Український математичний вісник
Том 12 **(2015)**, № 3, 326 – 344

Аналог теоремы Шварца о спектральном анализе на гиперболической плоскости

Валерий В. Волчков, Виталий В. Волчков

(Представлена Р. М. Трегубом)

Аннотация. Пусть $\mathbb{D}$ — открытый единичный круг в комплексной плоскости. Показано, что всякое инвариантное относительно взвешенных конформных сдвигов подпространство в $C(\mathbb{D})$ содержит радиальную собственную функцию соответствующего инвариантного дифференциального оператора. Эта функция выражается через гипергеометрическую функцию Гаусса и является обобщением сферической функции в круге $\mathbb{D}$, рассматриваемом как гиперболическая плоскость с соответствующей римановой структурой.

2010 MSC. 26B15, 44A15, 49Q15, 53C65, 53C355.

Ключевые слова и фразы. Спектральный анализ, инвариантное подпространство, гиперболическая плоскость.

1. Введение

Известная теорема Л. Шварца о спектральном анализе утверждает, что всякое ненулевое инвариантное относительно сдвигов подпространство в $C(\mathbb{R}^1)$ содержит экспоненту $e^{\lambda x}$ при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$ (см. [1]). В [1] Л. Шварц предположил, что при $n \geq 2$ любое ненулевое подпространство в $C(\mathbb{R}^n)$ с аналогичным свойством должно содержать функцию

$$x \to e^{(\lambda,x)} \tag{1.1}$$

при некотором $\lambda \in \mathbb{C}^n$, где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$. Вопрос оставался открытым более двадцати пяти лет. Наконец, в 1975 году Д.И. Гуревич [2] опроверг указанную гипотезу Л. Шварца. Более точно, он доказал существование шести распределений $\mu_1, \dots, \mu_6$ с компактными носителями на $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, таких, что пространство $\mathcal{U} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ решений системы уравнений свертки

$$f * \mu_i = 0, \quad i = 1, \dots, 6,$$

Статья поступила в редакцию 02.09.2014

ISSN 1810 – 3200.

является ненулевым, но не содержит функцию вида (1.1) ни при каком $\lambda \in \mathbb{C}^n$.

Вопрос о том, при каких дополнительных условиях справедливы аналоги теоремы Л. Шварца для $C(\mathbb{R}^n)$ и других пространств непрерывных функций рассматривался многими авторами (см., например, обзор [3] с обширной библиографией, а также [4–6]). Один из наиболее существенных результатов в этом направлении был получен Л. Брауном, Б. М. Шрейбером и Б. А. Тейлором [7]. Они доказали, что любое ненулевое подпространство $\mathcal{U}$ в $C(\mathbb{R}^n)$, инвариантное относительно сдвигов и вращений, содержит радиальную функцию

$$x \to (\lambda\,|x|)^{1-\frac{n}{2}}\, J_{\frac{n}{2}-1}(\lambda\,|x|), \tag{1.2}$$

где λ — некоторое комплексное число, $|x|$ — евклидова норма вектора $x \in \mathbb{R}^n$, J_ν — функция Бесселя первого рода с индексом ν. Данный результат согласуется со сформулированной выше теоремой Л. Шварца следующим образом. Экспонента $e^{\lambda x}$ является собственной функцией оператора дифференцирования $\dfrac{d}{dx}$ на вещественной прямой, порождающего алгебру всех дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами на $\mathbb{R}^1$. Такие операторы, очевидно, коммутируют со сдвигами в $\mathbb{R}^1$. Аналогично, функция (1.2) является радиальной собственной функцией оператора

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \tag{1.3}$$

в $\mathbb{R}^n$, который порождает алгебру всех дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$, коммутирующих со всеми движениями $\mathbb{R}^n$. (Напомним, что движением $\mathbb{R}^n$ называется неоднородное линейное преобразование, сохраняющее расстояние между точками этого пространства и его ориентацию.) Помимо значительного самостоятельного интереса, теорема Л. Брауна, Б. М. Шрейбера и Б. А. Тейлора имеет существенные приложения в интегральной геометрии, например, к известной проблеме Помпейю (см. [3]). Можно без преувеличения сказать, что с момента опубликования работы [7] начался новый, современный этап в исследовании этой старой проблемы. За подробностями мы отсылаем читателя к обзорам [3, 8, 9] и к монографиям [4–6], содержащим доказательства наиболее сильных результатов, связанных с преобразованием Помпейю и его обобщениями.

В работах [10, 11] рассматривались аналоги теоремы Л. Брауна, Б. М. Шрейбера и Б. А. Тейлора для некомпактных симметрических пространств $X = G/K$ ранга один (см., например, [12]). В них показано, что всякое ненулевое подпространство $\mathcal{U}$ в $C(X)$, инвариантное относительно группы G, содержит сферическую функцию

$$x \to \varphi_\lambda(x),$$

то есть, инвариантную относительно подгруппы $K \subset G$ собственную функцию оператора Лапласа–Бельтрами L на X. Отметим, что оператор L является естественным аналогом оператора (1.3) для пространств X и соответственно порождает всю алгебру дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами на X, инвариантных относительно группы G. Подобные результаты для пространств Деймека–Риччи, а также для группы Гейзенберга установлены в [13, 14].

Доказательства основных результатов из цитируемых выше работ основаны на методах классического гармонического анализа и существенно используют инвариантность рассматриваемой задачи относительно соответствующей группы преобразований. В ряде случаев, когда такая инвариантность нарушена, подобные методы становятся неприменимыми. Это относится, в частности, к ситуации, когда рассматриваются преобразования с весом, часто возникающие в задачах интегральной геометрии. Отметим, что до настоящего времени не было известно какого-либо аналога теоремы Шварца для сдвигов с весовыми множителями на симметрических пространствах.

В последнее десятилетие авторы данной работы разработали новый подход к рассматриваемым проблемам, который основан на применении операторов с трансмутационным свойством (см. [5, 6, 15]). Это позволило получить окончательные результаты в ряде задач, в частности, локальные варианты цитируемых выше результатов (см. [5, 6]). В данной работе, на основе развития техники трансмутационных отображений, получен первый весовой аналог теоремы Шварца для соответствующих подпространств непрерывных функций на гиперболической плоскости.

Точная формулировка и обсуждение основного результата содержатся в § 2. В §§ 3–6 доказываются некоторые вспомогательные утверждения и развивается необходимый аппарат, связанный с обобщенным сферическим преобразованием и трансмутационными отображениями. Доказательство основной теоремы 2.1 приводится в § 7.

