16.10.2013

распределение в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем. Выяснилось, в частности, что не существует ненулевых решений f, принадлежащих $L^p(\mathbb{R}^n)$ при некотором $p \in [1, 2n/(n-1)]$, $n \geq 2$. При этом показатель p не может быть увеличен [3–7].

Во-вторых, были доказаны, так называемые, “спектральные” аналоги теоремы Йона. Как и в классической теореме Лиувилля для целых функций, в них установлена связь между поведением на бесконечности решений уравнений свертки и множеством нулевых коэффициентов в ее разложении Фурье по сферическим гармоникам [8, 9].

В третьих, исследовалась задача о допустимом росте (убывании) функций с нулевыми сферическими средними на неограниченных областях. Здесь возникли интересные эффекты, связанные с зависимостью от вида области [8–11]. К рассматриваемому кругу идей относятся также различные теоремы типа Фрагмена–Линделёфа и теоремы о граничном поведении аналитических функций [12, 13].

В четвертых, были получены аналоги теоремы Ф. Йона на симметрических пространствах некомпактного типа [9, 14]. Разработанные для этого методы оказались весьма полезными при изучении близких вопросов для искаженного уравнения свертки на комплексном евклидовом пространстве и группе Гейзенберга [15].

В компактном случае, который также является естественным для задач такого типа, подобные исследования ранее не проводились. При этом возникают новые явления и трудности, обусловленные неодинаковостью топологического строения компактных и некомпактных симметрических пространств, а также различием структуры соответствующих классов функций на них. Например, в противоположность евклидовому случаю, класс непрерывных функций на сфере с нулевыми интегралами по всем шарам фиксированного радиуса r является тривиальным для всюду плотного множества чисел r [10, часть 2, гл. 2.8]. Далее, как известно, гладкие функции с таким свойством однозначно определяются своими значениями в любом шаре радиуса r [10, часть 2, теоремы 2.5 и 2.10]. Эти шары можно вложить в произвольную окрестность бесконечно удаленной точки в $\mathbb{R}^n$, что играет важную роль в оценках коэффициентов, возникающих при представлении функций рассматриваемого класса рядами по собственным функциям оператора Лапласа [9, часть 3, гл. 13.6, 14.6]. Аналогичные рассуждения неприменимы для компактных пространств ввиду конечности их диаметра.

В данной работе изучаются четные функции на двумерной сфере с нулевыми интегралами по всем замкнутым геодезическим (большим окружностям), не проходящими через полюсы сферы. Найдено допустимое асимптотическое поведение таких функций при подходе к полюсу (см. теорему 1.1 в разделе 1). Доказательство теоремы 1.1 основано на принципиально новом описании ядра локального преобразования Минковского. А именно, вместо использования рядов по собственным функциям лапласиана, мы получаем представление коэффициентов Фурье функций из ядра в виде конечных линейных комбинаций тригонометрических функций (см. лемму 3.1 ниже). Это позволяет преодолеть указанные выше трудности и установить требуемый результат.

1. Формулировка основного результата

Пусть $\mathbb{S}^2 = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi| = 1\}$, ξ_1, ξ_2, ξ_3 — декартовы координаты точки $\xi \in \mathbb{S}^2$, $\mathcal{S} = \{\xi \in \mathbb{S}^2 : \xi_3 \neq \pm 1\}$. Положим

$$C_{even} = \{f \in C(\mathcal{S}) : f(-\xi) = f(\xi) \quad \forall\, \xi \in \mathcal{S}\},$$

$$C_{odd} = \{f \in C(\mathcal{S}) : f(-\xi) = -f(\xi) \quad \forall\, \xi \in \mathcal{S}\}.$$

Обозначим через $\mathcal{M}$ совокупность всех непрерывных функций на $\mathcal{S}$, имеющих нулевые интегралы по каждой большой окружности из $\mathcal{S}$. Отметим, что при замене в этом определении множества $\mathcal{S}$ на $\mathbb{S}^2$ класс $\mathcal{M}$ совпадает с ядром хорошо известного интегрального преобразования Минковского и состоит из всех нечетных непрерывных функций на $\mathbb{S}^2$ (см., например, [16, гл. 1, следствие 4.19]). Введем также классы

$$\mathcal{M}_{even} = \mathcal{M} \cap C_{even}, \quad \mathcal{M}^m_{even} = \mathcal{M}_{even} \cap C^m(\mathcal{S}), \quad m \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Основным результатом данной работы является следующий аналог теоремы Йона.

