Український математичний вісник
Том 12 **(2015)**, № 2, 151 – 159

Граничное поведение отображений в $\lambda(\varepsilon)$-регулярных метрических пространствах

Елена С. Афанасьева, Руслан Р. Салимов

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. Исследуется проблема продолжения на границу кольцевых Q-гомеоморфизмов между областями в $\lambda(\varepsilon)$-регулярных метрических пространствах. Сформулированы условия на функцию $Q(x)$ и границы областей, при которых любой кольцевой Q-гомеоморфизм допускает непрерывное или гомеоморфное продолжение на границу.

2010 MSC. 30C65, 30C75.

Ключевые слова и фразы. Метрические пространства с мерами, граничное поведение, модуль семейства кривых, кольцевой Q-гомеоморфизм, квазиконформные отображения.

1. Введение

Напомним некоторые определения. Пусть A — множество в метрическом пространстве (X, d). Полагаем

$$H^k(A) := \sup_{\varepsilon>0} \; H^k_\varepsilon(A)\,, \tag{1.1}$$

$$H^k_\varepsilon(A) := \inf \; \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} A_i)^k\,, \tag{1.2}$$

где инфимум в (1.2) берётся по всем покрытиям A множествами A_i с diam $A_i < \varepsilon$. Далее $H^k(A)$, $k \in [0, \infty)$, обозначает *k-мерную меру Хаусдорфа* множества A, см., напр., [1]. Напомним, что $\operatorname{diam} A_i = \sup_{x,y\in A_i} d(x, y)$.

Если для некоторого множества A и $k_1 \geq 0$ выполнено условие $H^{k_1}(A) < \infty$, то $H^{k_2}(A) = 0$ для произвольного числа $k_2 > k_1$, см., напр., разд. 1 в гл. VII в [1]. Величина

$$\dim_H A := \sup_{H^k(A)>0} \; k \tag{1.3}$$

Статья поступила в редакцию 1.06.2015

ISSN 1810 – 3200.

называется *хаусдорфовой размерностью* множества A.

Кривой в метрическом пространстве (X,d) называется непрерывное отображение $\gamma:[a,b]\to X$. Ее *длина* есть супремум сумм

$$\sum_{i=1}^{k} d(\gamma(t_i),\gamma(t_{i-1})) \tag{1.4}$$

над всеми разбиениями $a=t_0\le t_1\le\dots\le t_k=b$ интервала $[a,b]$. Кривая γ называется *спрямляемой*, если ее длина конечна.

Пусть (X,d,μ) — метрическое пространства X с метрикой d и локально конечной борелевской мерой μ. Борелева функция $\rho:X\to[0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых Γ в X, пишут $\rho\in adm\,\Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma}\rho\,ds\ \ge\ 1 \tag{1.5}$$

для всех $\gamma\in\Gamma$. Здесь ds относится к мере длины на γ.

Модуль семейства кривых Γ в области D из X конечной хаусдорфовой размерности $\alpha>1$ определяется равенством

$$M(\Gamma)=\inf_{\rho\,\in\,adm\,\Gamma}\int\limits_{D}\rho^{\alpha}(x)\,d\mu(x). \tag{1.6}$$

Для $x_0\in X$ и $\varepsilon>0$, через $B(x_0,\varepsilon)$ обозначается шар $\{x\in X:d(x,x_0)<\varepsilon\}$ и $A=A(x_0,r_1,r_2):=\{x_0\in X:\ r_1<d(x,x_0)<r_2\}$, $0<r_1<r_2<\infty$ — кольцо.

Пусть D и D' — области с конечными хаусдорфовыми размерностями α и $\alpha'>1$ в пространствах (X,d,μ) и (X',d',μ'), соответственно, и пусть $Q:X\to(0,\infty)$ — измеримая функция. В дальнейшем для любых множеств E, F и D в X через $\triangle(E,F;D)$ обозначается семейство всех кривых $\gamma:[0,1]\to X$ с $\gamma(0)\in E$, $\gamma(1)\in F$ и $\gamma(t)\in D$ для всех $t\in(0,1)$.