2. Формулировка основного результата

Всюду в дальнейшем, G — группа конформных автоморфизмов единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Для любых $g \in G$, $z \in \mathbb{D}$

через gz обозначается образ точки z при отображении g. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Для $z, \zeta \in \mathbb{D}$ положим

$$W(\zeta, z, \alpha) = \exp\big(2i\alpha \arg(1 - z\,\overline{\zeta})\big), \tag{2.4}$$

где символом arg обозначается главное значение аргумента. Введем α-сдвиг функции $f \in C(\mathbb{D})$ по правилу

$$f_{g,\alpha}(z) = f(g^{-1}z)W(g0, z, \alpha), \quad z \in \mathbb{D}, g \in G. \tag{2.5}$$

Рассмотрим дифференциальный оператор $\mathfrak{L}_\alpha$, действующий на пространстве $C^2(\mathbb{D})$ следующим образом

$$\mathfrak{L}_\alpha = 4(1-|z|^2)^2\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} - 4\alpha(1-|z|^2)\left(z\frac{\partial}{\partial z} - \overline{z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) - 4\alpha^2|z|^2 Id, \tag{2.6}$$

где Id — тождественный оператор. Далее будет показано, что оператор $\mathfrak{L}_\alpha$ инвариантен относительно α-сдвигов (2.5) (см. § 4). Пусть

$$\mathcal{H}_{\lambda,\alpha}(z) = (1-|z|^2)^{\frac{1-i\lambda}{2}} F\left(\alpha + \frac{1-i\lambda}{2}, \frac{1-i\lambda}{2} - \alpha; 1; |z|^2\right), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{2.7}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ и F — гипергеометрическая функция Гаусса. Используя формулы дифференцирования для гипергеометрической функции (см. [16, формулы 2.8(25), 2.8(26)]), из (2.6) и (2.7) получаем

$$(\mathfrak{L}_\alpha \mathcal{H}_{\lambda,\alpha})(z) = -(\lambda^2 + 4\alpha^2 + 1)\mathcal{H}_{\lambda,\alpha}(z). \tag{2.8}$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\mathcal{U}$ — ненулевое подпространство в $C(\mathbb{D})$, инвариантное относительно всех сдвигов*

$$f \to f_{g,\alpha}, \quad g \in G.$$

Тогда $\mathcal{H}_{\lambda,\alpha} \in \mathcal{U}$ при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$.

Доказательство теоремы 2.1 основано на развитии методов, предложенных авторами в [15], и заключается в следующем. Группа G является группой движений гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$, реализованной в виде диска $\mathbb{D}$ с соответствующей римановой структурой (см. [17, введение, § 4]). Рассматриваемая задача сводится к изучению операторов обобщенной свертки, имеющих вид

$$f \to \int\limits_{\mathbb{H}^2} f(z)\, K(g^{-1}z)\, W(g0, z, \alpha)\, d\mu(z), \quad g \in G, \tag{2.9}$$

где $K \in C(\mathbb{H}^2)$ — радиальная функция с компактным носителем и $d\mu$ — инвариантная относительно группы G мера на $\mathbb{H}^2$.

Для исследования операторов (2.9) вводятся трансмутационные операторы, устанавливающие гомеоморфизм между пространством гладких радиальных функций на $\mathbb{H}^2$ и пространством чётных функций из $C^\infty(\mathbb{R}^1)$. В некотором обобщенном смысле эти операторы коммутируют с оператором обобщенной свёртки, что позволяет произвести дальнейшую редукцию рассматриваемой задачи к одномерному случаю. Наконец, в этом случае используется уже известное наличие спектрального анализа в $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ (см. [1]).

Реализация указанного подхода требует развития аппарата, связанного с изучением обобщенных сферических функций на $\mathbb{H}^2$ и соответствующих сферических преобразований на пространстве радиальных функций из $C^\infty(\mathbb{H}^2)$ с компактными носителями. Необходимый вспомогательный материал и соответствующие результаты изложены в §§ 3–6.

Относительно других аспектов теории операторов свёртки на группах, см., например, [6, часть 2, гл. 8], [11].

3. Основные обозначения

Как известно, для любого $g \in G$ существуют и определяются однозначно числа $\tau, z \in \mathbb{C}$, такие, что $|\tau| = 1$, $|z| < 1$ и

$$gw = \tau \,\frac{w - z}{1 - \overline{z}w} \tag{3.10}$$

при всех $w \in \mathbb{D}$. Отображения (3.10) являются движениями в модели Пуанкаре гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$, реализованной в виде круга $\mathbb{D}$ (см., например, [17, введение, § 4]). Гиперболическое расстояние d между точками $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ в этой модели определяется равенством

$$d(z_1, z_2) = \frac{1}{2}\ln\frac{|1 - \overline{z}_1 z_2| + |z_2 - z_1|}{|1 - \overline{z}_1 z_2| - |z_2 - z_1|}.$$

В частности,

$$d(z, 0) = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \quad \text{и} \quad |z| = \operatorname{th} d(z, 0), \quad z \in \mathbb{H}^2.$$

Расстояние d и гиперболическая мера $d\mu$ на $\mathbb{H}^2$, определенная равенством

$$d\mu(z) = \frac{i}{2}\frac{dz \wedge \overline{dz}}{(1 - |z|^2)^2},$$

инвариантны относительно группы G.

Для $r > 0$ символом B_r будем обозначать открытый гиперболический круг радиуса r с центром в нуле, т.е.

$$B_r = \{z \in \mathbb{H}^2 : d(0, z) < r\}.$$

Для $r \geq 0$ обозначим $\overline{B}_r = \{z \in \mathbb{H}^2 : d(0, z) \leq r\}$.

Пусть $\mathcal{D}(\mathbb{H}^2)$ (соответственно $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$) — множество всех функций с компактными носителями из $C^\infty(\mathbb{H}^2)$ (соответственно $C^\infty(\mathbb{R}^1)$) со стандартной топологией (см., например, [17, гл. 2, § 2, п. 2]). Для функции $f \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^2)$ положим

$$r(f) = \min\{r > 0 : \operatorname{supp} f \subset \overline{B}_r\},$$

где $\operatorname{supp} f$ — носитель f. Для $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ определим величину $r(f)$ равенством

$$r(f) = \min\{r > 0 : \operatorname{supp} f \subset [-r, r]\}.$$

Символами $C_\natural(\mathbb{H}^2)$, $C_\natural^\infty(\mathbb{H}^2)$ и $\mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)$ будем обозначать соответственно пространства радиальных функций из $C(\mathbb{H}^2)$, $C^\infty(\mathbb{H}^2)$ и $\mathcal{D}(\mathbb{H}^2)$ с индуцированной топологией. Аналогично, символы $C_\natural^\infty(\mathbb{R}^1)$ и $\mathcal{D}_\natural(\mathbb{R}^1)$ обозначают пространства четных функций из $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ и $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ соответственно. Для $f \in C_\natural(\mathbb{H}^2)$ определим функцию f_0 на $[0, +\infty)$ посредством равенства