Теорема 1.1. (i) *Пусть* $f \in \mathcal{M}_{even}$ *и*

$$f(\xi) = o\left(\frac{1}{1-\xi_3}\right) \quad \text{при} \ \ \xi_3 \to 1.$$

Тогда $f \equiv 0$.

(ii) *Существует ненулевая функция* $f \in \mathcal{M}^\infty_{even}$ *такая, что*

$$f(\xi) = O\left(\frac{1}{1-\xi_3}\right) \quad \text{при} \ \ \xi_3 \to 1.$$

Теорема 1.1 показывает, что всякая функция $f \in \mathcal{M}$, удовлетворяющая условию

$$f(\xi) = o\left(\frac{1}{1-\xi_3^2}\right) \quad \xi_3 \to \pm 1, \tag{1.1}$$

принадлежит C_{odd}. При этом символ “o” в (1.1) нельзя заменить, вообще говоря, на символ “O”.

2. Вспомогательные утверждения

Пусть как обычно, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ — множества натуральных, целых и целых неотрицательных чисел соответственно.

Введем сферические координаты φ, θ на $\mathbb{S}^2$ следующим образом:

$$\xi_1 = \sin\theta\sin\varphi,\ \xi_2 = \sin\theta\cos\varphi,\ \xi_3 = \cos\theta, \quad \varphi \in (0, 2\pi),\ \theta \in (0, \pi).$$

Расстояние $d(\xi, \eta)$ между точками $\xi, \eta \in \mathbb{S}^2$ вычисляется по формуле $d(\xi, \eta) = \arccos(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3)$. В частности,

$$d(\xi, o) = \arccos\xi_3 = \theta, \quad \text{где } o = (0, 0, 1).$$

Множество

$$\gamma_\eta = \{\xi \in \mathbb{S}^2 : d(\xi, \eta) = \pi/2\}$$

является большой окружностью на $\mathbb{S}^2$, ортогональной вектору η.

Обозначим через $SO(3)$ — группу вращений пространства $\mathbb{R}^3$. Ниже будут использоваться вращения τ_α и a_t, определяемые равенствами:

$$\tau_\alpha\xi = (\xi_1\cos\alpha - \xi_2\sin\alpha, \xi_1\sin\alpha + \xi_2\cos\alpha, \xi_3), \quad \alpha \in [0, 2\pi], \tag{2.1}$$

$$a_t\xi = (\xi_1, \xi_2\cos t + \xi_3\sin t, -\xi_2\sin t + \xi_3\cos t), \quad t \in [0, 2\pi]. \tag{2.2}$$

Ввиду транзитивности $SO(3)$ на $\mathbb{S}^2$, класс $\mathcal{M}$ совпадает со множеством функций $f \in C(\mathcal{S})$, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{\gamma_o} f(\tau\xi)dl(\xi) = 0 \quad \forall\, \tau \in G,$$

где dl – элемент длины дуги, $G = \{\tau \in SO(3) : \tau\gamma_o \subset \mathcal{S}\}$.

Всякой функции $f \in C(\mathcal{S})$ соответствует ряд Фурье

$$f(\xi) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k(\theta)e^{ik\varphi}, \qquad \theta \in (0, \pi), \tag{2.3}$$

где

$$f_k(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f^\circ(\varphi, \theta)e^{-ik\varphi}d\varphi,$$

$$f^\circ(\varphi, \theta) = f(\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \cos\theta).$$

Для краткости положим

$$f^k(\xi) = f_k(\theta)e^{ik\varphi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пусть также D_k — дифференциальный оператор, действующий по правилу

$$(D_k u)(\theta) = u'(\theta) - k\ ctg\ \theta u(\theta), \qquad u \in C^1(0,\pi).$$

