Український математичний вісник
Том 13 **(2016)**, № 3, 324 – 349

Об устранении особенностей классов Орлича–Соболева

Евгений А. Севостьянов, Руслан Р. Салимов, Евгений А. Петров

(Представлена В.Я. Гутлянским)

Аннотация. Изучается локальное поведение замкнуто-открытых дискретных отображений классов Орлича–Соболева в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Установлено, что указанные отображения f имеют непрерывное продолжение в изолированную точку x_0 границы области $D \setminus \{x_0\}$, как только их внутренняя дилатация порядка $p \in (n-1, n]$ имеет мажоранту класса FMO (конечного среднего колебания) в указанной точке и, кроме того, предельные множества отображения f в x_0 и на ∂D не пересекаются. Другим достаточным условием возможности непрерывного продолжения указанных отображений является расходимость некоторого интеграла.

2010 MSC. Primary 30C65; Secondary 30C62, 31A15, 32U20.

Ключевые слова и фразы. Модули семейств кривых и поверхностей, отображения с ограниченным и конечным искажением, классы Соболева и Орлича–Соболева, устранение изолированных особенностей.

1. Введение

В настоящей заметке исследуется некоторый подкласс отображений с конечным искажением, активно изучаемых в последнее время рядом авторов (см., напр., [1–6] и [7]). Всюду далее D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$ и $\mathrm{dist}\,(A, B)$ — евклидово расстояние между множествами A и B в $\mathbb{R}^n$, $d(x,y) := |x-y|$, $d(C)$ — евклидов диаметр множества $C \subset \mathbb{R}^n$,

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}\,, \quad \mathbb{B}^n := B(0,1)\,,$$

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}\,, \quad \mathbb{S}^{n-1} := S(0,1)\,,$$

Статья поступила в редакцию 15.09.2016

$$A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\},$$

ω_{n-1} обозначает площадь единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, Ω_n — объём единичного шара $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $\overline{\mathbb{R}^n} := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. В дальнейшем всюду символом $\Gamma(E, F, D)$ мы обозначаем семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют множества E и F в D, т.е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$. Запись $f : D \to \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f непрерывно в D.

В дальнейшем $\mathcal{H}^k$ — нормированная k-мерная мера Хаусдорфа в $\mathbb{R}^n$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $J(x, f) = \det f'(x)$ — *якобиан отображения* f в точке x, где $f'(x)$ — *матрица Якоби* отображения f в точке x. Здесь и далее *предельным множеством отображения f относительно множества $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$* называется множество

$$C(f, E) := \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \exists x_0 \in E : y = \lim_{m \to \infty} f(x_m), x_m \to x_0 \right\}.$$

Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *сохраняющим границу отображением* (см. [8, разд. 3, гл. II]), если выполнено соотношение $C(f, \partial D) \subset \partial f(D)$. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит только из изолированных точек. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subset D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$. Отметим также, что в случае если $f : D \to \mathbb{R}^n$ открыто и дискретно, то замкнутость отображения f эквивалентна тому что f сохраняет границу (см. [8, теорема 3.3]). Пусть U – открытое множество, $U \subset \mathbb{R}^n$, $u : U \to \mathbb{R}$ – некоторая функция, $u \in L^1_{\rm loc}(U)$. Предположим, что найдётся функция $v \in L^1_{\rm loc}(U)$, такая что $\int\limits_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) u(x) dm(x) = -\int\limits_U \varphi(x) v(x) dm(x)$ для любой функции $\varphi \in C^0_1(U)$. Тогда будем говорить, что функция v является *обобщённой производной первого порядка функции u по переменной x_i* и обозначать символом: $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) := v$. Функция $u \in W^{1,1}_{\rm loc}(U)$, если u имеет обобщённые производные первого порядка по каждой из переменных в U, которые являются локально интегрируемыми в U.

Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Отображение $f : G \to \mathbb{R}^n$ принадлежит *классу Соболева* $W^{1,1}_{\rm loc}(G)$, пишут $f \in W^{1,1}_{\rm loc}(G)$, если все координатные функции $f = (f_1, \ldots, f_n)$ обладают обобщёнными частными производными первого порядка, которые локально интегрируемы в G в первой степени. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с конечным искажением*, если $f \in W^{1,1}_{\rm loc}(D)$ и для некоторой функции $K(x) : D \to [1, \infty)$ выполнено условие $\|f'(x)\|^n \leqslant K(x) \cdot |J(x, f)|$ при почти всех $x \in D$, где $\|f'(x)\| = \max\limits_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}$

(см. [1, п. 6.3, гл. VI]. Полагаем $l\left(f'(x)\right) = \min\limits_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}$. Отметим, что для отображений с конечным искажением и произвольного $p \geqslant 1$ корректно определена и почти всюду конечна так называемая *внутренняя дилатация* $K_{I,p}(x,f)$ *отображения* f *порядка* p *в точке* x, определяемая равенствами

$$K_{I,p}(x,f) \quad = \quad \left\{\begin{array}{rr} \frac{|J(x,f)|}{l(f'(x))^p}, & J(x,f)\neq 0,\\ 1, & f'(x)=0,\\ \infty, & \text{в остальных случаях}\,. \end{array}\right. \tag{1.1}$$

Пусть $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — неубывающая функция, $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$. Будем говорить, что $f : D \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, пишем $f \in W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, если $\int\limits_G \varphi\left(|\nabla f(x)|\right)\, dm(x) < \infty$ для любой компактной подобласти $G \subset D$, где $|\nabla f(x)| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2}$. Класс $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ называется классом *Орлича–Соболева.* Рассмотрим следующую задачу:

пусть $x_0 \in D$ *и* $f : D\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}^n$ *— отображение класса* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(D\setminus\{x_0\})$ *с конечным искажением, тогда при каких условиях отображение* f *может быть продолжено по непрерывности в точку* x_0?

Ответ на этот вопрос в случае, когда отображение f является гомеоморфизмом был найден нами несколько ранее (см. [9, теорема 5] и [2, теорема 9.3]). Стремясь усилить этот результат, в настоящей статье мы рассматриваем более широкий класс замкнуто-открытых дискретных отображений. Ниже будет показано, что для указанного класса заключение о непрерывном продолжении в изолированную точку границы также верно, по крайней мере, в случае выполнения следующего дополнительного условия: $C(f,x_0)\cap C(f,\partial D)=\varnothing$. Разумеется, произвольные гомеоморфизмы удовлетворяют требованиям замкнутости, дискретности, открытости, а также указанному ограничению на предельные множества. С другой стороны, легко указать примеры негомеоморфных замкнуто-открытых дискретных отображений, для которых также $C(f,x_0)\cap C(f,\partial D)=\varnothing$. Таковым, например, является отображение с ограниченным искажением, называемое «закручиванием вокруг оси» и задаваемое в цилиндрических координатах в виде $f_m(x) = (r\cos m\varphi, r\sin m\varphi, x_3,\ldots,x_n)$, $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{B}^n$, $r=|z|$, $\varphi=\arg z$, $z=x_1+ix_2$, $m\in\mathbb{N}$. (Здесь $x_0=0$). Не лишним будет отметить, что в произвольной меньшей области указанное отображение f_m при некотором m уже не замкнуто. Скажем, это относится к области $G := B(e_1/2, 1/2)\subset\mathbb{B}^n$, $e_1=(1,0,\ldots,0)$, где условие

$C(f,z_0)\cap C(f,\partial G)=\varnothing$ также может нарушаться для некоторой точки $z_m\in G$ и больших m. Другой простой пример негомеоморфного замкнуто-открытого дискретного отображения, для которого ограничение $C(f,x_0)\cap C(f,\partial D)=\varnothing$ выполняется, может быть дан в виде $f(z)=z^n$, $z\in\mathbb{B}^2\subset\mathbb{C}$, где $x_0:=0$.

Сформулируем главный результат настоящей заметки.

Теорема 1.1. *Пусть $n\geqslant 3$, D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n-1<\alpha\leqslant n$, $x_0\in D$, тогда каждое открытое, дискретное и замкнутое ограниченное отображение $f:D\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}^n$ класса $W_{\rm loc}^{1,\varphi}(D\setminus\{x_0\})$ с конечным искажением такое, что $C(f,x_0)\cap C(f,\partial D)=\varnothing$, продолжается в точку x_0 непрерывным образом до отображения $f:D\to\mathbb{R}^n$, если*

$$\int\limits_1^{\infty}\left(\frac{t}{\varphi(t)}\right)^{\frac{1}{n-2}}dt<\infty \tag{1.2}$$

и, кроме того, найдётся функция $Q\in L_{\rm loc}^1(D)$, такая что

$$K_{I,\alpha}(x,f)\leqslant Q(x)$$

при почти всех $x\in D$ и при некотором $\varepsilon_0>0$, $\varepsilon_0<{\rm dist}(x_0,\partial D)$, для достаточно малых $\varepsilon>0$ выполнено условие $\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{\alpha-1}}q_{x_0}^{\frac{1}{\alpha-1}}(t)}<\infty$, кроме того, выполнено следующее условие расходимости интеграла:

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{\alpha-1}}q_{x_0}^{\frac{1}{\alpha-1}}(t)}=\infty\,. \tag{1.3}$$

Здесь $q_{x_0}(r):=\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{|x-x_0|=r}Q(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}$ обозначает среднее интегральное значение функции Q над сферой $S(x_0,r)$. В частности, заключение теоремы 1.1 является верным, если

$$q_{x_0}(r)=O\left(\left(\log\frac{1}{r}\right)^{n-1}\right)$$

при $r\to 0$.