$$f_0(|z|) = f(z), \quad z \in \mathbb{H}^2. \tag{3.11}$$

Как обычно, символом $\widehat{h}$ будем обозначать преобразование Фурье функции $h \in L^1(\mathbb{R}^1)$, то есть

$$\widehat{h}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}^1.$$

Если $h_1, h_2 \in L^1(\mathbb{R}^1)$, то определена свертка $h_1 * h_2 \in L^1(\mathbb{R}^1)$ и при этом

$$\widehat{h_1 * h_2} = \widehat{h}_1 \widehat{h}_2. \tag{3.12}$$

Приведем теперь некоторые тождества для функции $W(\zeta, z, \alpha)$, необходимые в дальнейшем.

Лемма 3.1. *Пусть $\zeta, z \in \mathbb{D}$, $g \in G$. Тогда*

$$W(\zeta, z, \alpha) = W(-\zeta, -z, \alpha) = W(z, \zeta, -\alpha) = W(\overline{z}, \overline{\zeta}, \alpha), \tag{3.13}$$

$$W(g0, \zeta, \alpha) W(z, g0, \alpha) = W(g^{-1}\zeta, g^{-1}z, \alpha) W(z, \zeta, \alpha). \tag{3.14}$$

В частности,

$$W(g0, gz, \alpha) = W(z, g^{-1}0, \alpha). \tag{3.15}$$

Доказательство. Равенства в (3.13) сразу следуют из (2.4). Для доказательства (3.14) запишем действие g в виде

$$gz = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}, \quad \text{где } a,b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1. \tag{3.16}$$

Тогда $g0 = b/\bar{a}$,

$$g^{-1}z = \frac{\bar{a}z - b}{-\bar{b}z + a},$$

и (3.14) получается непосредственным вычислением. Полагая в (3.14) $\zeta = 0$ и заменяя g на g^{-1}, приходим к (3.15). □

Соотношение (3.14) показывает, что суперпозиция α-сдвигов преобразуется по формуле

$$(f_{g,\alpha})_{h,\alpha} = W(g0, h^{-1}0, \alpha) f_{hg,\alpha}, \quad h, g \in G.$$

4. Инвариантный оператор $\mathfrak{L}_\alpha$

Наша дальнейшая цель — установить инвариантность оператора $\mathfrak{L}_\alpha$ относительно α-сдвигов (2.5). Доказательство этого факта удобно разбить на несколько лемм. Будем считать, что действие элемента $g \in G$ на точку $z \in \mathbb{H}^2$ записано в виде (3.16). Для удобства положим

$$u_\alpha(z) = W(g0, z, \alpha) = \exp\Big(2i\alpha \arg\Big(1 - \frac{\bar{a}\,\bar{b}}{|a|^2}\,z\Big)\Big).$$

Напомним также, что оператор Лапласа–Бельтрами $L_{\mathbb{H}^2}$ на гиперболической плоскости имеет вид

$$L_{\mathbb{H}^2} = 4(1-|z|^2)^2 \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \bar{z}} \tag{4.17}$$

(см. [17, введение]).

Лемма 4.1. *Имеет место равенство*

$$L_{\mathbb{H}^2}(u_\alpha)(z) = -4\alpha^2|a|^2|b|^2 \left(\frac{1-|z|^2}{|a|^2 - ab\bar{z}}\right)^2 u_{\alpha-1}(z). \tag{4.18}$$

Доказательство. Используя соотношения

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial z} = -\frac{\alpha\,\bar{a}\,\bar{b}}{|a|^2 - ab\bar{z}} u_{\alpha-1}(z), \quad \frac{\partial u_\alpha}{\partial \bar{z}} = \frac{\alpha\,a\,b}{|a|^2 - ab\bar{z}} u_\alpha(z), \tag{4.19}$$

находим

$$\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\alpha\,a\,b}{|a|^2 - ab\bar{z}}\,\frac{\partial u_\alpha}{\partial z} = -\frac{\alpha^2|a|^2|b|^2}{(|a|^2 - ab\bar{z})^2} u_{\alpha-1}(z).$$

Отсюда и из (4.17) следует (4.18). □

Лемма 4.2. *Пусть* $\Phi(z) = f(g^{-1}z)\, u_\alpha(z)$. *Тогда*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}(g^{-1}z)\frac{u_\alpha(z)}{(a-\bar{b}z)^2} - \alpha\bar{a}\bar{b}\, f(g^{-1}z)\, \frac{u_{\alpha-1}(z)}{|a|^2 - ab\bar{z}}, \tag{4.20}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(g^{-1}z)\frac{u_\alpha(z)}{(\bar{a}-b\bar{z})^2} + \alpha ab\, f(g^{-1}z)\, \frac{u_{\alpha}(z)}{|a|^2 - ab\bar{z}}. \tag{4.21}$$

Доказательство. Поскольку g^{-1} — голоморфное отображение, имеем

$$\frac{\partial}{\partial z}(f\circ g^{-1}) = \frac{\partial f}{\partial z}(g^{-1}z)\, \frac{\partial g^{-1}}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}(g^{-1}z)\, \frac{1}{(a-\bar{b}z)^2}, \tag{4.22}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f\circ g^{-1}) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(g^{-1}z)\, \frac{\partial \overline{g^{-1}}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(g^{-1}z)\, \frac{1}{(\bar{a}-b\bar{z})^2}. \tag{4.23}$$

Из равенств (4.22), (4.23), (4.19) получим (4.20) и (4.21). □

Лемма 4.3. *Пусть* $a_1(z) = -4\alpha^2|z|^2$, $a_2(z) = -4\alpha(1-|z|^2)$. *Тогда*

$$a_1(g^{-1}z) = a_1(z) + \frac{4\alpha^2|a|^2(1-|z|^2)}{\left||a|^2 - ab\bar{z}\right|^2}\Big(2z(\mathrm{Re}(ab) - |b|^2\mathrm{Re}z)$$

$$-|b|^2(1-|z|^2)\Big), \tag{4.24}$$

$$(a-\bar{b}z)^2 a_2(g^{-1}z) g^{-1}(z) = \frac{4\alpha\, ab(1-|z|^2)^2}{|a|^2 - ab\bar{z}} + a_2(z)z, \tag{4.25}$$

$$(\bar{a}-b\bar{z})^2 a_2(g^{-1}z)\overline{g^{-1}(z)} = \frac{4\alpha\, \bar{a}\bar{b}(1-|z|^2)^2}{|a|^2 - \bar{a}\bar{b}z} + a_2(z)\bar{z}. \tag{4.26}$$

Доказательство. Соотношения (4.24)–(4.26) получаются непосредственным вычислением с использованием равенства $|a|^2 - |b|^2 = 1$. □

Следующее утверждение дает отмеченную выше инвариантность $\mathfrak{L}_\alpha$ относительно α-сдвигов.