Лемма 2.1. (i) *Имеет место равенство*

$$\mathcal{M} = \{f \in C(\mathcal{S}) : f^k \in \mathcal{M} \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}\}. \tag{2.4}$$

(ii) *Если $m \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{M}^m_{even}$ и f имеет вид $f(\xi) = u(\theta)e^{ik\varphi}$, то функции $(D_k u)(\theta)e^{i(k+1)\varphi}$ и $(D_{-k}u)(\theta)e^{i(k-1)\varphi}$ принадлежат классу $\mathcal{M}^{m-1}_{even}$.*

Доказательство. (i) Пусть $f \in C(\mathcal{S})$. Из (2.3) следует формула

$$f^k(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\tau_\alpha \xi)e^{ik\alpha}d\alpha, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{2.5}$$

(см. (2.1)). Тогда

$$\int\limits_{\gamma_o} f^k(\tau\xi)dl(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_{\gamma_o} f(\tau_\alpha\tau\xi)dl(\xi)\right)e^{ik\alpha}d\alpha \quad \forall\,\tau \in G.$$

Учитывая, что $\tau_\alpha\tau \in G$ для любого $\alpha \in [0, 2\pi]$, получаем (2.4).

(ii) Четность функции f равносильна соотношению

$$u(\pi - \theta) = (-1)^k u(\theta), \quad \theta \in (0,\pi).$$

Поскольку

$$(D_k u)(\pi - \theta) = -D_k(u(\pi - \theta)),$$

функции $(D_k u)(\theta)e^{i(k+1)\varphi}$ и $(D_{-k}u)(\theta)e^{i(k-1)\varphi}$ принадлежат классу $C_{even} \cap C^{m-1}(\mathcal{S})$. Далее, пусть $\tau \in G$. При достаточно малых $|t|$ из условия имеем

$$\int\limits_{\tau\gamma_o} F(a_t\xi)dl(\xi) = 0, \tag{2.6}$$

где $F(x) = f(x/|x|)$ и a_t определено в (2.2). Дифференцируя (2.6) по t и полагая $t = 0$, находим

$$\int\limits_{\tau\gamma_o} h(\xi)dl(\xi) = 0,$$

где
$$h(\xi) = \xi_3 \frac{\partial F}{\partial x_2}(\xi) - \xi_2 \frac{\partial F}{\partial x_3}(\xi).$$
Теперь утверждение (ii) следует из (i) и равенства
$$h^\circ(\varphi, \theta) = \cos\varphi \frac{\partial f^\circ}{\partial \theta} - \sin\varphi \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial f^\circ}{\partial \varphi}$$
$$= \frac{1}{2}(D_k u)(\theta) e^{i(k+1)\varphi} + \frac{1}{2}(D_{-k} u)(\theta) e^{i(k-1)\varphi}.$$
□

Лемма 2.2. *Пусть функция f принадлежит $\mathcal{M}_{even}$ и зависит только от θ. Тогда $f \equiv 0$.*

Доказательство. По условию имеем
$$\int\limits_{\gamma_o} f(a_t\xi) dl(\xi) = 0, \quad 0 < t < \pi/2.$$
Поскольку $f(\xi) = f_0(\arccos \xi_3)$, это уравнение переписывается в виде
$$\int\limits_0^{2\pi} f_0(\arccos(-\sin t \cos\varphi)) d\varphi = 0,$$
или
$$\int\limits_0^{\pi} f_0(\arccos(-\sin t \cos\varphi)) d\varphi = 0.$$
Отсюда
$$\int\limits_{-\sin t}^{\sin t} f_0(\arccos x) \frac{dx}{\sqrt{\sin^2 t - x^2}} = 0.$$
Учитывая четность f, приходим к интегральному уравнению
$$\int\limits_0^{y} f_0(\arccos x) \frac{dx}{\sqrt{y^2 - x^2}} = 0, \quad 0 < y < 1,$$
решением которого является только нулевая функция (см., например, [16, гл. 1, § 2, доказательство теоремы 2.6]). □

Приведем теперь некоторые примеры функций класса $\mathcal{M}$.