Будем говорить, что гомеоморфизм $f:D\to D'$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $x_0\in\overline{D}$, если неравенство

$$M(\triangle(f(C_0),\,f(C_1);\,D'))\le\int\limits_{A\cap D}Q(x)\cdot\eta^{\alpha}(d(x,x_0))\,d\mu(x) \tag{1.7}$$

выполняется для любого кольца $A=A(x_0,r_1,r_2)$, $0<\ r_1\ <r_2<\infty$, любых двух континуумов (компактных связных множеств) $C_0\subset\overline{B(x_0,\,r_1)}\cap D$ и $C_1\subset D\setminus B(x_0,r_2)$ и любой борелевой функции η :

$(r_1, r_2) \to [0, \infty]$, такой что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\ dr\ \geq\ 1. \tag{1.8}$$

Также говорим, что гомеоморфизм $f : D \to D'$ есть *кольцевой Q-гомеоморфизм*, если f является кольцевым Q-гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$.

Пространство (X, d, μ) называется *α-регулярным по Альфорсу*, если существует постоянная $C \geq 1$ такая, что

$$C^{-1}\varepsilon^{\alpha} \leq \mu(B(x_0, \varepsilon)) \leq C\varepsilon^{\alpha} \tag{1.9}$$

для всех шаров $B(x_0, \varepsilon)$ с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $\varepsilon < diam\, X$. Как известно, α-регулярные пространства имеют хаусдорфову размерность α, см., напр., [6, с. 61]. Пространство (X, d, μ) называется *регулярным по Альфорсу*, если оно α-регулярно по Альфорсу для некоторого $\alpha \in (1, \infty)$.

Говорят также, что пространство (X, d, μ) *α-регулярно сверху в точке* $x_0 \in X$, если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\mu(B(x_0, \varepsilon)) \leq C\varepsilon^{\alpha} \tag{1.10}$$

для всех шаров $B(x_0, \varepsilon)$ с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $\varepsilon < \varepsilon_0$. Наконец, говорят, что пространство (X, d, μ) *регулярно сверху*, если условие (1.10) выполнено в каждой точке X для некоторого $\alpha \in (1, \infty)$.

Пусть $\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ — непрерывно возрастающая функция, где $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$. Будем говорить, что пространство (X, d, μ) является *$\lambda(\varepsilon)$-регулярным сверху в точке* $x_0 \in X$, если существует постоянная $C > 0$, такая что

$$\mu(B(x_0, \varepsilon)) \leq C\lambda(\varepsilon) \tag{1.11}$$

для всех шаров $B(x_0, \varepsilon)$ с центром в точке $x_0 \in X$, радиуса $\varepsilon < \varepsilon_0$ для некоторого $\varepsilon_0 > 0$. Также будем говорить, что пространство (X, d, μ) является $\lambda(\varepsilon)$-регулярным сверху, если условие (1.11) выполнено в каждой точке $x_0 \in X$.

Приведем некоторые топологические определения общего характера, которые будут полезны в дальнейшем. Пусть T — произвольное топологическое пространство. Напомним, что топологическое пространство *связно*, если его нельзя разбить на два непустых открытых множества. Компактные связные пространства называются *континуумами.* Топологическое пространство T называют *линейно связным*, если любые две точки x_1 и x_2 можно соединить кривой

$\gamma : [a,b] \to T$, $\gamma(a) = x_1$ и $\gamma(b) = x_2$. *Областью* в T называется открытое линейно связное множество. Область D называется *локально связной в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0 такая, что $V \cap D$ связно, ср. [9, с. 232]. Аналогично, говорят, что область D *локально линейно связна в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0 такая, что $V \cap D$ линейно связно.

Следуя [9], говорим, что граница области D — *слабо плоская в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любого числа $P > 0$ и любой окрестности U точки x_0 найдется ее окрестность $V \subset U$, такая что

$$M(\Delta(E,F;D)) \geq P \tag{1.12}$$

для любых континуумов E и F в D, пересекающих ∂U и ∂V.

Аналогично, говорим, что граница области D *сильно достижима в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0, найдется компакт $E \subset D$, окрестность $V \subset U$ точки x_0 и число $\delta > 0$, такие что

$$M(\Delta(E,F;D)) \geq \delta \tag{1.13}$$

для любого континуума F в D, пересекающего ∂U и ∂V.

Граница области D называется *сильно достижимой* и *слабо плоской*, если соответствующие свойства имеют место в каждой точке ее границы.