Лемма 4.4. *Оператор* $\mathfrak{L}_\alpha$ *обладает обобщенным свойством инвариантности относительно действия группы* G:

$$\mathfrak{L}_\alpha(f(g^{-1}z)\, u_\alpha(z)) = (\mathfrak{L}_\alpha f)(g^{-1}z)\, u_\alpha(z). \tag{4.27}$$

Доказательство. По формуле для вычисления оператора Лапласа–Бельтрами от произведения функций (см. [17, гл.2, § 2, формула (17)]) имеем

$$L_{\mathbb{H}^2}((f\circ g^{-1})\,u_\alpha) = (f\circ g^{-1})L_{\mathbb{H}^2}(u_\alpha) + u_\alpha L_{\mathbb{H}^2}(f\circ g^{-1}) \\ + 4(1-|z|^2)^2\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial z}\,\frac{\partial}{\partial \bar z}(f\circ g^{-1}) + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \bar z}\,\frac{\partial}{\partial z}(f\circ g^{-1})\right).$$

Поскольку g^{-1} является движением $\mathbb{H}^2$, имеем

$$L_{\mathbb{H}^2}(f\circ g^{-1}) = (L_{\mathbb{H}^2}f)\circ g^{-1}.$$

Тогда из (4.18)–(4.21) находим

$$L_{\mathbb{H}^2}((f\circ g^{-1})u_\alpha) = u_\alpha(L_{\mathbb{H}^2}f)\circ g^{-1} - 4\alpha^2|a|^2|b|^2\left(\frac{1-|z|^2}{|a|^2-ab\bar z}\right)^2 \\ \times u_{\alpha-1}(z)\,f(g^{-1}z) + 4(1-|z|^2)^2 \\ \times\left(\frac{\alpha\,ab\,u_\alpha(z)}{(|a|^2-ab\bar z)(a-\bar b z)^2}\,\frac{\partial f}{\partial z}(g^{-1}z) - \frac{\alpha\,\bar a\bar b\,u_{\alpha-1}(z)}{(|a|^2-ab\bar z)(\bar a-b\bar z)^2}\,\frac{\partial f}{\partial \bar z}(g^{-1}z)\right). \tag{4.28}$$

Полагая

$$A_1 = -4\alpha^2|z|^2\mathrm{Id},\quad A_2 = -4\alpha(1-|z|^2)\left(z\frac{\partial}{\partial z} - \bar z\frac{\partial}{\partial \bar z}\right), \tag{4.29}$$

и используя лемму 4.2, получаем

$$A_1((f\circ g^{-1})u_\alpha)(z) = a_1(z)\,u_\alpha(z)\,f(g^{-1}z), \tag{4.30}$$

$$A_2((f\circ g^{-1})u_\alpha)(z) = a_2(z)\left(\frac{z\,u_\alpha(z)}{(a-\bar b z)^2}\,\frac{\partial f}{\partial z}(g^{-1}z) - \frac{\bar z\,u_\alpha(z)}{(\bar a-\bar b z)^2}\,\frac{\partial f}{\partial \bar z}(g^{-1}z)\right. \\ \left. -\frac{\alpha\,z}{|a|^2-ab\,\bar z}\left(\bar a\bar b u_{\alpha-1}(z) + ab\,u_\alpha(z)\right)f(g^{-1}z)\right). \tag{4.31}$$

Соотношения (4.28)–(4.31) дают

$$\mathfrak{L}_\alpha\left((f\circ g^{-1})u_\alpha\right) = u_\alpha(L_{\mathbb{H}^2}f)\circ g^{-1} + c_1(z)\,f(g^{-1}z) + \\ + c_2(z)\,\frac{\partial f}{\partial z}(g^{-1}z) + c_3(z)\,\frac{\partial f}{\partial \bar z}(g^{-1}z), \tag{4.32}$$

где

$$c_1(z) = a_1(z)\,u_\alpha(z) - 4\alpha^2|a|^2|b|^2\left(\frac{1-|z|^2}{|a|^2-ab\bar z}\right)^2 u_{\alpha-1}(z) \\ - \frac{\alpha\,z\,a_2(z)}{|a|^2-ab\bar z}(\bar a\bar b\,u_{\alpha-1}(z) + ab\,u_\alpha(z)),$$

$$c_2(z) = \frac{4\alpha\, ab(1-|z|^2)^2 u_\alpha(z)}{(|a|^2 - ab\bar{z})(a-\bar{b}z)^2} + \frac{z\, a_2(z)\, u_\alpha(z)}{(a-\bar{b}z)^2},$$

$$c_3(z) = \frac{-4\alpha\, \bar{a}\bar{b}(1-|z|^2)^2 u_{\alpha-1}(z)}{(|a|^2 - ab\bar{z})(\bar{a}-b\bar{z})^2} - \frac{\bar{z}\, a_2(z)\, u_\alpha(z)}{(\bar{a}-b\bar{z})^2}.$$

С другой стороны,

$$(\mathfrak{L}_\alpha f)(g^{-1}z)\, u_\alpha(z) = u_\alpha(z)\, (L_{\mathbb{H}^2} f)(g^{-1}z) + u_\alpha(z)\, a_1(g^{-1}z)\, f(g^{-1}z)$$
$$+u_\alpha(z)\, a_2(g^{-1}z) g^{-1}(z)\, \frac{\partial f}{\partial z}(g^{-1}z) - u_\alpha(z)\, a_2(g^{-1}z)\overline{g^{-1}(z)}\, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(g^{-1}z). \tag{4.33}$$

Сравнивая (4.32) с (4.33), из леммы 4.3 видим, что имеет место соотношение (4.27). □

5. "α"-свёртка и обобщенное сферическое преобразование на $\mathbb{H}^2$

Предположим, что $f_1, f_2 \in C_\natural(\mathbb{H}^2)$ и что хотя бы одна из функций f_1, f_2 имеет компактный носитель. Введем "α"-свёртку $f_1 \times f_2$ следующим образом:

$$(f_1 \times f_2)(z) = \int_{\mathbb{H}^2} f_2(\zeta)\, f_1\left(\frac{z-\zeta}{1-\zeta\bar{z}}\right) W(z,\zeta,\alpha)\, d\mu(\zeta), \quad z \in \mathbb{H}^2. \tag{5.34}$$

Из (5.34) и инвариантности меры $d\mu$ следует, что $f_1 \times f_2 \in C_\natural(\mathbb{H}^2)$ и

$$f_1 \times f_2 = f_2 \times f_1.$$

Кроме того, используя (3.14), получаем

$$(f_1)_{g,\alpha} \times f_2 = (f_1 \times f_2)_{g,\alpha}$$

для любого $g \in G$.