Будем использовать следующие стандартные обозначения (см. [17]): Γ — гамма-функция, $(z)_k = \frac{\Gamma(z+k)}{\Gamma(z)}$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$ — символ Похгаммера, $F(a,b;c;z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, P_ν^μ — функция Лежандра первого рода на $(-1,1)$, т.е.

$$P_\nu^\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-x}{2}\right).$$

Положим

$$S_{\nu,k}(\xi) = P_\nu^{-k}(\cos\theta)e^{ik\varphi}, \quad \nu \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}_+.$$

Функция $S_{\nu,k}$ является вещественно-аналитической в $\mathbb{S}^2 \setminus (0,0,-1)$. Более того,

$$LS_{\nu,k} = -\nu(\nu+1)S_{\nu,k}, \tag{2.7}$$

где L — оператор Лапласа на $\mathbb{S}^2$ (см. [10, лемма 7.6]).

Лемма 2.3. *Пусть $\nu \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $\eta \in \mathbb{S}^2$ и $\eta_3 > 0$. Тогда*

$$\int\limits_{\gamma_\eta} S_{\nu,k}(\xi)dl(\xi) = 2\sqrt{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\nu\right)\frac{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}S_{\nu,k}(\eta).$$

В частности, $S_{\nu,k} \in \mathcal{M}$ при $\nu = 1,3,5,\ldots$.

Доказательство. По формуле Пиззетти имеем (см. [18] и (2.7))

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\gamma_\eta} S_{\nu,k}(\xi)dl(\xi) \\
&\quad = 2\pi\left(S_{\nu,k}(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{L(L+2)\ldots(L+(m-1)m)S_{\nu,k}(\eta)}{2^m(m!)^2}\right) \\
&= 2\pi S_{\nu,k}(\eta)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-\nu(\nu+1))(2-\nu(\nu+1))\cdots(m(m-1)-\nu(\nu+1))}{2^m(m!)^2}\right) \\
&\qquad = 2\pi S_{\nu,k}(\eta)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\nu)_m(\nu+1)_m}{2^m(m!)^2} \\
&\qquad = 2\pi S_{\nu,k}(\eta)F(-\nu,\nu+1;1;1/2) = 2\pi P_\nu(0)S_{\nu,k}(\eta),
\end{aligned}$$

где $P_\nu = P_\nu^0$. Осталось использовать равенство

$$P_\nu(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\left(\frac{\pi}{2}\nu\right)\frac{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}$$

(см. [17, гл. 3, п. 3.4 (20)]). □

Лемма 2.4. *Пусть* $m, p \in \mathbb{Z}_+$, $m \geq p+1$, $a \neq p, p-1, p-2, \dots$ *и* $|\arg(1-z)| < \pi$. *Тогда*

$$F(a, m-p; a-p; z) = \frac{1}{(1-z)^m} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j (a-m)_j (-p)_j}{(1-m)_j (a-p)_j} \binom{m-1}{j} z^j, \tag{2.8}$$

где $\binom{m-1}{j}$ — *биномиальные коэффициенты.*

Доказательство. При $A, B \neq 0, -1, -2, \dots$ и $N \in \mathbb{N}$ имеет место следующая формула для аналитического продолжения гипергеометрического ряда (см. [17, гл. 2, п. 2.10 (11)]):

$$\begin{aligned}
&\frac{F(A, B; A+B-N; z)}{\Gamma(A+B-N)} \\
&\quad = \frac{\Gamma(N)(1-z)^{-N}}{\Gamma(A)\Gamma(B)} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(A-N)_n (B-N)_n}{(1-N)_n n!} (1-z)^n \\
&\quad + \frac{(-1)^N}{\Gamma(A-N)\Gamma(B-N)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A)_n (B)_n}{(n+N)! n!} (1-z)^n \\
&\times \big(\psi(1+n) + \psi(1+n+N) - \psi(A+n) - \psi(B+n) - \ln(1-z)\big), \\
&\qquad\qquad |\arg(1-z)| < \pi, \ |1-z| < 1,
\end{aligned}$$

