Український математичний вісник
Том 15 **(2018)**, № 1, 57 – 64

О равномерной сходимости рядов Фурье к (ψ, β)-производным

Елена И. Радзиевская

(Представлена М. М. Маламудом)

Аннотация. В терминах наилучших приближений функции в пространстве L_p найдено условие существования у нее (ψ, β)-производных и равномерной сходимости к ним рядов Фурье.

2010 MSC. 42A10, 42A27.

Ключевые слова и фразы. (ψ, β)-производные, равномерная сходимость рядов Фурье, наилучшие приближения функции, пространства L_p.

1. Введение

Пусть L_p – пространство измеримых 2π-периодических функций $f(x)$, для которых $\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx < \infty$, $1 < p < \infty$ и

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx}$$

ее ряд Фурье.

Пусть, далее $\psi(t) > 0$ при $t \geq 1$ и β – произвольное фиксированное действительное число. Если ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}_k}{\psi(|k|)} e^{i(kx+\beta sign k)}$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции, то ее называют (ψ, β)-производной функции f и обозначают f^{ψ}_{β}. Множество функций, которые удовлетворяют этим условиям обозначают L^{ψ}_{β}.

Статья поступила в редакцию 13.03.2018

Если $f \in L^{\psi}_{\beta}$, а $f^{\psi}_{\beta} \in \mathfrak{N}$ ($\mathfrak{N} \subset L(0, 2\pi)$), то говорят, что функция принадлежит классу $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ [1, с. 142 – 143].

Введенные таким образом классы при фиксированных значениях, определяющих их параметров, совпадают с известными классами функций $W^r; W^r_{\beta,p}; W^r_{\beta}H_{\omega}$ и им подобными.

Данная работа посвящена нахождению достаточного условия существования непрерывной (ψ, β)-производной у функции f из L_p и равномерной сходимости ряда Фурье (ψ, β)-производной.

В пункте 2 будут приведены определения и теоремы, необходимые для формулировки и доказательства основного результата этой работы, а сама теорема и ее доказательство будут приведены в пункте 3.

2. Вспомогательные утверждения

Пусть $\omega_k(f, \delta)_p$ – модуль гладкости k-го порядка (k – натуральное число) в пространстве $L_p(0, 2\pi)$

$$\omega_k(f, \delta)_p = \sup_{|h| \le \delta} \left(\int\limits_0^{2\pi} |\Delta^k_h f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $\Delta^k_h f(x)$ – конечная разность k-го порядка функции $f(x)$ с шагом h

$$\Delta^k_h f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x + ih).$$

Если $k = 1$, то вместо $\omega_1(f, \delta)_p$ будем писать $\omega(f, \delta)_p$.

Далее через $E_n(f)_p$ обозначим наилучшее приближение в метрике пространства L_p функции $f(x)$ посредством тригонометрических полиномов порядка не выше $n - 1$.

Справедлива следующая (см. [2])

Теорема 2.1. *Пусть $\psi(t)$ – такая положительная невозрастающая функция, определенная для всех $t \ge 1$ такая, что $\psi(2t) \ge c\psi(t)$ при $t \ge 1$ (c – некоторая положительная константа) и наилучшие приближения функции $f \in L_p$, $1 < p < \infty$ удовлетворяют условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{E_k(f)_p}{\psi(k)k} < \infty. \tag{2.1}$$

Тогда для любого действительного β у функции $f \in L_p$ существует

(ψ,β)-производная, принадлежащая L_p, для которой

$$E_n(f^{\psi}_{\beta})_p \le c_1 \left(\frac{E_n(f)_p}{\psi(n)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{E_k(f)_p}{\psi(k)k} \right). \tag{2.2}$$

Здесь, и далее c, c_i, $i = 1, 2, \ldots$ некоторые постоянные, вообще зависящие от функции $\psi(\cdot)$. В случае, когда они будут зависеть не только от ψ, определяющие их параметры будут указаны далее в скобках.