Далее, если $f_i \in C_\natural(\mathbb{H}^2)$, $i = 1, 2, 3$, и хотя бы две из функций f_i имеют компактные носители, то из (5.34) имеем

$$(f_1 \times f_2) \times f_3 = f_1 \times (f_2 \times f_3).$$

Лемма 5.1. *Пусть $f_1, f_2 \in C_\natural \cap C^2(\mathbb{H}^2)$ и хотя бы одна из функций f_1, f_2 имеет компактный носитель. Тогда*

$$\mathfrak{L}_\alpha(f_1 \times f_2) = f_1 \times \mathfrak{L}_\alpha f_2 = (\mathfrak{L}_\alpha f_1) \times f_2. \tag{5.35}$$

Доказательство. Соотношение (5.34) может быть переписано в виде

$$(f_1 \times f_2)(z) = \int\limits_G f_1(g0)\, f_2(g^{-1}z)\, W(g0, z, \alpha)\, dg, \tag{5.36}$$

где dg — мера Хаара на G, нормированная условием

$$\int\limits_G f(g0)dg = \int\limits_{\mathbb{D}} f(z)d\mu(z), \quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{D})$$

(см. [17, введение, § 4, п. 3]). Тогда первое равенство в (5.35) проверяется непосредственным вычислением с использованием (5.36) и (2.6). Второе равенство в (5.35) следует из первого в силу коммутативности "α" -свертки. □

Далее, пусть функция $f \in C_\natural(\mathbb{H}^2)$ имеет компактный носитель. Для $\lambda \in \mathbb{C}$ введем обобщенное сферическое преобразование

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{H}^2} f(z)\mathcal{H}_{\lambda,\alpha}(z)d\mu(z), \tag{5.37}$$

где, как и ранее, $\alpha \in \mathbb{R}$ — фиксировано. При $\alpha = 0$ это преобразование совпадает с классическим сферическим преобразованием $\widetilde{f}$ функции f на $\mathbb{H}^2$ (см. [17, введение, § 4, п.2]).

Лемма 5.2. *Пусть функции f_1 и f_2 класса $C_\natural(\mathbb{H}^2)$ имеют компактные носители. Тогда*

$$\mathcal{F}(f_1 \times f_2) = \mathcal{F}(f_1)\, \mathcal{F}(f_2). \tag{5.38}$$

Доказательство. Из равенства (5.37) и ассоциативности "α" -свертки находим

$$\mathcal{F}(f_1 \times f_2)(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{H}^2} (f_1 \times f_2)(z)\mathcal{H}_{\lambda,\alpha}(z)\, d\mu(z) = \int\limits_{\mathbb{H}^2} f_1(z)F(z)\, d\mu(z), \tag{5.39}$$

где

$$F(z) = \mathcal{H}_{\lambda,\alpha} \times f_2. \tag{5.40}$$

Используя лемму 5.1 и (2.8), получаем

$$\mathfrak{L}_\alpha F = (\mathfrak{L}_\alpha \mathcal{H}_{\lambda,\alpha}) \times f_2 = -(\lambda^2 + 4\alpha^2 + 1)F. \tag{5.41}$$

Равенство (5.40) показывает, что функция F является непрерывной в нуле. Сопоставляя этот факт с соотношением (5.41), заключаем, что

$$F(z) = F(0)\mathcal{H}_{\lambda,\alpha}(z) = \mathcal{F}(f_2)\mathcal{H}_{\lambda,\alpha}(z) \tag{5.42}$$

(см. [17, введение, доказательство леммы 3.7]). Тогда из (5.39) имеем

$$\mathcal{F}(f_1 \times f_2)(\lambda) = \mathcal{F}(f_2) \int\limits_{\mathbb{H}^2} f_1(z)\mathcal{H}_{\lambda,\alpha}(z)\, d\mu(z) = \mathcal{F}(f_1)\, \mathcal{F}(f_2),$$

что и требовалось. □

Рассмотрим функцию

$$a(\lambda) = \frac{\Gamma\left(\frac{i\lambda-2\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{i\lambda+2\alpha+1}{2}\right)}{2^{2\alpha+1-i\lambda}\,\Gamma(i\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{5.43}$$

Из свойств гамма-функции следует, что функция $a(\lambda)$ является мероморфной в $\mathbb{C}$. Пусть $\mathcal{P}$ — множество особых точек функции $a(-\lambda)$ в полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\lambda > 0\}$. Отметим, что при $\alpha = 0$ множество $\mathcal{P}$ является пустым. Положим

$$\tau(\lambda) = -i \operatorname*{res}_{z=\lambda}(a(z)\, a(-z)), \quad \lambda \in \mathcal{P}.$$

Получим теперь формулу обращения для преобразования $\mathcal{F}$. Встречающиеся ниже суммы с пустым множеством индексов суммирования считаются равными нулю.

Лемма 5.3. *Пусть $f \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)$. Тогда*

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{2^{4\alpha}}{\pi^2} \int\limits_0^\infty \mathcal{F}(f)(\lambda)\, \mathcal{H}_{\lambda,\alpha}(z)\, |a(\lambda)|^2 d\lambda \\ + \frac{2^{4\alpha+1}}{\pi} \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} \tau(\lambda)\, \mathcal{F}(f)(\lambda)\, \mathcal{H}_{\lambda,\alpha}(z), \end{aligned} \tag{5.44}$$

при этом интеграл в равенстве (5.44) *сходится абсолютно.*

Доказательство. Пусть $\alpha \geq 0$. Из формулы Стирлинга и (5.43) получаем, что

$$|a(\lambda)| \leq c_1(1 + |\lambda|)^{1/2}, \tag{5.45}$$

где $c_1 > 0$ не зависит от λ. Кроме того, при $z \in \mathbb{H}^2$, $t = \mathrm{arth}\,|z|$ имеем

$$\mathcal{H}_{\lambda,\alpha}(z) = \frac{2^{\,3/2}}{\pi} \int\limits_0^t (\mathrm{ch}2t - \mathrm{ch}2\xi)^{-\frac{1}{2}} F\left(2\alpha, -2\alpha; \frac{1}{2}; \frac{\mathrm{ch}t - \mathrm{ch}\xi}{2\mathrm{ch}t}\right) \cos\lambda\xi\, d\xi \tag{5.46}$$