где ψ — логарифмическая производная гамма-функции. Полагая здесь $A = a$, $B = m-p$, $N = m$, получаем

$$\begin{aligned}
\frac{F(a, m-p; a-p; z)}{\Gamma(a-p)} &= \frac{\Gamma(m)(1-z)^{-m}}{\Gamma(a)\Gamma(m-p)} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(a-m)_n (-p)_n}{(1-m)_n n!} (1-z)^n \\
&= \frac{\Gamma(m)(1-z)^{-m}}{\Gamma(a)\Gamma(m-p)} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{n=j}^{m-1} \frac{(a-m)_n (-p)_n}{(1-m)_n n!} \binom{n}{j} \right) (-1)^j z^j. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Поскольку $(\zeta)_{n+j} = (\zeta)_j (\zeta+j)_n$, внутренняя сумма в (2.9) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
\sum_{n=j}^{m-1} \frac{(a-m)_n (-p)_n}{(1-m)_n n!} \binom{n}{j} &= \sum_{n=0}^{m-j-1} \frac{(a-m)_{n+j} (-p)_{n+j}}{(1-m)_{n+j} j! n!} \\
&= \frac{(a-m)_j (-p)_j}{(1-m)_j j!} \sum_{n=0}^{m-j-1} \frac{(a-m+j)_n (-p+j)_n}{(1-m+j)_n n!}. \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Усеченный гипергеометрический ряд Гаусса выражается через обобщенную гипергеометрическую функцию ${}_3F_2$ по формуле

$$\sum_{n=0}^{N_1} \frac{(A_1)_n (B_1)_n}{(C_1)_n n!} = \frac{\Gamma(A_1+N_1+1)\Gamma(B_1+N_1+1)}{(N_1)!\Gamma(A_1+B_1+N_1+1)} \times {}_3F_2\left(\begin{matrix} A_1, B_1, C_1+N_1; 1 \\ C_1, A_1+B_1+N_1+1 \end{matrix}\right)$$

(см. [17, гл. 4, п. 4.5]). В частности,

$$\sum_{n=0}^{N_1} \frac{(A_1)_n (B_1)_n}{(-N_1)_n n!} = \frac{\Gamma(A_1+N_1+1)\Gamma(B_1+N_1+1)}{(N_1)!\Gamma(A_1+B_1+N_1+1)}$$

и

$$\sum_{n=0}^{m-j-1} \frac{(a-m+j)_n(-p+j)_n}{(1-m+j)_n n!} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(m-p)}{(m-j-1)!\Gamma(a-p+j)}. \tag{2.11}$$

Комбинируя (2.9), (2.10) и (2.11), приходим к (2.8).

□

Лемма 2.5. (i) *Пусть $k \geq 2$, k — четно и $0 \leq j \leq \frac{k-2}{2}$. Тогда*

$$\frac{(\cos\theta)^{2j}}{(\sin\theta)^k} e^{ik\varphi} \in \mathcal{M}_{even}. \tag{2.12}$$

(ii) *Пусть $k \geq 3$, k — нечетно и $0 \leq j \leq \frac{k-3}{2}$. Тогда*

$$\frac{(\cos\theta)^{2j+1}}{(\sin\theta)^k} e^{ik\varphi} \in \mathcal{M}_{even}. \tag{2.13}$$

Доказательство. (i) Формула (11) в [17, гл. 3, п. 3.4] влечет равенство

$$P_\nu^\mu(x)\cos(\pi(\nu+\mu)) - P_\nu^\mu(-x) = \frac{2^{\mu+2}\sqrt{\pi}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}(\nu+\mu)\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\nu+\mu}{2}\right)} \frac{xF\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}, \frac{\nu-\mu}{2}+1; \frac{3}{2}; x^2\right)}{(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}} - \frac{2^{\mu+1}\sqrt{\pi}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}(\nu+\mu)\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\nu-\mu}{2}\right)} \frac{F\left(-\frac{\nu+\mu}{2}, \frac{1+\nu-\mu}{2}; \frac{1}{2}; x^2\right)}{(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}}.$$