Из этой теоремы вытекает следующее утверждение

Следствие 2.1. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда для любого действительного β у функции $f \in L_p$ существует (ψ,β)-производная, принадлежащая L_p, для которой*

$$\omega_k(f^{\psi}_{\beta}, \frac{1}{n})_p \le c(k) \left(\frac{1}{n^k} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{E_\nu(f)_p}{\psi(\nu)} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{E_\nu(f)_p}{\psi(\nu)\nu} \right), \tag{2.3}$$

где k любое натуральное число.

Доказательство. Известно (см. [3, с. 344]), что если $f \in L_p$, $1 \le p \le \infty$ и k-натуральное число, то

$$\omega_k(f, \frac{1}{n})_p \le c(k) \frac{1}{n^k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_\nu(f)_p.$$

Из теоремы 2.1 следует, что существует (ψ,β)-производная функции f и она принадлежит L_p поэтому имеет место неравенство

$$\omega_k(f^{\psi}_{\beta}, \frac{1}{n})_p \le c(k) \frac{1}{n^k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_\nu(f^{\psi}_{\beta})_p.$$

Далее, подставляя в это неравенство вместо $E_\nu(f^{\psi}_{\beta})_p$ правую часть неравенства (2.2), получаем:

$$\omega_k(f, \frac{1}{n})_p \le c_1 \frac{1}{n^k} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\nu^{k-1} \frac{E_\nu(f)_p}{\psi(\nu)} + \sum_{m=\nu+1}^{\infty} \frac{E_m(f)_p}{\psi(m)m} \right)$$

$$\le c_2 \Bigg(\frac{1}{n^k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} \frac{E_\nu(f)_p}{\psi(\nu)} + \frac{1}{n^k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} \sum_{m=\nu+1}^{n} \frac{E_m(f)_p}{\psi(m)m}$$

$$+ \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{E_m(f)_p}{\psi(m)m} \Bigg)$$

$$\leq c_3\left(\frac{1}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\frac{E_\nu(f)_p}{\psi(\nu)}+\frac{1}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{E_\nu(f)_p}{\psi(\nu)\nu}\sum_{m=1}^{\nu}m^{k-1}\right.$$
$$\left.+\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{E_m(f)_p}{\psi(m)m}\right)$$
$$\leq c_3\left(\frac{1}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{E_\nu(f)_p}{\psi(\nu)}+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{E_\nu(f)_p}{\psi(\nu)\nu}\right).$$

Следствие доказано. □

При доказательстве основного результата работы будет использоваться неравенство Конюшкова–Стечкина. А именно, понадобится следующая (см. [4])

Теорема 2.2. *Пусть функция $f \in L_p(0,2\pi)$, $1 \leq p < \infty$ такова, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty}E_k(f)_p k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1} < \infty, \tag{2.4}$$

где q – некоторое число , $p < q \leq \infty$. Тогда $f \in L_q(0,2\pi)$, причем

$$E_n(f)_q \leq c_3\left(E_n(f)_p(n+1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}+\sum_{k=n+1}^{\infty}E_k(f)_p k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1}\right) \tag{2.5}$$

$n = 0, 1, \ldots.$

3. Основной результат

Основным результатом работы является следующее утверждение

Теорема 3.1. *Пусть $\psi(t)$ – такая положительная невозрастающая функция, определенная для всех $t \geq 1$, что $\psi(2t) \geq c\psi(t)$ при $t \geq 1$ (c – некоторая положительная константа) и наилучшие приближения функции $f \in L_p$, $1 < p < \infty$ удовлетворяют условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{\frac{1}{p}}E_k(f)_p}{\psi(k)k} < \infty. \tag{3.1}$$

Тогда для любого действительного β у функции $f \in L_p$ существует непрерывная (ψ,β)-производная, ряд Фурье которой сходится к ней равномерно.