Замечание 1.1. Условие (1.2) принадлежит Кальдерону и использовалось для решения задач несколько иного плана (см. [10]).

При $p = n = 2$ заключение теоремы 1.1 можно несколько усилить. Для этой цели введём следующие обозначения. Для комплекснозначной функции $f : D \to \mathbb{C}$, заданной в области $D \subset \mathbb{C}$, имеющей частные производные по x и y при почти всех $z = x + iy$, полагаем $\overline{\partial} f = f_{\overline{z}} = (f_x + if_y)/2$ и $\partial f = f_z = (f_x - if_y)/2$. Полагаем $\mu(z) = \mu_f(z) = f_{\overline{z}}/f_z$, при $f_z \neq 0$ и $\mu(z) = 0$ в противном случае. Указанная комплекснозначная функция μ называется *комплексной дилатацией* отображения f в точке z. *Максимальной дилатацией* отображения f в точке z называется следующая функция: $K_{\mu_f}(z) = K_\mu(z) = \frac{1+|\mu(z)|}{|1-|\mu(z)||}$. Заметим, что $J(f,z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2$, где $J(f,z) := \det f'(z)$, что может быть проверено прямым подсчётом (см., напр., [11, пункт C, гл. I]). Кроме того, заметим, что $K_I(z,f) = K_\mu(z)$.

Теорема 1.2. *Пусть $z_0 \in D \subset \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, тогда каждое открытое дискретное отображение $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C} \setminus \{a \cup b\}$ класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ с конечным искажением продолжается в точку z_0 непрерывным образом до отображения $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$, если найдётся функция $Q \in L^1_{\rm loc}(D)$, такая что $K_\mu(z) \leqslant Q(z)$ при почти всех $z \in D$ и при некотором $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < \mathrm{dist}(z_0, \partial D)$, выполнено следующее условие расходимости интеграла (1.3), где $q_{z_0}(r) := \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|z-z_0|=r} Q(z)\, d\mathcal{H}^1$ — среднее интегральное значение функции Q над окружностью $S(z_0, r)$. В частности, заключение теоремы 1.2 является верным, если*

$$q_{z_0}(r) = O\left(\log \frac{1}{r}\right)$$

при $r \to 0$.

2. Вспомогательные сведения, основные леммы и доказательство теоремы 1.1

Доказательство основного результата статьи опирается на некоторый аппарат, суть которого излагается ниже (см., напр., [2]). Напомним некоторые определения, связанные с понятием поверхности, интеграла по поверхности, а также модулей семейств кривых и поверхностей.

Пусть ω — открытое множество в $\overline{\mathbb{R}^k} := \mathbb{R}^k \cup \{\infty\}$, $k = 1, \ldots, n-1$. Непрерывное отображение $S : \omega \to \mathbb{R}^n$ будем называть *k-мерной поверхностью* S в $\mathbb{R}^n$. Число прообразов $N(y, S) = \mathrm{card}\, S^{-1}(y) = \mathrm{card}\, \{x \in \omega : S(x) = y\}$, $y \in \mathbb{R}^n$ будем называть *функцией кратности* поверхности S. Другими словами, $N(y, S)$ — кратность накрытия точки y поверхностью S. Пусть $\rho : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^+}$ – борелевская функция, в таком случае интеграл от функции ρ по поверхности S определяется равенством: $\int\limits_S \rho\, d\mathcal{A} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(y)\, N(y,S)\, d\mathcal{H}^k y$. Пусть Γ — семейство k-мерных поверхностей S. Борелевскую функцию $\rho : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^+}$ будем называть *допустимой* для семейства Γ, сокр. $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_S \rho^k\, d\mathcal{A} \geqslant 1 \tag{2.1}$$

для каждой поверхности $S \in \Gamma$. Пусть $p \geqslant 1$, тогда *p-модулем* семейства Γ назовём величину

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\, dm(x)\,.$$

Заметим, что p-модуль семейств поверхностей, определённый таким образом, представляет собой внешнюю меру в пространстве всех k-мерных поверхностей (см. [12]). Говорят, что некоторое свойство P выполнено для *p-почти всех поверхностей* области D, если оно имеет место для всех поверхностей, лежащих в D, кроме, быть может, некоторого их подсемейства, p-модуль которого равен нулю. При $p = n$ приставка «p-» в словах «p-почти всех...», как правило, опускается. В частности, говорят, что некоторое свойство выполнено для *p-почти всех кривых* области D, если оно имеет место для всех кривых, лежащих в D, кроме, быть может, некоторого их подсемейства, p-модуль которого равен нулю.

Будем говорить, что измеримая по Лебегу функция $\rho : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *p-обобщённо допустима* для семейства Γ k-мерных поверхностей S в $\mathbb{R}^n$, сокр. $\rho \in \operatorname{ext}_p \operatorname{adm}\Gamma$, если соотношение (2.1) выполнено для p-почти всех поверхностей S семейства Γ. *Обобщённый p-модуль* $\overline{M}_p(\Gamma)$ семейства Γ определяется равенством

$$\overline{M_p}(\Gamma) = \inf \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\, dm(x)\,,$$

где точная нижняя грань берётся по всем функциям $\rho \in \operatorname{ext}_p \operatorname{adm}\Gamma$. Очевидно, что при каждом $p \in (0, \infty)$, $k = 1, \ldots, n-1$, и каждого семейства k-мерных поверхностей Γ в $\mathbb{R}^n$, выполнено равенство $\overline{M_p}(\Gamma) = M_p(\Gamma)$.

Следующий класс отображений представляет собой обобщение квазиконформных отображений в смысле кольцевого определения по Герингу ([13]) и отдельно исследуется (см., напр., [2, глава 9]). Пусть $p \geqslant 1$, D и D' — заданные области в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$ и

$Q : D \to (0, \infty)$ — измеримая по Лебегу функция. Будем говорить, что $f : D \to D'$ — *нижнее Q-отображение в точке x_0 относительно p-модуля,* как только

$$M_p(f(\Sigma_\varepsilon)) \geqslant \inf_{\rho \in \mathrm{ext}_p \, \mathrm{adm}\, \Sigma_\varepsilon} \int\limits_{D \cap A(\varepsilon, r_0, x_0)} \frac{\rho^p(x)}{Q(x)}\, dm(x) \qquad (2.2)$$

для каждого кольца $A(\varepsilon, r_0, x_0)$, $r_0 \in (0, d_0)$, $d_0 = \sup\limits_{x \in D} |x - x_0|$, где Σ_ε обозначает семейство всех пересечений сфер $S(x_0, r)$ с областью D, $r \in (\varepsilon, r_0)$. Примеры таких отображений несложно указать (см. теорему 2.3 ниже).

Отметим, что выражения «почти всех кривых» и «почти всех поверхностей» в отдельных случаях могут иметь две различные интерпретации (в частности, если речь идёт о семействе сфер, то «почти всех» может пониматься как относительно множества значений r, так и p-модуля семейства сфер, рассматриваемого как частный случай семейства поверхностей). Следующее утверждение вносит некоторую ясность между указанными интерпретациями и может быть установлено полностью по аналогии с [2, лемма 9.1].

Лемма 2.1. *Пусть $p \geqslant 1$, $x_0 \in D$. Если некоторое свойство P имеет место для p-почти всех сфер $D(x_0, r) := S(x_0, r) \cap D$, где «почти всех» понимается в смысле модуля семейств поверхностей и, кроме того, множество $E = \{r \in \mathbb{R} : P \ \text{ имеет место для } \ S(x_0, r) \cap D\}$ измеримо по Лебегу, то P также имеет место для почти всех сфер $D(x_0, r)$ относительно линейной меры Лебега по параметру $r \in \mathbb{R}$. Обратно, пусть P имеет место для почти всех сфер $D(x_0, r) := S(x_0, r) \cap D$ относительно линейной меры Лебега по $r \in \mathbb{R}$, тогда P также имеет место для p-почти всех поверхностей $D(x_0, r) := S(x_0, r) \cap D$ в смысле модуля семейств поверхностей.*

Следующее утверждение облегчает проверку бесконечной серии неравенств в (2.2) и может быть установлено аналогично доказательству [2, теорема 9.2] (см. также [6, теорема 6.1]).

Лемма 2.2. *Пусть $D, D' \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$ и $Q : D \to (0, \infty)$ — измеримая по Лебегу функция. Отображение $f : D \to D'$ является нижним Q-отображением относительно p-модуля в точке x_0, $p > n - 1$, тогда и только тогда, когда $M_p(f(\Sigma_\varepsilon)) \geqslant \int\limits_\varepsilon^{r_0} \frac{dr}{||Q||_s(r)} \quad \forall\ \varepsilon \in (0, r_0)$, $r_0 \in (0, d_0)$, $d_0 = \sup\limits_{x \in D} |x - x_0|$, $s = \frac{n-1}{p-n+1}$, где, как и выше, Σ_ε обозначает семейство всех пересечений сфер $S(x_0, r)$ с областью D,*

$r \in (\varepsilon, r_0)$, $\|Q\|_s(r) = \left(\int\limits_{D(x_0,r)} Q^s(x)\,d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{s}}$ — *L_s-норма функции Q над сферой* $D(x_0, r) = \{x \in D : |x - x_0| = r\} = D \cap S(x_0, r)$.

Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $I = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, i = 1, \ldots, n\}$ — открытый n-мерный интервал. Отображение $f : I \to \mathbb{R}^n$ *принадлежит классу ACL* (*абсолютно непрерывно на линиях*), если f абсолютно непрерывно на почти всех линейных сегментах в I, параллельных координатным осям. Отображение $f : G \to \mathbb{R}^n$ *принадлежит классу ACL* в G, когда сужение $f|_I$ принадлежит классу ACL для каждого интервала I, $\overline{I} \subset G$.