Отсюда и из (2.8) при $n \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$P_{2n+1}^{-k}(\cos\theta) + P_{2n+1}^{-k}(-\cos\theta) = \frac{2^{1-k}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{2n+k+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k-2n}{2}\right)}(\sin\theta)^k$$

$$\times F\left(\frac{k-2n-1}{2}, \frac{k+2n+2}{2}; \frac{1}{2}; \cos^2\theta\right) = \frac{2^{1-k}\sqrt{\pi}(\sin\theta)^{-k}}{\Gamma\left(\frac{2n+k+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k-2n}{2}\right)}$$

$$\times \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j\left(-\frac{k+2n+1}{2}\right)_j\left(\frac{2n-k+2}{2}\right)_j}{(1-k)_j\left(\frac{1}{2}\right)_j}\binom{k-1}{j}(\cos\theta)^{2j}. \quad (2.14)$$

По лемме 2.3 функция $P_{2n+1}^{-k}(\cos\theta)e^{ik\varphi}$, а поэтому и левая часть в (2.14), умноженная на $e^{ik\varphi}$, принадлежат классу $\mathcal{M}$. Полагая в (2.14)

$$n = \frac{k-2}{2}, \frac{k-2}{2} - 1, \ldots, 0,$$

получаем (2.12).

(ii) В этом случае

$$P_{2n+1}^{-k}(\cos\theta) - P_{2n+1}^{-k}(-\cos\theta) = \frac{2^{2-k}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{2n+k+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k-2n-1}{2}\right)}\cos\theta(\sin\theta)^k$$

$$\times F\left(\frac{k-2n}{2}, \frac{k+2n+3}{2}; \frac{3}{2}; \cos^2\theta\right) = \frac{2^{2-k}\sqrt{\pi}(\sin\theta)^{-k}}{\Gamma\left(\frac{2n+k+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k-2n-1}{2}\right)}$$

$$\times \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j\left(-\frac{k+2n}{2}\right)_j\left(\frac{2n-k+3}{2}\right)_j}{(1-k)_j\left(\frac{3}{2}\right)_j}\binom{k-1}{j}(\cos\theta)^{2j+1}$$

и (2.13) получается аналогично. □

3. Доказательство теоремы 1.1

Прежде всего установим еще один вспомогательный результат. Для $x \in \mathbb{R}$ положим $\{x\} = x - [x]$, где $[x]$ — целая часть числа x.

Лемма 3.1. *Пусть $f \in C(\mathcal{S})$. Тогда $f \in \mathcal{M}_{even}$ в том и только том случае, если коэффициенты Фурье функции f имеют вид*

$$f_k(\theta) = \frac{1}{(\sin\theta)^{|k|}} \sum_{j=0}^{[|k|/2]-1} c_{j,k}(\cos\theta)^{2j+2\{k/2\}}, \quad c_{j,k} \in \mathbb{C}, \qquad (3.1)$$

где сумма считается равной нулю при $|k| \le 1$.

Доказательство. Предположим сначала, что $f \in C^\infty(\mathcal{S})$. Если $f \in \mathcal{M}_{even}$, то $f^k \in \mathcal{M}_{even}$ для любого $k \in \mathbb{Z}$ (см. лемму 2.1 (i) и формулу (2.5)). Кроме того, лемма 2.1 (ii) показывает, что функция $(D_{-k}f_k)(\theta)e^{i(k-1)\varphi}$ также принадлежит $\mathcal{M}_{even}$. Используя тогда лемму 2.2, индукцией получаем (3.1) при $k \ge 0$. Учитывая теперь, что

$\overline{f} \in \mathcal{M}_{even}$, убеждаемся в справедливости (3.1) и при $k < 0$. Обратное утверждение следует из леммы 2.5, леммы 2.1 (i) и соотношения

$$f_k(\pi - \theta) = (-1)^{2\{k/2\}} f_k(\theta) = (-1)^k f_k(\theta), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Аналогично доказывается представление (3.1) для гладких функций, заданных в области $\{\xi \in \mathbb{S}^2 : \varepsilon < d(o, \xi) < \pi - \varepsilon\}$, $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$. Общий случай получается отсюда с помощью сглаживания f функциями вида

$$\xi \to \int\limits_{SO(3)} h_n(g) f(g^{-1}\xi) dg,$$

где dg — мера Хаара на группе $SO(3)$, а в качестве h_n выбирается последовательность Дикара на $SO(3)$, т.е. последовательность вещественных функций с компактным носителем, удовлетворяющих следующим условиям: 1) $h_n \geq 0 \ \ \forall n$; 2) $\int_{SO(3)} h_n(g) dg = 1 \ \forall n$; 3) при достаточно большом n носитель функции h_n содержится в любой наперед заданной окрестности единицы в $SO(3)$ (см. [19, гл. 1, § 1]). $\square$