Доказательство. Согласно условию (3.1) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{E_k(f)_p}{\psi(k)k}$$

сходится, что в силу теоремы 2.1 гарантирует существование у функции f (ψ,β)-производной , принадлежащей пространству L_p, для которой справедливо неравенство (2.2) и (2.3). Подставляя теперь оценку (2.2) в неравенство Конюшкова–Стечкина (2.5) (записанного здесь для функции f_β^ψ и показателя $q=\infty$)

$$E_n(f_\beta^\psi)_\infty \le c_3\left(E_n(f_\beta^\psi)_p(n+1)^{\frac{1}{p}}+\sum_{k=n+1}^{\infty}E_k(f_\beta^\psi)_p k^{\frac{1}{p}-1}\right),$$

имеем:

$$E_n(f_\beta^\psi)_\infty \le c_4\left(\frac{E_n(f)_p(n+1)^{\frac{1}{p}}}{\psi(n)}+(n+1)^{\frac{1}{p}}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k(f)_p}{\psi(k)k}\right)$$
$$+c_4\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k^{\frac{1}{p}}E_k(f)_p}{\psi(k)k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{\frac{1}{p}-1}\sum_{m=k+1}^{\infty}\frac{E_m(f)_p}{\psi(m)m}\right). \qquad (3.2)$$

Для доказательства непрерывности функции f_β^ψ достаточно (и необходимо) установить соотношения

$$\lim_{n\to\infty}E_n(f_\beta^\psi)_\infty=0. \qquad (3.3)$$

Для этого оценим слагаемые из правой части неравенства (3.2). Вначале установим соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{E_n(f)_p(n)^{\frac{1}{p}}}{\psi(n)}=0. \qquad (3.4)$$

Пусть

$$\alpha_n\equiv\sum_{k=[\frac{n}{2}]+1}^{\infty}\frac{k^{\frac{1}{p}}E_k(f)_p}{\psi(k)k}\ge\sum_{k=[\frac{n}{2}]+1}^{n}\frac{k^{\frac{1}{p}}E_k(f)_p}{\psi(k)k}. \qquad (3.5)$$

Учитывая невозрастаемость по k последовательности $E_k(f)_p$ получаем, что

$$\alpha_n\ge\left(\frac{E_n(f)_p}{\psi(n)}\sum_{k=[\frac{n}{2}]+1}^{n}\frac{k^{\frac{1}{p}}\psi(n)}{k\psi(k)}\right). \qquad (3.6)$$

Но, значения k в сумме, стоящей в правой части неравенства (3.5), больше, чем $[\frac{n}{2}]+1$, а значит $k>\frac{n}{2}$, откуда и из свойств функции $\psi(t)$, следует соотношения: $\psi(n)\geq c\psi(\frac{n}{2})\geq\psi(k)$, т.е. $\frac{\psi(n)}{\psi(k)}\geq c$ при $k\geq\frac{n}{2}$. Подставляя это неравенство в (3.5) и учитывая, что последовательность $k^{\frac{1}{p}-1}$ убывает, а $n-[\frac{n}{2}]\geq\frac{n}{2}$, имеем

$$\alpha_n\geq\frac{E_n(f)_p}{\psi(n)}\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)n^{\frac{1}{p}-1}\geq\frac{c}{2}\frac{E_n(f)_p}{\psi(n)}n^{\frac{1}{p}}. \tag{3.7}$$

По определению (3.5) число α_n является остатком сходящегося ряда (3.1) и поэтому $\alpha_n\to 0$ при $n\to\infty$, откуда и из оценки (3.6) вытекает равенство (3.4).