Напомним, что *конденсатором* называют пару $E = (A, C)$, где A — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а C — компактное подмножество A. *Ёмкостью* конденсатора E порядка $p \geqslant 1$ называется следующая величина: $\operatorname{cap}_p E = \operatorname{cap}_p (A, C) = \inf\limits_{u \in W_0(E)} \int\limits_A |\nabla u(x)|^p\, dm(x)$, где $W_0(E) = W_0(A, C)$ — семейство неотрицательных непрерывных функций $u : A \to \mathbb{R}$ с компактным носителем в A, таких что $u(x) \geqslant 1$ при $x \in C$ и $u \in ACL$. Здесь, как обычно, $|\nabla u| = \left(\sum\limits_{i=1}^n (\partial_i u)^2\right)^{1/2}$. Следующее утверждение имеет важное значение для доказательства многих результатов настоящей работы (см. [14, предложение 10.2, гл. II]).

Предложение 2.1. *Пусть $E = (A, C)$ — произвольный конденсатор в $\mathbb{R}^n$ и пусть Γ_E — семейство всех кривых вида $\gamma : [a, b) \to A$ таких, что $\gamma(a) \in C$ и $|\gamma| \cap (A \setminus F) \neq \varnothing$ для произвольного компакта $F \subset A$. Тогда* $\operatorname{cap}_p E = M_p(\Gamma_E)$.

Следующие важные сведения, касающиеся ёмкости пары множеств относительно области, могут быть найдены в работе В. Цимера [15]. Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и C_0, C_1 — непересекающиеся компактные множества, лежащие в замыкании G. Полагаем $R = G \setminus (C_0 \cup C_1)$ и $R^* = R \cup C_0 \cup C_1$, тогда *$p$-ёмкостью пары C_0, C_1 относительно замыкания G* называется величина $C_p[G, C_0, C_1] = \inf \int\limits_R |\nabla u|^p\, dm(x)$, где точная нижняя грань берётся по всем функциям u, непрерывным в R^*, $u \in ACL(R)$, таким что $u = 1$ на C_1 и $u = 0$ на C_0. Указанные функции будем называть *допустимыми* для величины $C_p[G, C_0, C_1]$. Мы будем говорить, что *множество $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ разделяет C_0 и C_1 в R^**, если $\sigma \cap R$ замкнуто в R и найдутся непересекающиеся множества A и B, являющиеся открытыми в $R^* \setminus \sigma$, такие что $R^* \setminus \sigma = A \cup B$, $C_0 \subset A$ и $C_1 \subset B$. Пусть Σ обозначает класс всех множеств, разделяющих C_0 и C_1 в R^*. Для числа $p' = p/(p-1)$

определим величину

$$\widetilde{M_{p'}}(\Sigma)=\inf_{\rho\in\widetilde{\mathrm{adm}}\Sigma}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\rho^{p'}dm(x)\,,$$

где запись $\rho\in\widetilde{\mathrm{adm}}\,\Sigma$ означает, что ρ — неотрицательная борелевская функция в $\mathbb{R}^n$ такая, что

$$\int\limits_{\sigma\cap R}\rho d\mathcal{H}^{n-1}\geqslant 1\quad\forall\,\sigma\in\Sigma\,.$$

Заметим, что согласно результата Цимера

$$\widetilde{M_{p'}}(\Sigma)=C_p[G,C_0,C_1]^{\,-1/(p-1)}\,, \tag{2.3}$$

см. [15, теорема 3.13] при $p=n$ и [16, с. 50] при $1<p<\infty$. Заметим также, что согласно результата Шлыка

$$M_p(\Gamma(E,F,D))=C_p[D,E,F]\,, \tag{2.4}$$

см. [17, теорема 1].

Напомним, что отображение $f:X\to Y$ между пространствами с мерами (X,Σ,μ) и (Y,Σ',μ') обладает *N-свойством* (Лузина), если из условия $\mu(S)=0$ следует, что $\mu'(f(S))=0$. Следующее вспомогательное утверждение получено в работе [9] (см. теорема 1 и следствие 2).

Предложение 2.2. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию* (1.2). *Тогда:*

1) Если $f:D\to\mathbb{R}^n$ — непрерывное открытое отображение класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(D)$, то f имеет почти всюду полный дифференциал в D;

2) Любое непрерывное отображение $f\in W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ обладает N-свойством относительно $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа, более того, локально абсолютно непрерывно на почти всех сферах $S(x_0,r)$ с центром в заданной предписанной точке $x_0\in\mathbb{R}^n$. Кроме того, на почти всех таких сферах $S(x_0,r)$ выполнено условие $\mathcal{H}^{n-1}(f(E))=0$, как только $|\nabla f|=0$ на множестве $E\subset S(x_0,r)$. (Здесь «почти всех» понимается относительно линейной меры Лебега по параметру r).

Для отображения $f:D\to\mathbb{R}^n$, множества $E\subset D$ и $y\in\mathbb{R}^n$, определим *функцию кратности* $N(y,f,E)$ как число прообразов точки y во множестве E, т.е.

$$N(y,f,E)\;=\;\mathrm{card}\,\{x\in E: f(x)=y\}\;,$$

$$N(f,E) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} N(y,f,E)\,. \tag{2.5}$$

Обозначим через $J_{n-1}f(a)$ величину, означающую $(n-1)$-мерный якобиан отображения f в точке a (см. [18, раздел 3.2.1]). Предположим, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ дифференцируемо в точке $x_0 \in D$ и матрица Якоби $f'(x_0)$ невырождена, $J(x_0,f) = \det f'(x_0) \neq 0$. Тогда найдутся системы векторов $e_1,\ldots,e_n$ и $\widetilde{e_1},\ldots,\widetilde{e_n}$ и положительные числа $\lambda_1(x_0),\ldots,\lambda_n(x_0)$, $\lambda_1(x_0) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(x_0)$, такие что $f'(x_0)e_i = \lambda_i(x_0)\widetilde{e_i}$ (см. [19, теорема 2.1 гл. I]), при этом,

$$|J(x_0,f)| = \lambda_1(x_0)\ldots\lambda_n(x_0), \quad \|f'(x_0)\| = \lambda_n(x_0)\,,$$

$$l(f'(x)) = \lambda_1(x_0)\,, \tag{2.6}$$

$$K_{I,p}(x_0,f) = \frac{\lambda_1(x_0)\cdots\lambda_n(x_0)}{\lambda_1^p(x_0)}\,, \tag{2.7}$$

см. [19, соотношение (2.5), разд. 2.1, гл. I]. Числа $\lambda_1(x_0),\ldots\lambda_n(x_0)$ называются *главными значениями*, а вектора $e_1,\ldots,e_n$ и $\widetilde{e_1},\ldots,\widetilde{e_n}$ — *главными векторами* отображения $f'(x_0)$. Из геометрического смысла $(n-1)$-мерного якобиана, а также первого соотношения в (2.6) вытекает, что

$$\lambda_1(x_0)\cdots\lambda_{n-1}(x_0) \leqslant J_{n-1}f(x_0) \leqslant \lambda_2(x_0)\cdots\lambda_n(x_0)\,, \tag{2.8}$$

в частности, из (2.8) следует, что $J_{n-1}f(x_0)$ положителен во всех тех точках x_0, где положителен якобиан $J(x_0,f)$.

Следующие две леммы несут в себе основную смысловую нагрузку данной заметки. Первое из них впервые установлено для случая гомеоморфизмов в работе [20] (см. теорему 2.1).

Лемма 2.3. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию* (1.2). *Если $n\geqslant 3$ и $p > n-1$, то каждое открытое дискретное отображение $f : D\to\mathbb{R}^n$ с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ такое, что $N(f,D) < \infty$, является нижним Q-отображением относительно p-модуля в каждой точке $x_0\in\overline{D}$ при*

$$Q(x) = N(f,D)\cdot K_{I,\alpha}^{\frac{p-n+1}{n-1}}(x,f),$$

$\alpha := \frac{p}{p-n+1}$, *где внутренняя дилатация $K_{I,\alpha}(x,f)$ отображения f в точке x порядка α определена соотношением* (1.1), *а кратность $N(f,D)$ определена вторым соотношением в* (2.5).

Доказательство. Заметим, что f дифференцируемо почти всюду ввиду предложения 2.2. Пусть B — борелево множество всех точек $x \in D$, в которых f имеет полный дифференциал $f'(x)$ и $J(x,f) \neq 0$. Применяя теорему Кирсбрауна и свойство единственности аппроксимативного дифференциала (см. [18, пункты 2.10.43 и 3.1.2]), мы видим, что множество B представляет собой не более чем счётное объединение борелевских множеств B_l, $l = 1, 2, \dots$, таких, что сужения $f_l = f|_{B_l}$ являются билипшицевыми гомеоморфизмами (см., напр., [18, пункты 3.2.2, 3.1.4 и 3.1.8]). Без ограничения общности, мы можем полагать, что множества B_l попарно не пересекаются. Обозначим также символом B_* множество всех точек $x \in D$, в которых f имеет полный дифференциал, однако, $f'(x) = 0$.

Ввиду построения, множество $B_0 := D \setminus (B \bigcup B_*)$ имеет лебегову меру нуль. Следовательно, по [2, теорема 9.1], $\mathcal{H}^{n-1}(B_0 \cap S_r) = 0$ для p-почти всех сфер $S_r := S(x_0, r)$ с центром в точке $x_0 \in \overline{D}$, где «p-почти всех» следует понимать в смысле p-модуля семейств поверхностей. По лемме 2.1 также $\mathcal{H}^{n-1}(B_0 \cap S_r) = 0$ при почти всех $r \in \mathbb{R}$.