(см. [5, предложение 7.3]). Положим $h(t,\xi) = \mathrm{ch}2t - \mathrm{ch}t$ при $0 < \xi < t/2$ и $h(t,\xi) = 2(t-\xi)\,\mathrm{sh}\,t$ при $t/2 \leq \xi < t$. Применяя теорему Лагранжа о среднем, получаем оценку $h(t,\xi) \le \mathrm{ch}2t - \mathrm{ch}2\xi$. Тогда из разложения функции F в гипергеометрический ряд вытекает, что

$$|\mathcal{H}_{\lambda,\alpha}(z)| \le c_2 \int\limits_0^t (h(t,\xi))^{-1/2} d\xi \le c_3, \tag{5.47}$$

где $c_2, c_3 > 0$ зависят только от α. Далее имеем

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = 2\pi \int\limits_0^{r(f)} \frac{\rho}{(1-\rho^2)^2}\, f_0(\rho)\, H_{\lambda,\alpha}(\rho)\, d\rho, \tag{5.48}$$

где $H_{\lambda,\alpha}(\rho) = \mathcal{H}_{\lambda,\alpha}(z)$ при $\rho = |z|$, $z \in \mathbb{H}^2$ (см. (3.11)). Интегрируя в (5.48) по частям с использованием [16, формулы 2.8(25), 2.8(26)], для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем равенство

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \big((1-i\lambda-2\alpha)(1-i\lambda+2\alpha-2)\big)^{-m} \mathcal{F}\big((d\,D)^m f_0(\rho)\big)(\lambda), \tag{5.49}$$

где дифференциальные операторы d и D действуют на функцию $h \in C^1(0,1)$ следующим образом

$$(d\,h)(\rho) = \frac{(1-\rho^2)^{2-\alpha}}{\rho} \frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho h(\rho)}{(1-\rho^2)^{1-\alpha}}\right),$$

$$(Dh)(\rho) = (1-\rho^2)^{\alpha+1} \frac{d}{d\rho}\left(\frac{h(\rho)}{(1-\rho^2)^{\alpha}}\right).$$

Учитывая, что $f \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)$, из (5.47) и (5.49) заключаем, что функция $\mathcal{F}(f)(\lambda)$ убывает при $\lambda \to +\infty$ быстрее любой отрицательной степени λ. Отсюда и из оценок (5.45) и (5.47) следует, что интеграл в (5.44) сходится абсолютно. Далее, пусть

$$\varphi_{\lambda,\alpha}(t) = F\left(\frac{2\alpha+1-i\lambda}{2}, \frac{2\alpha+1+i\lambda}{2}; 1; -\mathrm{sh}^2 t\right),$$

$$\triangle_\alpha(t) = 2^{4\alpha+2}\, \mathrm{sh}t\, \mathrm{ch}t.$$

Учитывая [16, формула 2.9(3)], равенство (5.37) для функции f можно записать в виде

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \int\limits_0^\infty \Phi(t)\, \varphi_{\lambda,\alpha}(t)\, \triangle_\alpha(t)\, dt,$$

где

$$\Phi(t) = 2^{-4\alpha-1}\pi\, f_0(\mathrm{th}t)(\mathrm{ch}t)^{-2\alpha}.$$

Отсюда, используя [18, теорема 2.3], получаем (5.44). $\square$

Следствие 5.1. *Пусть $f \in C_\natural(\mathbb{H}^2)$ и имеет компактный носитель. Тогда, если $\mathcal{F}(f)(\lambda) = 0$ при всех $\lambda > 0$, то $f = 0$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)$. Используя лемму 5.2, имеем

$$\mathcal{F}(f \times \varphi)(\lambda) = \mathcal{F}(f)(\lambda)\mathcal{F}(\varphi)(\lambda) = 0$$

при всех $\lambda > 0$. В силу аналитичности функции $\mathcal{F}(f \times \varphi)$ по λ последнее равенство выполнено при всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Поскольку $f \times \varphi \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)$, из леммы 5.3 следует, что $f \times \varphi = 0$ в $\mathbb{H}^2$. Отсюда и из произвольности φ заключаем, что $f = 0$. $\square$

Пусть $f \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)$. Как уже отмечалось при доказательстве леммы 5.3, $\mathcal{F}(f)(\lambda) = O(\lambda^{-\gamma})$ при $\lambda \to +\infty$ для любого фиксированного $\gamma > 0$. Кроме того, из соотношения (5.46) следует, что функция $\mathcal{F}(f)$ является целой и удовлетворяет оценке

$$|\mathcal{F}(f)(\lambda)| \leq ce^{r(f)|\mathrm{Im}\lambda|}$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от λ. Тогда из теоремы Пэли–Винера следует (см. [19, теорема 7.3.1]), что существует функция $\Lambda(f) \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{R}^1)$ такая, что $\widehat{\Lambda(f)} = \mathcal{F}(f)$ и $\Lambda(f) = 0$ вне отрезка $[-r(f), r(f)]$.

6. Трансмутационное отображение $\mathfrak{A}$

Для $f \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)$, $t \in \mathbb{R}^1$ положим

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}(f)(t) = \frac{2^{2\alpha}}{\pi^2} \int_0^\infty \mathcal{F}(f)(\lambda)|a(\lambda)|^2 \cos(\lambda t) d\lambda \\ + \frac{2^{4\alpha+1}}{\pi} \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} \tau(\lambda)\, \mathcal{F}(f)(\lambda) \cos(\lambda t).\end{aligned} \tag{6.50}$$

Из доказательства леммы 5.3 видно, что функция $\mathfrak{A}(f)$ принадлежит $C_\natural^\infty(\mathbb{R}^1)$. Для продолжения отображения $\mathfrak{A} : \mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2) \to C^\infty(\mathbb{R}^1)$ на пространство $C_\natural^\infty(\mathbb{H}^2)$ потребуется следующая лемма.

Лемма 6.1. *Пусть $f \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)$, $r \in (0, +\infty)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $f = 0$ *в* B_r;

(ii) $\mathfrak{A}(f) = 0$ *на* $(-r; r)$.