Предложение 1.1. *Если граница области D — слабо плоская в точке $x_0 \in \partial D$, то ∂D сильно достижима в точке x_0 (см. предложение* 3.1 *в* [9]*, а также предложение* 13.6 *в монографии* [2]*).*

Ниже приведены вспомогательные результаты из работы [18], см. лемму 2.1 и теорему 3.2.

Лемма 1.1. *Пусть область D локально линейно связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\overline{D'}$ — компакт, а $f : D \to D'$ — кольцевой Q-гомеоморфизм в x_0, такой что $\partial D'$ сильно достижима хотя бы в одной точке предельного множества*

$$C(x_0, f) = \left\{ y \in X' : \ y = \lim_{k\to\infty} f(x_k), \ x_k \to x_0, \ x_k \in D \right\}, \tag{1.14}$$

$Q : X \to (0,\infty)$ — измеримая функция, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^{\alpha}_{x_0,\varepsilon}(d(x,x_0))\, d\mu(x) = o(I^{\alpha}_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)) \tag{1.15}$$

при $\varepsilon \to 0$ *для некоторого* $\varepsilon_0 \in (0, d(x_0))$, *где* $d(x_0) := \sup_{x\in D} d(x, x_0)$ *и* $\psi_{x_0,\varepsilon}(t)$ — *семейство неотрицательных измеримых* (*по Лебегу*) *функций на* $(0,\infty)$, *таких что*

$$I_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{x_0,\varepsilon}(t)\,dt < \infty \qquad \forall\, \varepsilon \in (0,\varepsilon_0)\,,\ \varepsilon_0 \in (0, d(x_0)). \quad (1.16)$$

Тогда f *продолжим в точку* x_0 *по непрерывности в* (X', d').

Теорема 1.1. *Пусть область* D *локально линейно связна во всех своих граничных точках и* $\overline{D}$ — *компакт, область* D' *имеет слабо плоскую границу, а* $f : D \to D'$ — *кольцевой* Q*-гомеоморфизм с* $Q \in L^1_\mu(D)$. *Тогда обратное отображение* $g = f^{-1} : D' \to D$ *допускает непрерывное продолжение* $\overline{g} : \overline{D'} \to \overline{D}$.

2. О поведении одного сингулярного интеграла в $\lambda(\varepsilon)$-регулярных метрических пространствах

Варианты следующей леммы были сначала доказаны для BMO функций в $\mathbb{R}^n$, см. [10–12, 14, 15]. Затем для FMO функций в $\mathbb{R}^n$, см. [7] и в α-регулярных пространствах см. [9].

Лемма 2.1. *Пусть пространство* (X, d, μ) $\lambda(\varepsilon)$*-регулярно сверху,* D — *область в* X, $x_0 \in \overline{D}$. *Если для неотрицательной локально интегрируемой функции* $Q : D \to \mathbb{R}^+$, *выполнено условие*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\mu(B(x_0,\varepsilon)\cap D)} \int\limits_{B(x_0,\varepsilon)\cap D} Q(x)\ d\mu(x) < \infty\ , \qquad (2.1)$$

то

$$\int\limits_{D\cap A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{Q(x)\,d\mu(x)}{\lambda(d(x,x_0))} = O\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad (2.2)$$

при $\varepsilon \to 0$ *и некотором* $\varepsilon_0 \in (0, \delta_0)$, *где* $\delta_0 = \min(e^{-1}, d_0)$, $d_0 = \sup_{x\in D} d(x, x_0)$.

Доказательство. Выберем $\varepsilon_0 \in (0, \delta_0)$, такое что функция Q интегрируема в $D_0 = D \cap B_0$ по мере μ, где $B_0 = B(x_0, \varepsilon_0)$, и

$$s_0 = \sup_{r\in(0,\varepsilon_0)} \frac{1}{\mu(D_r)} \int\limits_{D_r} Q(x)\ d\mu(x)\ < \infty,$$