По предложению 2.2 и из условия $\mathcal{H}^{n-1}(B_0 \cap S_r) = 0$ для почти всех $r \in \mathbb{R}$ вытекает, что $\mathcal{H}^{n-1}(f(B_0 \cap S_r)) = 0$ для почти всех $r \in \mathbb{R}$. По этому предложению также $\mathcal{H}^{n-1}(f(B_* \cap S_r)) = 0$, поскольку f — отображение с конечным искажением и, значит, $\nabla f = 0$ почти всюду, где $J(x,f) = 0$.

Пусть Γ — семейство всех пересечений сфер S_r, $r \in (\varepsilon, r_0)$, $r_0 < d_0 = \sup\limits_{x \in D} |x - x_0|$, с областью D (здесь ε — произвольное фиксированное число из интервала $(0, r_0)$). Для заданной функции $\rho_* \in \operatorname{adm} f(\Gamma)$, $\rho_* \equiv 0$ вне $f(D)$, полагаем $\rho \equiv 0$ вне B,

$$\rho(x) \ : \ = \ \rho_*(f(x)) \left(\frac{|J(x,f)|}{l(f'(x))}\right)^{\frac{1}{n-1}} \qquad \text{при } x \in B\,.$$

Учитывая соотношения (2.6) и (2.8),

$$\frac{|J(x,f)|}{l(f'(x))} \geqslant J_{n-1}f(x)\,. \tag{2.9}$$

Пусть $D_r^* \in f(\Gamma)$, $D_r^* = f(D \cap S_r)$. Заметим, что $D_r^* = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} f(S_r \cap B_i) \bigcup f(S_r \cap B_*)$ и, следовательно, для почти всех $r \in (\varepsilon, r_0)$

$$1 \leqslant \int\limits_{D_r^*} \rho_*^{n-1}(y)\, d\mathcal{A}_* \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \int\limits_{f(S_r \cap B_i)} \rho_*^{n-1}(y) N(y, f, S_r \cap B_i)\, d\mathcal{H}^{n-1}y \tag{2.10}$$

$$+ \int\limits_{f(S_r\cap B_*)} \rho_*^{n-1}(y)N(y,f,S_r\cap B_*)d\mathcal{H}^{n-1}y\,.$$

Учитывая доказанное выше, из (2.10) мы получаем, что

$$1 \leqslant \int\limits_{D_r^*} \rho_*^{n-1}(y)d\mathcal{A}_*$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{f(S_r\cap B_i)} \rho_*^{n-1}(y)N(y,f,S_r\cap B_i)d\mathcal{H}^{n-1}y \qquad (2.11)$$

для почти всех $r\in(\varepsilon,r_0)$. Рассуждая покусочно на B_i, $i=1,2,\ldots$, ввиду [18, 1.7.6 и теорема 3.2.5] и (2.9) мы получаем, что

$$\int\limits_{B_i\cap S_r} \rho^{n-1}\,d\mathcal{A} = \int\limits_{B_i\cap S_r} \rho_*^{n-1}(f(x))\frac{|J(x,f)|}{l(f'(x))}\,d\mathcal{A}$$

$$= \int\limits_{B_i\cap S_r} \rho_*^{n-1}(f(x))\cdot\frac{|J(x,f)|}{l(f'(x))J_{n-1}f(x)}\cdot J_{n-1}f(x)\,d\mathcal{A}$$

$$\geqslant \int\limits_{B_i\cap S_r} \rho_*^{n-1}(f(x))\cdot J_{n-1}f(x)\,d\mathcal{A}$$

$$= \int\limits_{f(B_i\cap S_r)} \rho_*^{n-1}\,N(y,f,S_r\cap B_i)d\mathcal{H}^{n-1}y \qquad (2.12)$$

для почти всех $r\in(\varepsilon,r_0)$. Из (2.11) и (2.12) вытекает, что $\rho\in\operatorname{ext}\operatorname{adm}\Gamma$.

Замена переменных на каждом B_l, $l=1,2,\ldots$, (см., напр., [18, теорема 3.2.5]) и свойство счётной аддитивности интеграла приводят к оценке

$$\int\limits_{D} \frac{\rho^p(x)}{K_{I,\alpha}^{\frac{p-n+1}{n-1}}(x,f)}\,dm(x) \leqslant \int\limits_{f(D)} N(f,D)\cdot\rho_*^p(y)\,dm(y)\,,$$

$\alpha:=\frac{p}{p-n+1}$, что и завершает доказательство. $\Box$

Замечание 2.1. Заключение леммы 2.3 при $n=2$ остаётся справедливым для классов Соболева $W_{\rm loc}^{1,1}$ при аналогичных условиях, за исключением дополнительного условия Кальдерона (1.2). Чтобы в этом убедиться, необходимо повторить доказательство этой леммы при $n=2$, где необходимо учесть наличие N-свойства указанных отображений на почти всех окружностях, что обеспечивается свойством ACL для произвольных классов Соболева (см. [21, теорема 1, п. 1.1.3, § 1.1, гл. I]).

Имеет место следующее утверждение (см. [22, лемма 3.11] и [14, лемма 2.6, гл. III] при $p=n$ и [23, лемма 1] при $p\ne n$).

Предложение 2.3. *Пусть $n-1<p\leqslant n$, D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, тогда для каждого $a>0$ существует положительное число $\delta>0$ такое, что $\mathrm{cap}_p\,(D, C)\geqslant\delta$, где C — произвольный континуум в D такой что $d(C)\geqslant a$.*

Аналог следующей леммы в случае гомеоморфизмов доказан в монографии [2, теорема 9.3] (см. также работу [24, теорема 4.1]).

Лемма 2.4. *Пусть $n\geqslant 2$, D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $p\in\left[n, n+\frac{1}{n-2}\right)$, $x_0\in D$ и $Q:D\to(0,\infty)$ — измеримая по Лебегу функция такая, что при некотором $\varepsilon_0>0$, $\varepsilon_0<\mathrm{dist}(x_0,\partial D)$ и достаточно малых $\varepsilon>0$ выполнено условие $\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{\alpha-1}}\widetilde{q}_{x_0}^{\frac{1}{\alpha-1}}(t)}<\infty$, кроме того, выполнено условие*

$$\int\limits_{0}^{\varepsilon_0}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{\alpha-1}}\widetilde{q}_{x_0}^{\frac{1}{\alpha-1}}(t)}=\infty\,, \tag{2.13}$$

где $\alpha=\frac{p}{p-n+1}$, $\widetilde{q}_{x_0}(r):=\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{|x-x_0|=r}Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}$ обозначает среднее интегральное значение функции $Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)$ над сферой $S(x_0,r)$. Тогда каждое ограниченное открытое, дискретное и замкнутое в области $D\setminus\{x_0\}$ нижнее Q-отображение $f:D\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}^n$ относительно p-модуля продолжается в точку x_0 непрерывным образом до отображения $f:D\to\mathbb{R}^n$, если $C(f,x_0)\cap C(f,\partial D)=\varnothing$.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, мы можем считать, что $x_0=0$ и $\overline{f(D\setminus\{0\})}\subset\mathbb{B}^n$. Предположим противное, а именно, что отображение f не может быть продолжено по непрерывности в точку $x_0=0$. Тогда найдутся две последовательности x_j и x_j', принадлежащие $D\setminus\{0\}$, $x_j\to 0$, $x_j'\to 0$, такие, что $|f(x_j)-f(x_j')|\geqslant a>0$ для всех $j\in\mathbb{N}$. Можно считать, что x_j и x_j' лежат внутри шара $B(0,r_0)$, $r_0:=\mathrm{dist}\,(0,\partial D)$. Полагаем $r_j=\max\left\{|x_j|, |x_j'|\right\}, l_j=\min\left\{|x_j|, |x_j'|\right\}$. Соединим точки x_j и x_j' замкнутой кривой, лежащей в $\overline{B(0,r_j)}\setminus\{0\}$. Обозначим эту кривую символом C_j и рассмотрим конденсатор $E_j = (D \setminus \{0\}\ , C_j)$ (не ограничивая общности, можно считать, что все точки $x \in C_j$ удовлетворяют неравенству $|x| \geqslant l_j$). В силу открытости и непрерывности отображения f, пара $f(E_j)$ также является конденсатором. Поскольку f — открытое, дискретное и замкнутое отображение, $\partial f(D \setminus \{0\}) = C(f, \partial D) \cup C(f, 0)$.

Рассмотрим при $r_j < r < r_0$ проколотый шар $G_1 := B(0, r) \setminus \{0\}$. Заметим, что C_j — компактное подмножество G_1, тогда $f(C_j)$ — компактное подмножество $f(G_1)$.

Ввиду открытости f имеет место включение $\partial f(G_1) \subset C(f, 0) \cup f(S(0, r))$. Действительно, если $y_0 \in \partial f(G_1)$, то для некоторой последовательности $y_k \in f(G_1)$ имеем: $y_k \to y_0$. Тогда $y_k = f(x_k)$, $x_k \in G_1$. Поскольку G_1 ограничено, то можно считать, что $x_k \to x_0 \in \overline{G_1}$. Осталось заметить, что случай, когда x_0 — внутренняя точка G_1 невозможен, поскольку в этом случае $f(x_k) \to f(x_0)$, где $f(x_0)$ — внутренняя точка $f(G_1)$, что противоречит выбору y_k. Тогда $x_0 \in \partial G_1 = \{0\} \cup S(0, r)$, что и доказывает включение $\partial f(G_1) \subset C(f, 0) \cup f(S(0, r))$. Тогда ввиду замкнутости и открытости отображения f множество $\partial f(G_1) \setminus C(f, 0)$ является замкнутым в $\mathbb{R}^n$.