Доказательство. Из (5.44), (6.50) и (5.46) имеем

$$f_0(\mathrm{th}\rho) = \frac{2^{\,3/2}}{\pi}\int\limits_0^{\rho}\mathfrak{A}(f)(t)\,(\mathrm{ch}2\rho-\mathrm{ch}2t)^{-\frac{1}{2}}F\left(2\alpha,-2\alpha;\frac{1}{2};\,\frac{\mathrm{ch}\rho-\mathrm{ch}t}{2\mathrm{ch}\rho}\right)dt \tag{6.51}$$

для любого $\rho>0$. Если $f=0$ в B_r, отсюда получаем

$$\int\limits_0^{\rho}\mathfrak{A}(f)(t)\,K(\rho,t)(\rho-t)^{-\frac{1}{2}}dt=0$$

для некоторой функции $K\in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$. В силу четности функции $\mathfrak{A}(f)(t)$ из данного интегрального уравнения следует (см. [20, гл.3, §4, теорема 4.6]), что $\mathfrak{A}(f)(t)=0$ на $(-r,r)$. Тем самым, убеждаемся в справедливости импликации $(i)\Rightarrow(ii)$. Обратная импликация очевидна ввиду равенства (6.51). $\square$

Утверждение леммы 6.1 позволяет продолжить оператор $\mathfrak{A}$ на пространство $C_{\natural}^{\infty}(\mathbb{H}^2)$ по формуле

$$\mathfrak{A}(f)(t)=\mathfrak{A}(f\eta)(t),\quad f\in C_{\natural}^{\infty}(\mathbb{H}^2),\ t\in\mathbb{R}^1, \tag{6.52}$$

где η — произвольная функция класса $\mathcal{D}_{\natural}(\mathbb{H}^2)$, равная единице в $B_{|t|+\varepsilon}$ при некотором $\varepsilon>0$. Тогда $\mathfrak{A}(f)\in C_{\natural}^{\infty}(\mathbb{R}^1)$ и

$$\mathfrak{A}(f|_{B_r})=\mathfrak{A}(f)|_{(-r,r)}\quad \text{для любого}\quad r>0.$$

Теорема 6.1. *Имеют место следующие утверждения.*

(i) Если $f_1\in C_{\natural}^{\infty}(\mathbb{H}^2), f_2\in\mathcal{D}_{\natural}(\mathbb{H}^2)$, *то имеет место трансмутационное соотношение*

$$\mathfrak{A}(f_1\times f_2)=\mathfrak{A}(f_1)*\Lambda(f_2).$$

(ii) Если $\lambda\in\mathbb{C}$, *то*

$$\mathfrak{A}(\mathcal{H}_{\lambda,\alpha})(t)=\cos\lambda t.$$

(iii) Преобразование $\mathfrak{A}$ *осуществляет гомеоморфизм между* $C_{\natural}^{\infty}(\mathbb{H}^2)$ *и* $C_{\natural}^{\infty}(\mathbb{R}^1)$.

Доказательство. Определение оператора $\mathfrak{A}$ на пространстве $C_{\natural}^{\infty}(\mathbb{H}^2)$ показывает (см. (6.52)), что утверждение (i) достаточно установить для $f_1\in\mathcal{D}_{\natural}(\mathbb{H}^2)$. Однако в этом случае оно является простым следствием соотношений (6.50), (5.38) и (3.12). Далее, из (6.52) вытекает, что равенство (6.51) выполнено для любой функции $f \in C^\infty_\natural(\mathbb{H}^2)$. Из (6.51) и интегрального представления (5.46) имеем

$$\int_0^\rho \left(\mathfrak{A}(\mathcal{H}_{\lambda,\alpha})(t) - \cos(\lambda t)\right)(\mathrm{ch}2\rho - \mathrm{ch}2t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times F\left(2\alpha, -2\alpha; \frac{1}{2}; \frac{\mathrm{ch}\rho - \mathrm{ch}t}{2\mathrm{ch}\rho}\right) dt = 0$$

для любого $\rho > 0$. Как и в доказательстве леммы 6.1, отсюда следует (ii).

Для доказательства (iii) найдем обратный оператор $\mathfrak{A}^{-1}$. Для $F \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{R}^1)$ положим

$$\mathfrak{B}(F)(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \widehat{F}(\lambda)\,\mathcal{H}_{\lambda,\alpha}(z)\,d\lambda, \quad z \in \mathbb{H}^2. \tag{6.53}$$

Пусть $f_1 \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{R}^1)$, $f_2 \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)$. Используя соотношения (6.53), (3.12) и (5.42), находим

$$\begin{aligned}(\mathfrak{B}(f_1)\times f_2)(z) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \widehat{f}_1(\lambda)\,(\mathcal{H}_{\lambda,\alpha}\times f_2)(z)\,d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \widehat{f}_1(\lambda)\,\mathcal{F}(f_2)(\lambda)\mathcal{H}_{\lambda,\alpha}(z)\,d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \widehat{f}_1(\lambda)\,\widehat{\Lambda(f_2)}(\lambda)\,\mathcal{H}_{\lambda,\alpha}(z)\,d\lambda = \mathfrak{B}(f_1 * \Lambda(f_2))(z).\end{aligned} \tag{6.54}$$

Далее, из (6.53), (5.46) и формулы обращения для косинус-преобразования Фурье имеем равенство

$$\mathfrak{B}(F)(z) = \frac{2^{3/2}}{\pi}\int_0^{\mathrm{arth}\,\rho} F(t)\,(\mathrm{ch}2\rho - \mathrm{ch}2t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times F\left(2\alpha, -2\alpha; \frac{1}{2}; \frac{\mathrm{ch}\rho - \mathrm{ch}t}{2\mathrm{ch}\rho}\right) dt.$$

Из последнего равенства следует, что если $F \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{R}^1)$ и $r > 0$, то $F = 0$ на $(-r, r)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B}(F) = 0$ в B_r (см.

доказательство леммы 6.1). Продолжим оператор $\mathfrak{B}$ на пространство $C^{\infty}_{\natural}(\mathbb{R}^1)$ по формуле

$$\mathfrak{B}(F)(z) = \mathfrak{B}(F\eta)(z), \quad F \in C^{\infty}_{\natural}(\mathbb{R}^1), \quad z \in \mathbb{H}^2,$$

где η — произвольная функция из $\mathcal{D}_{\natural}(\mathbb{R}^1)$, равная единице в некоторой окрестности отрезка $[-\mathrm{arth}\,|z|, \mathrm{arth}\,|z|]$. Из вышесказанного следует, что такое продолжение не зависит от η. При этом $\mathfrak{B}(F) \in C^{\infty}_{\natural}(\mathbb{H}^2)$, $\mathfrak{B}(F|_{(-r,r)}) = \mathfrak{B}(F)|_{B_r}$ для любого $r > 0$ и равенство (6.54) выполнено для $f_1 \in C^{\infty}_{\natural}(\mathbb{R}^1), f_2 \in \mathcal{D}_{\natural}(\mathbb{H}^2)$. Повторяя теперь рассуждения из [5, доказательство теоремы 9.5], получаем, что $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{-1}$ и выполнено утверждение (iii). $\square$