Перейдем к доказательству теоремы 1.1. Пусть f удовлетворяет условию в пункте (i) теоремы. Тогда тем же свойством обладает каждое слагаемое ряда (2.3), поскольку

$$(1 - \xi_3)|f^k(\xi)| \leq \sup_{\alpha \in [0, 2\pi]} (1 - (\tau_\alpha \xi)_3)|f(\tau_\alpha \xi)|$$

(см. формулу (2.5)). Кроме того, по лемме 3.1 f_k имеют вид (3.1). Отсюда следует, что все f^k равны нулю в $\mathcal{S}$, а значит f — нулевая функция.

Наконец, по лемме 2.5 всем требованиям второго утверждения удовлетворяет функция

$$f(\xi) = \frac{(\xi_2 + i\xi_1)^2}{(1 - \xi_3^2)^2}, \qquad \xi \in \mathcal{S}.$$

Таким образом, теорема 1.1 полностью доказана.

Литература

[1] Ф. Йон, *Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными*, М.: ИЛ, 2011.

[2] J. D. Smith, *Harmonic analysis of scalar and vector fields in* $\mathbb{R}^n$ // Proc. Cambridge Philos. Soc., **72**, (1972) 403–416.

[3] В. В. Волчков, *Проблемы типа Помпейю на многообразиях* // Доклады АН Украины, (1993), No. 11, 9–13.

[4] S. Thangavelu, *Spherical means and CR functions on the Heisenberg group* // J. Anal. Math., **63** (1994), 225–286.

[5] R. Rawat and A. Sitaram, *The injectivity of the Pompeiu transform and L^p-analogues of the Wiener Tauberian theorem* // Israel J. Math., (1995), No. 91, 307–316.

[6] M. L. Agranovsky, E. K. Narayanan, *L^p-integrability, supports of Fourier transforms and uniqueness for convolution equations* // J. Fourier Anal. Appl., **10** (2004), 13–27.

[7] В. В. Волчков, *Решение проблемы носителя для некоторых классов функций* // Матем. сборник, **188** (1997), No. 9, 13–30.

[8] V. V. Volchkov, *Integral geometry and convolution equations*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003.

[9] V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, *Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group*, Springer, London, 2009.

[10] V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, *Offbeat integral geometry on symmetric spaces*, Birkhäuser, Basel, 2013.

[11] О. А. Очаковская, *Точные характеристики допустимой скорости убывания ненулевой функции с нулевыми шаровыми средними* // Матем. сборник, **199** (2008), No. 1, 47–66.

[12] М. А. Евграфов, *Асимптотические оценки и целые функции*, М.: Физматгиз, 1962.

[13] М. А. Евграфов, *Аналитические функции*, М.: Наука, 1965.

[14] M. Shahshahani, A. Sitaram, *The Pompeiu problem in exterior domains in symmetric spaces* // Contemp. Math., **63** (1987), 267–277.

[15] В. В. Волчков, Вит. В. Волчков, *Поведение на бесконечности решений искаженного уравнения свертки* // Известия РАН. Сер. матем., **76** (2012), No. 1, 85–100.

[16] С. Хелгасон, *Группы и геометрический анализ*, М.: Мир, 1987.

[17] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, Т. 1. М.: Наука, 1973.

[18] C. A. Berenstein, L. Zalcman, *Pompeiu's problem on symmetric spaces* // Comment. Math. Helv., **55** (1980), 593–621.

[19] С. Ленг, $SL_2(R)$, М.: Мир, 1977.

Сведения об авторах

Виталий Владимирович Волчков, Ирина Михайловна Савостьянова

Кафедра математического анализа
и дифференциальных уравнений,
Донецкий национальный университет,
ул. Университетская 24,
Донецк, 83001
E-Mail: `v.volchkov@donnu.edu.ua`, `cavost@mail.ru`