$D_r = D \cap B(x_0, r)$. Пусть далее $\varepsilon < 2^{-1}\varepsilon_0$, $\varepsilon_k = 2^{-k}\varepsilon_0$, $A_k = \{x \in X : \varepsilon_{k+1} \le d(x, x_0) < \varepsilon_k\}$, $B_k = B(x_0, \varepsilon_k)$ и пусть N — натуральное число, такое что $\varepsilon \in [\varepsilon_{N+1}, \varepsilon_N)$. Тогда $D \cap A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) \subset \Delta(\varepsilon) := \bigcup_{k=0}^{N} \Delta_k$, где $\Delta_k = D \cap A_k$ и

$$\eta(\varepsilon) := \int\limits_{\Delta(\varepsilon)} \frac{Q(x) d\mu(x)}{\lambda(d(x,x_0))} \leq \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{\Delta_k} \frac{Q(x) d\mu(x)}{\lambda(d(x,x_0))}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{\lambda(\varepsilon_{k+1})} \int\limits_{B_k \cap D} Q(x)\ d\mu(x) \leq s_0 \cdot \sum_{k=0}^{N} \frac{\mu(B_k \cap D)}{\lambda(\varepsilon_{k+1})}.$$

В силу $\lambda(\varepsilon)$-регулярности сверху, имеем $\mu(B_k) \leq C \cdot \lambda(\varepsilon_k)$ и

$$\eta(\varepsilon) \leq C \cdot s_0 \cdot \sum_{k=0}^{N} \frac{\lambda(\varepsilon_k)}{\lambda(\varepsilon_{k+1})} \leq 2C \cdot s_0 \cdot N.$$

Так как по построению $N < \log_2 \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} < \log_2 \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log 2}$, то

$$\int\limits_{D \cap A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{Q(x) d\mu(x)}{\lambda(d(x,x_0))} \leq \frac{2C \cdot s_0}{\log 2} \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

Лемма доказана. □

3. О гомеоморфном продолжении на границу

В данном параграфе будут сформулированы достаточные условия для непрерывного и гомеоморфного продолжения на границу кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах.

Теорема 3.1. *Пусть пространство (X, d, μ) $\lambda(\varepsilon)$-регулярно сверху с условием*

$$\lambda(\varepsilon) = o\left(\varepsilon^{\alpha} \log^{\alpha-1} \frac{1}{\varepsilon}\right), \tag{3.1}$$

при $\varepsilon \to 0$, D — локально линейно связная область на границе, $\overline{D'}$ — компакт и $\partial D'$ сильно достижима. Если выполнено условие (2.1) в каждой точке $x_0 \in \partial D$, то любой кольцевой Q-гомеоморфизм $f : D \to D'$ продолжим на границу области D по непрерывности в (X', d', μ').

Доказательство. Из условия (3.1) следует, что

$$\int\limits_{0}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}(t)} = \infty. \tag{3.2}$$

Выбирая в лемме 1.1 функцию $\psi(t) = \frac{1}{\lambda^{1/\alpha}(t)}$ и комбинируя с заключением леммы 2.1, по правилу Лопиталя получаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\frac{dt}{\lambda^{1/\alpha}(t)}\right)^{-\alpha}\cdot\int\limits_{D\cap A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)}\frac{Q(x)d\mu(x)}{\lambda(d(x,x_0))}$$
$$\leq \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\frac{dt}{\lambda^{1/\alpha}(t)}\right)^{-\alpha}\cdot c\log\frac{1}{\varepsilon}$$
$$=\gamma\,\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\lambda(\varepsilon)}{\varepsilon^{\alpha}}\log^{1-\alpha}\frac{1}{\varepsilon},$$

где $\gamma = \frac{c}{\alpha^{\alpha}}$. Согласно (3.1),

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\frac{dt}{\lambda^{1/\alpha}(t)}\right)^{-\alpha}\cdot\int\limits_{D\cap A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)}\frac{Q(x)d\mu(x)}{\lambda(d(x,x_0))}=0.$$

Так как условие леммы 1.1 выполнено, то существует продолжение по непрерывности в точку x_0. $\square$

Комбинируя теоремы 1.1 и 3.1, получаем следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть пространство (X,d,μ) $\lambda(\varepsilon)$-регулярно сверху, D и D' имеют слабо плоские границы, пусть также $\overline{D}$ и $\overline{D'}$ — компакты, $Q : X \to (0,\infty)$ — функция класса $L^1_\mu(D)$ с условием* (2.1) *в каждой точке $x_0 \in \partial D$. Если выполнено условие* (3.1), *то любой кольцевой Q-гомеоморфизм $f : D \to D'$ допускает продолжение до гомеоморфизма $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.*

4. О приложениях к квазиконформным отображениям в $\lambda(\varepsilon)$-регулярных метрических пространствах