Отсюда вытекает, что множество $\sigma := \partial f(G_1) \setminus C(f, 0)$ отделяет $f(C_j)$ от $C(f, \partial D)$ в $f(D \setminus \{0\}) \cup C(f, \partial D)$. Действительно,

$$f(D \setminus \{0\}) \cup C(f, \partial D) = f(G_1) \cup \sigma \cup \Big((f(D \setminus \{0\}) \cup C(f, \partial D)) \setminus \overline{f(G_1)} \Big)\ ,$$

каждое из множеств $A := f(G_1)$ и $B := (f(D \setminus \{0\}) \cup C(f, \partial D)) \setminus \overline{f(G_1)}$ открыто в топологии пространства $f(D \setminus \{0\}) \cup C(f, \partial D)$, $A \cap B = \varnothing$, $C_0 := f(C_j) \subset A$ и $C_1 := C(f, \partial D) \subset B$.

Полагаем $\alpha := \frac{p}{p-n+1}$. Поскольку $\sigma \subset f(S(0, r))$, ввиду (2.3) и (2.4)

$$M_\alpha(\Gamma(f(C_j), C(f, \partial D), f(D \setminus \{0\}))) \leqslant \frac{1}{M_p^{\frac{n-1}{p-n+1}}(f(\Sigma_r))}\,, \tag{2.14}$$

где Σ_r — семейство сфер $S(0, r)$, $r \in (r_j, r_0)$. С другой стороны, из леммы 2.2 и условия расходимости интеграла (2.13) вытекает, что $M_p^{\frac{n-1}{p-n+1}}(f(\Sigma_r)) \to \infty$ при $j \to \infty$. В таком случае, из (2.14) следует, что при $j \to \infty$

$$M_\alpha(\Gamma(C(f, D), f(C_j), f(D \setminus \{0\}))) \to 0\,. \tag{2.15}$$

Аналогичную процедуру проделаем относительно предельного множества $C(f, 0)$. Именно, заметим, что C_j — компакт в $G_2 := D \setminus \overline{B(0, \varepsilon)}$

для произвольного $\varepsilon\in(0,l_j)$. Тогда ввиду непрерывности f множество $f(C_j)$ является компактным подмножеством $f(G_2)$ и, в частности, $\partial f(G_2)\cap f(C_j)=\varnothing$. Далее, заметим, что

$$\partial f(G_2)\subset C(f,\partial D)\cup f(S(0,\varepsilon))\,. \tag{2.16}$$

Полагаем $\theta:=\partial f(G_2)\setminus C(f,\partial D)$ и заметим, что θ является замкнутым, поскольку имеет место соотношение (2.16) и, кроме того, $C(f,\partial D)\cap f(S(0,\varepsilon))=\varnothing$ ввиду замкнутости отображения f в $D\setminus\{0\}$. Кроме того, заметим, что θ отделяет $C_3:=f(C_j)$ и $C_4:=C(f,0)$ в $f(D\setminus\{0\})\cup C(f,0)$. Действительно,

$$f(D\setminus\{0\})\cup C(f,0)=f(G_2)\cup\theta\cup\Big((f(D\setminus\{0\})\cup C(f,0))\setminus\overline{f(G_2)}\Big)\ ,$$

$A=f(G_2)$ и $B=\Big((f(D\setminus\{0\})\cup C(f,0))\setminus\overline{f(G_2)}\Big)$ открыты в топологии пространства $f(D\setminus\{0\})\cup C(f,0)$, $A\cap B=\varnothing$, $C_3:=f(C_j)\subset A$ и $C_4:=C(f,0)\subset B$.

Как и прежде, полагаем $\alpha:=\frac{p}{p-n+1}$. Так как $\theta\subset f(S(0,\varepsilon))$, ввиду (2.3) и (2.4) получаем:

$$M_{\alpha}(\Gamma(f(C_j),C(f,0),f(D\setminus\{0\})))\leqslant\frac{1}{M_p^{\frac{n-1}{p-n+1}}(f(\Theta_{\varepsilon}))}\,, \tag{2.17}$$

где Θ_{ε} — семейство сфер $S(0,\varepsilon)$, $\varepsilon\in(0,l_j)$. С другой стороны, из леммы 2.2 и условия расходимости интеграла (2.13) вытекает, что $M_p^{\frac{n-1}{p-n+1}}(f(\Theta_{\varepsilon}))=\infty$. В таком случае, из (2.17) следует, что

$$M_{\alpha}(\Gamma(C(f,0),f(C_j),f(D\setminus\{0\})))=0\,. \tag{2.18}$$

Заметим, что ввиду предложения 2.1 и полуаддитивности модуля смейств кривых (см. [25, разд. 6, гл. I]), при $j\to\infty$ из (2.15) и (2.18) вытекает, что

$$\begin{gathered}\operatorname{cap}_{\alpha}f(E_j)\leqslant\\ \leqslant M_{\alpha}(\Gamma(C(f,0),f(C_j),f(D\setminus\{0\})))+\\ +M_{\alpha}(\Gamma(C(f,\partial D),f(C_j),f(D\setminus\{0\})))\to 0\,.\end{gathered} \tag{2.19}$$

С другой стороны, заметим, что при сделанных ограничениях на p, величина α также удовлетворяет условию $n\geqslant\alpha>n-1$. В таком случае, по предложению 2.3 $\operatorname{cap}_{\alpha}f(E_j)\geqslant\delta>0$ при всех натуральных j, что противоречит (2.19). Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 1.1. По лемме 2.3 отображение f в каждой точке $x_0 \in D$ является нижним Q-отображением относительно p-модуля в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$ при $Q(x) = N(f, D) \cdot K_{I,\alpha}^{\frac{p-n+1}{n-1}}(x, f)$, $\alpha := \frac{p}{p-n+1}$ (т.е., $p = \frac{\alpha(n-1)}{\alpha-1}$), где внутренняя дилатация $K_{I,\alpha}(x, f)$ отображения f в точке x порядка α определена соотношением (1.1), а кратность $N(f, D)$ определена вторым соотношением в (2.5). Заметим, что, поскольку $\alpha \in (n-1, n]$, то также $p \in \Big[n, n + \frac{1}{n-2}\Big)$. Тогда необходимое заключение вытекает из леммы 2.4, а также того факта, что максимальная кратность $N(f, D)$ замкнутого открытого дискретного отображения f конечна (см., напр., [26, лемма 3.3]). $\Box$

Теперь отдельно исследуем случай $n = 2$. Для этой цели напомним, что отображение $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ называется *кольцевым Q-отображением в точке $x_0 \in D$* (см. [2,3]), если соотношение

$$M\left(f\left(\Gamma\left(S_1,\, S_2,\, A\right)\right)\right)\ \leqslant \int\limits_{A} Q(x)\cdot \eta^n(|x-x_0|)\ dm(x)$$

выполнено для любого кольца $A = A(r_1, r_2, x_0),\ 0 < r_1 < r_2 < r_0 := \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что $\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)dr \geqslant 1$. Отметим, что кольцевые Q-гомеоморфизмы продолжаются по непрерывности в изолированные граничные точки, причём продолженное отображение также является гомеоморфизмом (см. [27, лемма 4 и теорема 4]).

Доказательство теоремы 1.2. Пусть f — отображение из условия теоремы, тогда, в частности, $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$, f — конечного искажения в $D \setminus \{z_0\}$, кроме того, f дискретно и открыто. Тогда согласно представлению Стоилова [28, п. 5 (III), гл. V], $f = \varphi \circ g$, где g — некоторый гомеоморфизм, а φ — аналитическая функция. Заметим, что тогда также $g \in W^{1,1}_{\rm loc}$ и, кроме того, g имеет конечное искажение.

Действительно, множество точек ветвления $B_{\varphi} \subset g(D \setminus \{z_0\})$ функции φ состоит только из изолированных точек (см. [28, пункты 5 и 6 (II), гл. V]). Следовательно, $g(z) = \varphi^{-1} \circ f$ локально, вне множества $g^{-1}(B_{\varphi})$. Ясно, что множество $g^{-1}(B_{\varphi})$ также состоит из изолированных точек, следовательно, $g \in ACL(D \setminus \{z_0\})$ как композиция аналитической функции φ^{-1} и отображения $f \in W^{1,1}_{\rm loc}(D \setminus \{z_0\})$.

Покажем, что $g \in W^{1,1}_{\rm loc}(D \setminus \{z_0\})$. Для этой цели, поскольку $g \in ACL(D \setminus \{z_0\})$, нам достаточно показать, что $|\partial g| \in L^1_{\rm loc}(D \setminus \{z_0\})$ и $|\overline{\partial} g| \in L^1_{\rm loc}(D \setminus \{z_0\})$ (см. [21, теоремы 1 и 2, п. 1.1.3]). Пусть далее $\mu_f(z)$ означает комплексную дилатацию функции $f(z)$, а $\mu_g(z)$ —

комплексную дилатацию g. Согласно [11, (1), п. C, гл. I] для почти всех $z\in D\setminus\{z_0\}$ получаем:

$$f_z=\varphi_z(g(z))g_z,\qquad f_{\overline{z}}=\varphi_z(g(z))g_{\overline{z}}\,, \tag{2.20}$$

$\mu_f(z)=\mu_g(z)=:\mu(z)$, $K_{\mu_f}(z)=K_{\mu_g}(z):=K_{\mu}(z)=\frac{1+|\mu|}{|1-|\mu||}$. Таким образом, $K_{\mu}(z)\in L^1_{\rm loc}(D\backslash\{z_0\})$. Поскольку f — конечного искажения, из (2.20) немедленно следует, что g также конечного искажения и при почти всех $z\in D\setminus\{z_0\}$ выполнены соотношения $|\partial g|\leqslant|\partial g|+|\overline{\partial}g|=K_{\mu}^{1/2}(z)(|J(f,z)|)^{1/2}$, откуда по неравенству Гёльдера $|\partial g|\in L^1_{\rm loc}(D\setminus\{z_0\})$ и $|\overline{\partial}g|\in L^1_{\rm loc}(D\setminus\{z_0\})$. Следовательно, $g\in W^{1,1}_{\rm loc}(D\setminus\{z_0\})$ и g имеет конечное искажение.