7. Доказательство основного результата

Перейдем к доказательству теоремы 2.1. Пусть $f \in \mathcal{U}$, $f \neq 0$. Для любого $g \in G$ рассмотрим функцию

$$\Phi_g(z) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{g,\alpha}(ze^{i\varphi})d\varphi, \quad z \in \mathbb{H}^2. \tag{7.55}$$

Приближая интеграл в (7.55) римановыми суммами локально равномерно относительно переменной z и используя инвариантность $\mathcal{U}$ относительно группы поворотов, заключаем, что $\Phi_g \in \mathcal{U}$. Из (7.55) вытекает, что

$$\Phi_g(ze^{it}) = \Phi_g(z) \tag{7.56}$$

для любого $t \in \mathbb{R}^1$. Кроме того, поскольку $f \neq 0$ и

$$\Phi_g(0) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{g,\alpha}(0)d\varphi = 2\pi f(g^{-1}0),$$

получаем, что $\Phi_g(0) \neq 0$ при некотором $g \in G$. Отсюда и из (7.56) следует, что существует ненулевая радиальная функция $u \in \mathcal{U}$. Далее, из определения α-свертки следует, что существует радиальная функция $v \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^2)$ такая, что $u \times v \neq 0$. Как и выше, приближая интеграл в равенстве

$$(u\times v)(z) = \int\limits_{\mathbb{H}^2} v(\zeta)\, u\left(\frac{z-\zeta}{1-\zeta\overline{z}}\right) W(z,\zeta,\alpha)\, d\mu(\zeta) \tag{7.57}$$

римановыми суммами, имеем $u\times v \in \mathcal{U}$. Кроме того, из (7.57) следует, что функция $u\times v$ радиальна и принадлежит классу $C^{\infty}(\mathbb{H}^2)$. Таким

образом, существует ненулевая функция $w \in \mathcal{U} \cap C^{\infty}_{\natural}(\mathbb{H}^2)$. По теореме 6.1 (iii), $\mathfrak{A}(w) \in C^{\infty}_{\natural}(\mathbb{R}^1)$ и $\mathfrak{A}(w) \neq 0$. Кроме того, замыкание множества
$$\{\mathfrak{A}(w) * \psi, \quad \psi \in \mathcal{D}_{\natural}(\mathbb{R}^1)\}$$
в пространстве $C^{\infty}(\mathbb{R}^1)$ совпадает с образом замыкания в $C^{\infty}(\mathbb{H}^2)$ множества
$$\{w \times \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}_{\natural}(\mathbb{H}^2)\}$$
при отображении $\mathfrak{A}$. Докажем, что в этом образе содержится функция $\cos \lambda t$ при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$. Учитывая четность косинуса и функции $\mathfrak{A}(w)$, достаточно доказать, что $\cos \lambda t \in A$, где A — замыкание множества
$$\{\mathfrak{A}(w) * \psi, \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)\}$$
в пространстве $C^{\infty}(\mathbb{R}^1)$. По теореме Шварца о спектральном анализе в $C^{\infty}(\mathbb{R}^1)$ (см. [1]), множество A содержит экспоненту $e^{i\lambda t}$ при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$. Принимая во внимание инвариантность A относительно отражений $t \to -t$,, имеем аналогичное утверждение и для функции, $\cos \lambda t$. Применяя теперь теорему 6.1 (ii), (iii), отсюда получаем, что $\mathcal{H}_{\lambda,\alpha} \in \mathcal{U}$. Таким образом, теорема 2.1 доказана. $\square$

Литература

[1] L. Schwartz, *Theorie générale des functions moyenne-periodiqué* // Ann. Math., **48** (1947), 857–928.

[2] Д. И. Гуревич, *Контрпримеры к проблеме Л. Шварца* // Функц. анализ и его прил., **9** (1975), No. 2, 29–35.

[3] К. А. Беренстейн, Д. Струппа, *Комплексный анализ и уравнения в свёртках, Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления*, **54**, ВИНИТИ, М., 1989, 5–111.

[4] V. V. Volchkov, *Integral Geometry and Convolution Equations*, Dordrecht: Kluwer, 2003.

[5] V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, *Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group*, London: Springer, 2009.

[6] V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, *Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces*, Basel: Birkhäuser, 2013.

[7] L. Brown, B. M. Schreiber, B. A. Taylor, *Spectral synthesis and the Pompeiu problem* // Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **23** (1973), No. 3, 125–154.

[8] L. Zalcman, *A bibliographic survey of the Pompeiu problem* // Approximation by solutions of partial differential equations, **365**, Dordrecht: Kluwer, 1992, 185–194.

[9] L. Zalcman, *Supplementary bibliography to "A bibliographic survey of the Pompeiu problem"* // Contemp. Math. Radon Transform and Tomography, **278** (2001), 69–74.

[10] S. C. Bagchi, A. Sitaram, *Spherical mean periodic functions on semisimple Lie groups* // Pacific J. Math., **84** (1979), 241–250.

[11] S. C. Bagchi, A. Sitaram, *The Pompeiu problem revisited* // L'Enseignement Math., **36** (1990), 67–91.

[12] С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства*, М.: Мир, 1964.

[13] N. Peyerimhoff, E. Samiou, *Spherical spectral synthesis and two-radius theorems on Damek-Ricci spaces* // Ark. Mat., **48** (2010), 131–147.

[14] S. Thangavelu, *Mean periodic functions on phase space and the Pompeiu problem with a twist* // Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **45** (1995), N0. 4, 1007–1035.

[15] В. В. Волчков, Вит. В. Волчков, *Уравнения свертки на многомерных областях и редуцированной группе Гейзенберга* // Матем. сб., **199** (2008), No. 8, 29–60.

[16] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. I*, М.: Наука, 1973.

[17] С. Хелгасон, *Группы и геометрический анализ*, М.: Мир, 1987.

[18] T. H. Koornwinder, *Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups*, *Special Functions: Group Theoretical Aspects and Applications* (R.A. Askey et al. (eds.)), Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1984, 1–85.

[19] Л. Хермандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1*, М.: Мир, 1986.

[20] S. Helgason, *Integral Geometry and Radon Transforms*, New York: Springer, 2010.

Сведения об авторах

Валерий Владимирович Волчков
Виталий Владимирович Волчков

Донецкий национальный университет
E-Mail: `valeriyvolchkov@gmail.com`