Следуя аналогии геометрическому определению Вяйсяля, см. 13.1 в [3], говорим, что гомеоморфизм $f : D \to D'$ называется *квазиконформным*, если

$$K^{-1}M(\Gamma) \leq M(f(\Gamma)) \leq KM(\Gamma) \tag{4.1}$$

для некоторого $K \in [1,\infty)$ и любого семейства кривых Γ в D. т.е. если искажение модулей семейств кривых при отображении f ограничено. В частности, гомеоморфизм $f : D \to D'$ называем *конформным*, если

$$M(f(\Gamma)) = M(\Gamma) \tag{4.2}$$

для любых семейств кривых в D.

Теорема 4.1. *Пусть пространство (X, d, μ) $\lambda(\varepsilon)$-регулярно сверху с условием* (3.1)*, D локально линейно связна, $\overline{D'}$ — компакт и $\partial D'$ сильно достижима. Тогда любое квазиконформное отображение $f : D \to D'$ продолжимо в каждую точку $x_0 \in \partial D$ по непрерывности в (X', d', μ').*

Теорема 4.2. *Пусть пространство (X, d, μ) $\lambda(\varepsilon)$-регулярно сверху с условием* (3.1)*, D и D' имеют слабо плоские границы, пусть также $\overline{D}$ и $\overline{D'}$ — компакты. Тогда любое квазиконформное отображение $f : D \to D'$ допускает продолжение до гомеоморфизма $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.*

Литература

[1] W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton: Princeton Univ. Press, 1948.

[2] B. Fuglede, *Extremal length and functional completion* // Acta Math., **98** (1957), 171–219.

[3] J. Heinonen, *Lectures on Analysis on Metric Spaces*, New York: Springer, 2001.

[4] J. Heinonen, I. Holopainen, *Quasiregular mappings on Carnot groups* // J. Geom. Anal., **7** (1997), No. 1, 109–148.

[5] J. Heinonen, *A capacity estimate on Carnot groups* // Bull. Sci. Math., **119** (1995), No. 1, 475–484.

[6] J. Heinonen, P. Koskela, *Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry* // Acta Math., **181** (1998), No. 1, 1–61.

[7] A. Ignat'ev, V. Ryazanov, *Finite mean oscillation in the mapping theory* // Ukrainian Math. Bull., **2** (2005), No. 3, 403–424.

[8] К. Куратовский, *Топология. Т. 2*, М.: Мир, 1969.

[9] В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов, *Слабо плоские пространства и границы в теории отображений* // Укр. мат. вестник, **4** (2007), No. 2, 199–234.

[10] В. Рязанов, У. Сребро, Э. Якубов, *К теории BMO-квазирегулярных отображений* // Докл. РАН, **369** (1999), No. 1, 13–15.

[11] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *BMO-qasikonformal mappings* // J. d'Anal. Math., **83** (2001), 1–20.

[12] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Plane mappings with dilatation dominated by functions of bounded mean oscillation* // Sib. Adv. in Math., **11** (2001), No. 2, 94–130.

[13] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in Modern Mapping Theory, Springer Monographs in Mathematics*, Springer, New York etc., 2009.

[14] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Q-homeomorphisms* // Contemporary Math., **364** (2004), 193–203.

[15] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *On Q-homeomorphisms* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math., **30** (2005), 49–69.

[16] J. Mitchell, *On Carnot-Caratheodory metrics* // J. Differential Geometry, **21** (1985), 35–45.

[17] P. Pansu, *Metriques de Carnot-Caratheodory et quasiisometries des espaces symetriques de rang un* // Ann. of Math., **119** (1989), 1–60.

[18] Е. С. Смоловая, *Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах* // Укр. мат. журн., **62** (2010), No. 5, 682–689.

[19] J. T. Tyson, *Metric and geometric quasiconformality in Ahlfors regular Loewner spaces* // Conform. Geom. Dyn., **5** (2001), 21–73 (electronic).

[20] J. Väisälä, *Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings*, Lecture Notes in Math., **229** (1971), Berlin: Springer.

Сведения об авторах

Елена Сергеевна Афанасьева
Институт прикладной математики и механики НАН Украины
E-Mail: `es.afanasjeva@yandex.ru`

Руслан Радикович Салимов
Институт математики НАН Украины
E-Mail: `ruslan623@yandex.ru`