Положим теперь

$$\sigma_n\equiv\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{\frac{1}{p}-1}\sum_{m=k+1}^{\infty}\frac{E_m(f)_p}{\psi(m)m}. \tag{3.8}$$

Покажем, что конечны σ_n и

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=0. \tag{3.9}$$

Переставляя суммирование по k и n в двойной сумме (3.8) и используя неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{m}k^{\frac{1}{p}-1}\leq\int\limits_{n}^{m}x^{\frac{1}{p}-1}\,dx\leq pm^{\frac{1}{p}},$$

получаем соотношение

$$\sigma_n=\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{E_m(f)_p}{\psi(m)m}\sum_{k=n+1}^{m}k^{\frac{1}{p}-1}\leq p\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{m^{\frac{1}{p}}E_m(f)_p}{\psi(m)m},$$

из которых и из сходимости ряда (3.1) следует равенство (3.9). (Законность перестановки слагаемых в суммах вытекает из положительности слагаемых и известной теоремы анализа).

Заметим, что сходимость ряда, стоящего в правой части тождества (3.8), эквивалентно сходимости ряда

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\left((k+1)^{\frac{1}{p}-1}\sum_{m=k+1}^{\infty}\frac{E_m(f)_p}{\psi(m)m}\right),$$

члены которого, заключенного в больших круглых скобках, монотонно убывают. Поэтому

$$\lim_{k\to\infty}\left((k+1)^{\frac{1}{p}-1}\sum_{m=k+1}^{\infty}\frac{E_m(f)_p}{\psi(m)m}\right)=0. \tag{3.10}$$

Итак, согласно равенствам (3.4), (3.8)–(3.10) , первое, второе и четвертое слагаемые из правой части неравенства (3.2) стремятся к нулю, когда n стремится к бесконечности. Стремление же к к нулю третьего слагаемого вытекает из сходимости ряда (3.1). Тем самым установлено соотношение (3.3), т.е. доказана непрерывность (ψ,β)-производной функции f.

Для завершения доказательства теоремы осталось показать равномерную сходимость к непрерывной функции f_β^ψ ее ряда Фурье. Для этого установим соотношение

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{p}}\omega\left(f_\beta^\psi,\frac{1}{n}\right)_p=0. \tag{3.11}$$

Для любого $\varepsilon>0$ выберем такое m, что

$$\sum_{k=m}^{\infty}k^{\frac{1}{p}}\frac{E_k(f)_p}{\psi(k)k}<\varepsilon.$$

Тогда для всех $n>m$

$$\frac{n^{\frac{1}{p}}}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{E_k(f)_p}{\psi(k)}$$

$$=\frac{1}{n^{1-\frac{1}{p}}}\sum_{k=1}^{m}\frac{E_k(f)_p}{\psi(k)}+\sum_{k=m}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{1-\frac{1}{p}}\frac{k^{\frac{1}{p}}E_k(f)_p}{\psi(k)k}\le\frac{c_m}{n^{1-\frac{1}{p}}}+\varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности ε, выводим соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{p}}}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{E_k(f)_p}{\psi(k)}=0,$$

из которого и из неравенства (2.3) и равенства (3.10) получаем (3.11). Из (3.11) и известных свойств модуля непрерывности заключаем, что

$$\omega(f_\beta^\psi,\delta)_p=o(\delta^{\frac{1}{p}}).$$

Это условие согласно теореме Яно [5] гарантирует равномерную сходимость ряда Фурье функции f_β^ψ. Тем самым теорема полностью доказана. □

Литература

[1] А. И. Степанец, *Методы теории приближений Ч. I.*, Киев, Ин-т математики НАН Украины, 2002.

[2] А. И. Степанец, Е. И. Жукина, *Обратные теоремы приближения* (ψ, β)*-дифференцируемых функций* // Укр. мат. журн., **41** (1989), No. 86, 1106–1112.

[3] А. Ф. Тиман, *Теория приближений функций действительного переменного*, М., Физматгиз, 1960.

[4] А. А. Конюшков, *Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье* // Мат. сб., **44** (1958), No. 86, 53–84.

[5] K. Yano, *On Hardy and Littlewood's Theorem* // Proc. Japan Acad., **33** (1957), No. 2, 73–74.

Сведения об авторах

Елена Ивановна Радзиевская

Национальный университет
пищевых технологий,
Киев, Украина
E-Mail: radzlena58@gmail.com