В таком случае, g продолжается до гомеоморфизма $g:D\rightarrow\mathbb{C}$ ввиду [27, лемма 4 и теорема 4]. Тогда φ продолжается по непрерывности в точку $g(z_0)$ области $g(D)$ ввиду классической теоремы Пикара, что и доказывает теорему. $\square$

3. Некоторые следствия и замечания

Ещё один важный результат, относящийся к устранению особенностей классов Орлича–Соболева, касается функций конечного среднего колебания (см. [2] и [29]).

В дальнейшем нам понадобится следующее вспомогательное утверждение (см., напр., [2, лемма 7.4, гл. 7] и [30, лемма 2.2]) при $p=n$ и [31, лемма 2.2] при $p\neq n$.

Предложение 3.1. *Пусть $x_0\in\mathbb{R}^n$, $Q(x)$ — измеримая по Лебегу функция, $Q:\mathbb{R}^n\rightarrow[0,\infty]$, $Q\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$. Полагаем*

$$A:=A(r_1,r_2,x_0)=\{x\,\in\,\mathbb{R}^n:r_1<|x-x_0|<r_2\}$$

и $\eta_0(r)=\frac{1}{Ir^{\frac{n-1}{p-1}}q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}$, где $I:=I=I(x_0,r_1,r_2)=\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}}q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}$ и $q_{x_0}(r):=\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{|x-x_0|=r}Q(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}$ — среднее интегральное значение функции Q над сферой $S(x_0,r)$. Тогда

$$\frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}=\int\limits_{A}Q(x)\cdot\eta_0^p(|x-x_0|)\,dm(x)\leqslant\int\limits_{A}Q(x)\cdot\eta^p(|x-x_0|)\,dm(x) \tag{3.1}$$

для любой измеримой по Лебегу функции $\eta:(r_1,r_2)\rightarrow[0,\infty]$ такой, что $\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)dr=1$.

Будем говорить, что локально интегрируемая функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0 \in D$, пишем $\varphi \in FMO(x_0)$, если

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\Omega_n\varepsilon^n} \int\limits_{B(x_0,\,\varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon|\, dm(x) < \infty\,,$$

где $\overline{\varphi}_\varepsilon = \frac{1}{\Omega_n\varepsilon^n} \int\limits_{B(x_0,\,\varepsilon)} \varphi(x)\, dm(x)$. Как известно, $\Omega_n\varepsilon^n = m(B(x_0,\varepsilon))$. Имеет место следующая

Теорема 3.1. *Пусть $n \geqslant 3$, D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n-1 < \alpha \leqslant n$, $x_0 \in D$, тогда каждое открытое, дискретное и замкнутое ограниченное отображение $f : D\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}^n$ класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(D\setminus\{x_0\})$ с конечным искажением такое, что $C(f,x_0)\cap C(f,\partial D) = \varnothing$, продолжается в точку x_0 непрерывным образом до отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, если выполнено условие (1.2) и, кроме того, найдётся функция $Q \in L^1_{\rm loc}(D)$, такая что $K_{I,\alpha}(x,f) \leqslant Q(x)$ при почти всех $x \in D$ и $Q \in FMO(x_0)$.*

Доказательство. Достаточно показать, что условие $Q \in FMO(x_0)$ влечёт расходимость интеграла (1.3), поскольку в этому случае необходимое заключение будет следовать из теоремы 1.1. Заметим, что для функций класса FMO в точке x_0

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<e_0} \frac{Q(x+x_0)\, dm(x)}{\left(|x| \log \frac{1}{|x|}\right)^n} = O\left(\log\log \frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{3.2}$$

при $\varepsilon \to 0$ и для некоторого $e_0 > 0$, $e_0 \leqslant {\rm dist}\,(0,\partial D)$. При $\varepsilon_0 < r_0 := {\rm dist}\,(0,\partial D)$ полагаем $\psi(t) := \frac{1}{\left(t\, \log \frac{1}{t}\right)^{n/\alpha}}$, $I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt \geqslant \log \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log \frac{1}{\varepsilon_0}}$ и $\eta(t) := \psi(t)/I(\varepsilon,\varepsilon_0)$. Заметим, что $\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta(t)dt = 1$, кроме того, из соотношения (3.2) вытекает, что

$$\frac{1}{I^\alpha(\varepsilon,\varepsilon_0)} \int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x+x_0)\cdot\psi^\alpha(|x|)\; dm(x) \leqslant C\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1-\alpha} \to 0 \tag{3.3}$$

при $\varepsilon \to 0$. Из соотношений (3.1) и (3.3) вытекает, что интеграл вида (1.3) расходится, что и требовалось установить. $\Box$

Следующее утверждение справедливо только при $\alpha \neq n$.

Теорема 3.2. *Пусть $n \geqslant 3$, D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\alpha \in (n-1, n)$, $x_0 \in D$, тогда каждое открытое, дискретное и замкнутое ограниченное отображение $f : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$ класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(D \setminus \{x_0\})$ с конечным искажением такое, что $C(f, x_0) \cap C(f, \partial D) = \varnothing$, продолжается в точку x_0 непрерывным образом до отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, если выполнено условие (1.2) и, кроме того, найдётся функция $Q \in L^1_{\rm loc}(D)$, такая что $K_{I,\alpha}(x, f) \leqslant Q(x)$ при почти всех $x \in D$ и $Q \in L^s_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ при некотором $s \geqslant \frac{n}{n-\alpha}$.*

Доказательство. Можно считать, что $x_0 = 0$. Зафиксируем произвольным образом $0 < \varepsilon_0 < \infty$ и положим $G := B(0, \varepsilon_0)$, $\psi(t) := 1/t$. Заметим, что указанная функция ψ удовлетворяет неравенствам $0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt < \infty$. Покажем также, что в этом случае выполнено соотношение

$$\int\limits_{A(\varepsilon,\varepsilon_0,0)} Q(x) \cdot \psi^{\alpha}(|x|)\, dm(x) \,=\, o\left(I^{\alpha}(\varepsilon, \varepsilon_0)\right) . \tag{3.4}$$

Применяя неравенство Гёльдера, будем иметь

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-b|<\varepsilon_0} \frac{Q(x)}{|x-b|^{\alpha}}\, dm(x)$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\varepsilon<|x-b|<\varepsilon_0} \frac{1}{|x-b|^{\alpha q}}\, dm(x) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{G} Q^{q'}(x)\, dm(x) \right)^{\frac{1}{q'}} , \tag{3.5}$$

где $1/q + 1/q' = 1$. Заметим, что первый интеграл в правой части неравенства (3.5) может быть подсчитан непосредственно. Действительно, пусть для начала $q' = \frac{n}{n-\alpha}$ (и, следовательно, $q = \frac{n}{\alpha}$.) Ввиду теоремы Фубини будем иметь:

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-b|<\varepsilon_0} \frac{1}{|x-b|^{\alpha q}}\, dm(x) = \omega_{n-1} \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t} = \omega_{n-1} \log \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \,.$$

В обозначениях леммы 2.4 мы будем иметь, что при $\varepsilon \to 0$

$$\frac{1}{I^{\alpha}(\varepsilon, \varepsilon_0)} \int\limits_{\varepsilon<|x-b|<\varepsilon_0} \frac{Q(x)}{|x-b|^{\alpha}}\, dm(x)$$

$$\leqslant \omega_{n-1}^{\frac{\alpha}{n}} \|Q\|_{L^{\frac{n}{n-\alpha}}(G)} \left(\log \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{-\alpha + \frac{\alpha}{n}} \to 0 \,,$$

что влечёт выполнение соотношения (3.4).

Пусть теперь $q' > \frac{n}{n-\alpha}$ (т.е., $q = \frac{q'}{q'-1}$). В этом случае

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-b|<\varepsilon_0} \frac{1}{|x-b|^{\alpha q}}\, dm(x) = \omega_{n-1} \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} t^{n-\frac{\alpha q'}{q'-1}-1} dt$$

$$\leqslant \omega_{n-1} \int\limits_{0}^{\varepsilon_0} t^{n-\frac{\alpha q'}{q'-1}-1} dt = \frac{\omega_{n-1}}{n-\frac{\alpha q'}{q'-1}} \varepsilon_0^{n-\frac{\alpha q'}{q'-1}},$$

и, значит,

$$\frac{1}{I^{\alpha}(\varepsilon,\varepsilon_0)} \int\limits_{\varepsilon<|x-b|<\varepsilon_0} \frac{Q(x)}{|x-b|^{\alpha}}\, dm(x)$$

$$\leqslant \|Q\|_{L^{q'}(G)} \left(\frac{\omega_{n-1}}{n-\frac{\alpha q'}{q'-1}} \varepsilon_0^{n-\frac{\alpha q'}{q'-1}}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\log \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{-\alpha},$$

что также влечёт выполнение соотношения (3.4). Положим теперь в (3.1) $\eta(t) = \psi(t)/I(r_1, r_2)$. Тогда из (3.1) немедленно следует, что $\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{\alpha-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{\alpha-1}}(r)} \to \infty$ при $r_1 \to 0$. В таком случае, заключение данной теоремы вытекает из теоремы 1.1. $\square$

Теперь рассмотрим некоторые примеры. Заметим, прежде всего, что производная $\frac{\partial f}{\partial e}(x_0) = \lim\limits_{t\to+0} \frac{f(x_0+te)-f(x_0)}{t}$ отображения f по направлению $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ в точке его дифференцируемости x_0 может быть вычислена по правилу: $\frac{\partial f}{\partial e}(x_0) = f'(x_0)e$. Таким образом, путём прямого вычисления можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Предложение 3.2. *Пусть отображение $f : B(0,p) \to \mathbb{R}^n$ имеет вид*

$$f(x) = \frac{x}{|x|}\rho(|x|)\,,$$

где функция $\rho(t) : (0,p) \to \mathbb{R}$ непрерывна и дифференцируема почти всюду. Тогда f также дифференцируемо почти всюду, при этом, в каждой точке x_0 дифференцируемости отображения f в качестве главных векторов $e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}$ и $\widetilde{e_{i_1}}, \ldots, \widetilde{e_{i_n}}$ можно взять $(n-1)$ линейно независимых касательных векторов к сфере $S(0,r)$ в точке x_0, где $|x_0| = r$, и один ортогональный к ним вектор в указанной точке.

Соответствующие главные растяжения (называемые, соответственно, касательными растяжениями и радиальным растяжением) равны $\lambda_{\tau}(x_0) := \lambda_{i_1}(x_0) = \ldots = \lambda_{i_{n-1}}(x_0) = \frac{\rho(r)}{r}$ *и* $\lambda_r(x_0) := \lambda_{i_n} = \rho'(r)$, *соответственно.*

Отметим, что для главных растяжений λ_{i_k}, $k \in 1, 2, \ldots, n$, мы намеренно использовали двойную индексацию, поскольку, как мы условились выше, конечную последовательность λ_i, $i \in 1, 2, \ldots, n$ мы предполагаем возрастающей по $i : \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Естественно, что в фиксированной точке x_0 радиальные растяжения $\lambda_{i_1}(x_0) = \ldots = \lambda_{i_{n-1}}(x_0) = \frac{\rho(r)}{r}$ могут быть не больше касательного растяжения $\lambda_{i_n} = \rho'(r)$, и наоборот.

Следующее утверждение показывает, что в условиях теорем 1.1 и 3.1 требования на функцию Q нельзя, вообще говоря, заменить условием $Q \in L^p$ ни для какого (сколь угодно большого) $p > 0$ и для любой неубывающей функции $\varphi(t)$. Для простоты рассмотрим случай, когда $D = \mathbb{B}^n$, $n \geqslant 3$.

Теорема 3.3. *Пусть* $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *— произвольная неубывающая функция. Для каждого* $p \geqslant 1$ *и* $n - 1 < \beta \leqslant n$ *существуют функция* $Q : \mathbb{B}^n \to [1, \infty]$, $Q(x) \in L^p(\mathbb{B}^n)$ *и равномерно ограниченный гомеоморфизм* $g : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$, $g \in W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})$, *имеющий конечное искажение, такой что* $K_{I,\beta}(x, f) \leqslant Q(x)$, *при этом,* g *не продолжается по непрерывности в точку* $x_0 = 0$.

Доказательство. Рассмотрим следующий пример. Зафиксируем числа $p \geqslant 1$ и $\alpha \in (0, n/p(n-1))$. Можно считать, что $\alpha < 1$ в силу произвольности выбора p. Зададим гомеоморфизм $g : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ следующим образом: $g(x) = \frac{1+|x|^{\alpha}}{|x|} \cdot x$. Заметим, что отображение g переводит шар $D = \mathbb{B}^n$ в кольцо $D' = B(0, 2) \setminus \mathbb{B}^n$, при этом, $C(g, 0) = \mathbb{S}^{n-1}$ (отсюда вытекает, что g не имеет предела в нуле). Заметим, что $g \in C^1(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})$, в частности, $g \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$.

Далее, в каждой точке $x \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ отображения $g : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ вычислим внутреннюю дилатацию отображения g в точке x порядка β, воспользовавшись правилом (2.7). Поскольку g имеет вид $g(x) = \frac{x}{|x|}\rho(|x|)$, прямым подсчётом соответствующих производных по направлению можно убедиться, что в качестве главных векторов $e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}$ и $\widetilde{e_{i_1}}, \ldots, \widetilde{e_{i_n}}$ можно взять $(n-1)$ линейно независимых касательных векторов к сфере $S(0, r)$ в точке x_0, где $|x_0| = r$, и один ортогональный к ним вектор в указанной точке. Соответствующие главные растяжения (называемые, соответственно, *касательными растяжениями* и *радиальным растяжением*) равны $\lambda_{\tau}(x_0) :=$

$\lambda_{i_1}(x_0) = \ldots = \lambda_{i_{n-1}}(x_0) = \frac{\rho(r)}{r}$ и $\lambda_r(x_0) := \lambda_{i_n} = \rho'(r)$, соответственно.

Согласно сказанному,

$$\lambda_\tau(x) = \frac{|x|^\alpha + 1}{|x|}, \lambda_r(x) = \alpha|x|^{\alpha-1}, l(g'(x)) = \alpha|x|^{\alpha-1}\,,$$

$$\|g'(x)\| = \frac{|x|^\alpha + 1}{|x|}\,, |J(x,g)| = \left(\frac{|x|^\alpha + 1}{|x|}\right)^{n-1} \cdot \alpha|x|^{\alpha-1}$$

и $K_{I,\beta}(x,g) = c(\alpha) \cdot \frac{(1+|x|^{\,\alpha})^{n-1}}{|x|^{\,(\alpha-1)(\beta-1)+n-1}}$. Заметим, что если G — произвольная компактная область в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$, то $\|g'(x)\| \leqslant c(G) < \infty$, кроме того, нетрудно видеть, что $|\nabla g(x)| \leqslant n^{1/2} \cdot \|g'(x)\|$ при почти всех $x \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. Тогда ввиду неубывания функции φ выполнено: $\int\limits_G \varphi(|\nabla g(x)|)dm(x) \leqslant \varphi(n^{1/2}c(G)) \cdot m(G) < \infty$, т.е., $g \in W^{1,\varphi}(G)$. Заметим, что отображение g имеет конечное искажение, поскольку его якобиан почти всюду не равен нулю; кроме того, $K_{I,\beta}(x,g) = c(\alpha) \cdot \frac{(1+|x|^{\,\alpha})^{n-1}}{|x|^{\,(\alpha-1)(\beta-1)+n-1}}$. Полагаем: $Q = \frac{(1+|x|^{\,\alpha})^{n-1}}{|x|^{\,(\alpha-1)(\beta-1)+n-1}}$, тогда $Q(x) \leqslant \frac{C}{|x|^{\alpha(n-1)}}$. Таким образом, получаем:

$$\int\limits_{\mathbb{B}^n} (Q(x))^p\, dm(x) \leqslant C^p \int\limits_{\mathbb{B}^n} \frac{dm(x)}{|x|^{p\alpha(n-1)}}$$

$$= C^p \int\limits_0^1 \int\limits_{S(0,r)} \frac{d\mathcal{A}}{|x|^{p\alpha(n-1)}}\, dr = \omega_{n-1} C^p \int\limits_0^1 \frac{dr}{r^{(n-1)(p\alpha-1)}}\,. \tag{3.6}$$

Хорошо известно, что интеграл $I := \int\limits_0^1 \frac{dr}{r^\gamma}$ сходится при $\gamma < 1$. Таким образом, интеграл в правой части соотношения (3.6) сходится, поскольку показатель степени $\gamma := (n-1)(p\alpha - 1)$ удовлетворяет условию $\gamma < 1$ при $\alpha \in (0, n/p(n-1))$. Отсюда вытекает, что $Q(x) \in L^p(\mathbb{B}^n)$. □

Следующее утверждение содержит в себе заключение о том, что условие (1.3) является не только достаточным, но в некотором смысле и необходимым условием возможности непрерывного продолжения отображения в изолированную граничную точку.

Теорема 3.4. *Пусть $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — произвольная неубывающая функция, и $n-1 < \alpha \leqslant n$ и $0 < \varepsilon_0 < 1$. Для каждой измеримой по Лебегу функции $Q : \mathbb{B}^n \to [1,\infty]$, $Q \in L_{\rm loc}(\mathbb{B}^n)$, такой,* *что* $\int\limits_0^{\varepsilon_0}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{\alpha-1}}q_0^{\frac{1}{\alpha-1}}(t)}<\infty$, *найдётся ограниченное отображение* $f\in W_{\rm loc}^{1,\varphi}(\mathbb{B}^n\setminus\{0\})$ *с конечным искажением, которое не может быть продолжено в точку* $x_0=0$ *непрерывным образом, при этом,* $K_{I,\alpha}(x,f)\leqslant \widetilde{Q}(x)$ *п.в., где* $\widetilde{Q}(x)$ *— некоторая измеримая по Лебегу функция, такая что*

$$\widetilde{q}_0(r):=\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{S(0,r)}\widetilde{Q}(x)d\mathcal{H}^{n-1}=q_0(r)$$

для почти всех $r\in(0,1)$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\alpha=n$. Определим отображение $f:\mathbb{B}^n\setminus\{0\}\rightarrow\mathbb{R}^n$ следующим образом: $f(x)=\frac{x}{|x|}\rho(|x|)$, где $\rho(r)=\exp\left\{-\int\limits_r^1\frac{dt}{tq_0^{1/(n-1)}(t)}\right\}$. Заметим, что $f\in ACL$ и отображение f дифференцируемо почти всюду в $\mathbb{B}^n\setminus\{0\}$. Ввиду техники, изложенной перед формулировкой леммы 2.3,

$$\|f^{\prime}(x)\|=\frac{\exp\left\{-\int\limits_{|x|}^1\frac{dt}{tq_0^{1/(n-1)}(t)}\right\}}{|x|}\,, l(f^{\prime}(x))=\frac{\exp\left\{-\int\limits_{|x|}^1\frac{dt}{tq_0^{1/(n-1)}(t)}\right\}}{|x|q_0^{1/(n-1)}(|x|)}$$

и $|J(x,f)|=\frac{\exp\left\{-n\int\limits_{|x|}^1\frac{dt}{tq_0^{1/(n-1)}(t)}\right\}}{|x|^nq_0^{1/(n-1)}(|x|)}$. Заметим, что $J(x,f)\ne 0$ при почти всех x, значит, f — отображение с конечным искажением. Кроме того, отметим, что $\varphi(|\nabla f(x)|)\in L_{\rm loc}^1(\mathbb{B}^n\setminus\{0\})$, поскольку $\|f^{\prime}(x)\|$ локально ограничена в $\mathbb{B}^n\setminus\{0\}$, а φ — неубывающая функция. Путём непосредственных вычислений убеждаемся, что $K_I(x,f)=q_0(|x|)$. Полагаем $\widetilde{Q}(x):=q_0(|x|)$, тогда будем иметь, что $\widetilde{q}_0(r)=q_0(r)$ для почти всех $r\in(0,1)$. Наконец, заметим, что отображение f не продолжается по непрерывности в точку $x_0=0$ ввиду условия $\int\limits_0^{\varepsilon_0}\frac{dt}{tq_0^{\frac{1}{n-1}}(t)}<\infty$.

Теперь рассмотрим случай $\alpha\in(n-1,n)$. Определим отображение $f:\mathbb{B}^n\setminus\{0\}\rightarrow\mathbb{R}^n$ следующим образом: $f(x)=\frac{x}{|x|}\rho(|x|)$, где

$$\rho(x)=\left(1+\frac{n-\alpha}{\alpha-1}\int\limits_{|x|}^1\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{\alpha-1}}q_0^{\frac{1}{\alpha-1}}(t)}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha-n}}.$$

Заметим, что $f\in ACL$ и отображение f дифференцируемо почти всюду в $\mathbb{B}^n\setminus\{0\}$. Ввиду техники, изложенной перед формулировкой леммы 2.3,

$$\|f'(x)\| = \left(1 + \frac{n-\alpha}{\alpha-1}\int\limits_{|x|}^{1}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{\alpha-1}}q_0^{\frac{1}{\alpha-1}}(t)}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha-n}} \cdot \frac{1}{|x|}\,,$$

$$l(f'(x)) = \left(1 + \frac{n-\alpha}{\alpha-1}\int\limits_{|x|}^{1}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{\alpha-1}}q_0^{\frac{1}{\alpha-1}}(t)}\right)^{\frac{n-1}{\alpha-n}} \cdot \frac{1}{|x|^{\frac{n-1}{\alpha-1}}q_0^{\frac{1}{\alpha-1}}(|x|)}$$

и

$$J(x,f) = \left(1 + \frac{n-\alpha}{\alpha-1}\int\limits_{|x|}^{1}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{\alpha-1}}q_0^{\frac{1}{\alpha-1}}(t)}\right)^{\frac{(n-1)\alpha}{\alpha-n}} \cdot \frac{1}{|x|^{n-1+\frac{n-1}{\alpha-1}}q_0^{\frac{1}{\alpha-1}}(|x|)}\,.$$

Заметим, что $J(x,f) \neq 0$ при почти всех x, значит, f — отображение с конечным искажением. Кроме того, отметим, что $\varphi(|\nabla f(x)|) \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})$, поскольку $\|f'(x)\|$ локально ограничена в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$, а φ – неубывающая функция. Путём непосредственных вычислений убеждаемся, что $K_I(x,f) = q_0(|x|)$. Полагаем $\widetilde{Q}(x) := q_0(|x|)$, тогда будем иметь, что $\widetilde{q}_0(r) = q_0(r)$ для почти всех $r \in (0,1)$. Наконец, заметим, что отображение f не продолжается по непрерывности в точку $x_0 = 0$ ввиду условия $\int\limits_0^{\varepsilon_0}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{\alpha-1}}q_0^{\frac{1}{\alpha-1}}(t)} < \infty$. $\square$

Литература

[1] T. Iwaniec, G. Martin, *Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis*, Oxford, Clarendon Press, 2001.

[2] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in Modern Mapping Theory*, New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.

[3] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Mappings with finite length distortion* // J. d'Anal. Math., **93** (2004), 215–236.

[4] V. Ya. Gutlyanskii, V. I. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *The Beltrami Equation: A Geometric Approach*, Developments in Mathematics, vol. 26., New York etc.: Springer, 2012.

[5] V.Ya. Gutlyanskiĭ, A. Golberg, *On Lipschitz continuity of quasiconformal mappings in space* // J. d' Anal. Math., **109** (2009), 233–251.

[6] A. Golberg, R. Salimov, *Topological mappings of integrally bounded p-moduli* // Ann. Univ. Buchar. Math. Ser., **3(LXI)** (2012), No. 1, 49–66.

[7] Р.Р. Салимов, *О кольцевых Q-отображениях относительно неконформного модуля* // Дальневост. матем. журн., **14** (2014), No. 2, 257–269.

[8] M. Vuorinen, *Exceptional sets and boundary behavior of quasiregular mappings in n-space* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1. Math. Dissertationes, **11** (1976), 1–44.

[9] Д.А. Ковтонюк, В.И. Рязанов, Р.Р. Салимов, Е.А. Севостьянов, *К теории классов Орлича–Соболева* // Алгебра и анализ, **25** (2013), No. 6, 50–102.

[10] A.P. Calderon, *On the differentiability of absolutely continuous functions*, Riv. Math. Univ. Parma, **2** (1951), 203–213.

[11] Л. Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям*, Москва, Мир, 1969.

[12] B. Fuglede, *Extremal length and functional completion* // Acta Math., **98** (1957), 171–219.

[13] F.W. Gehring, *Rings and quasiconformal mappings in space* // Trans. Amer. Math. Soc., **103** (1962), 353–393.

[14] S. Rickman, *Quasiregular mappings*, Results in Mathematic and Related Areas (3), 26, Berlin, Springer-Verlag, 1993.

[15] W.P. Ziemer, *Extremal length and conformal capacity* // Trans. Amer. Math. Soc., **126** (1967), No. 3, 460–473.

[16] W.P. Ziemer, *Extremal length and p-capacity* // Michigan Math. J., **16** (1969), 43–51.

[17] В.А. Шлык, *О равенстве p-емкости и p-модуля* // Сиб. матем. журн., **34** (1993), No. 6, 216–221.

[18] Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Москва, Наука, 1987.

[19] Ю.Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Новосибирск, Наука, 1982.

[20] D. Kovtonuyk,V. Ryazanov, *New modulus estimates in Orlicz-Sobolev classes* // Annals of the University of Bucharest (mathematical series), **5(LXIII)** (2014), 131–135.

[21] В.Г. Мазья, *Пространства Соболева*, Ленинград, Издательство ленинградского университета, 1985.

[22] O. Martio, S. Rickman, Väisälä J., *Distortion and singularities of quasiregular mappings* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, **465** (1970), 1–13.

[23] Е.А. Севостьянов, *О некоторых свойствах обобщённых квазиизометрий с неограниченной характеристикой* // Укр. матем. ж., **63** (2011), No. 3, 385–398.

[24] Д.А. Ковтонюк, В.И. Рязанов, *К теории нижних Q-гомеоморфизмов* // Укр. матем. вестник, **5** (2008), No. 2, 159–184.

[25] J. Väisälä, *Lectures on n–Dimensional Quasiconformal Mappings*, Lecture Notes in Math., 229, Springer–Verlag, Berlin etc., 1971.

[26] O. Martio, U. Srebro, *Periodic quasimeromorphic mappings* // J. Analyse Math., **28** (1975), 20–40.

[27] Т.В. Ломако, *О распространении некоторых обобщений квазиконформных отображений на границу* // Укр. матем. ж., **61** (2009), No. 10, 1329–1337.

[28] С. Стоилов, *Лекции о топологических принципах теории аналитических функций*, Москва, Наука, 1964.

[29] А. Игнатьев,В. Рязанов, *Конечное среднее колебание в теории отображений* // Укр. матем. вестник, **2** (2005), No. 3, 395–417.

[30] В.И. Рязанов, Е.А. Севостьянов, *Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов* // Сиб. матем. ж., **48** (2007), No. 6, 1361–1376.

[31] Р.Р. Салимов, *Об оценке меры образа шара* // Сиб. матем. журн., **53** (2012), No. 4, 920–930.

Сведения об авторах

Евгений Александрович Севостьянов
Житомирский государственный университет имени Ивана Франко, Житомир, Украина
E-Mail: esevostyanov2009@mail.ru

Руслан Радикович Салимов
Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
E-Mail: ruslan623@yandex.ru

Евгений Александрович Петров
Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск, Украина
E-Mail: eugeniy.petrov@gmail.com