Український математичний вісник
Том 17 **(2020)**, № 1, 95 – 115
https://doi.org/10.37069/1810-3200-2020-17-1-7

# Об оценках в весовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$, $\gamma = \exp(-x^2 - y^2)$, значений различных поперечников классов функций двух переменных

Сергей Б. Вакарчук, Михаил Б. Вакарчук

(*Представлена В. П. Моторным*)

**Аннотация.** Для классов функций двух переменных $W_2(\Omega_{m,\gamma}, \Psi) = \{f \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2) : \Omega_{m,\gamma}(f,t) \leqslant \Psi(t) \, \forall t \in (0,1)\}$, $m \in \mathbb{N}$, где $\Omega_{m,\gamma}$ – обобщенный модуль непрерывности $m$-го порядка, $\Psi$ – мажоранта, найдены оценки сверху и снизу различных поперечников – колмогоровского, бернштейновского, проекционного, гельфандовского, линейного, ортопоперечника – в метрике пространства $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$. Указано условие на мажоранту, при котором удается вычислить точные значения перечисленных экстремальных характеристик оптимизационного содержания. Аналогичная по смыслу задача рассмотрена и для классов $W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma}, \Psi) = L_{2,\gamma}^{r,0}(D, \mathbb{R}^2) \cap W_2^r(\Omega_{m,\gamma}, \Psi)$, $r, m \in \mathbb{N}$, $\big(D = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} - 2x\dfrac{\partial}{\partial x} - 2y\dfrac{\partial}{\partial y}$ – дифференциальный оператор$\big)$, состоящих из функций $f \in L_{2,\gamma}^{r,0}(\mathbb{R}^2)$, коэффициенты Фурье–Эрмита которых $c_{i0}(f) = c_{0j}(f) = c_{00}(f) = 0 \; \forall i, j \in \mathbb{N}$, а $r$-тые итерации $D^r f = D(D^{r-1} f)$ $(D^0 f \equiv f)$ принадлежат пространству $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$ и удовлетворяют неравенству $\Omega_{m,\gamma}(D^r f, t) \leqslant \Psi(t)$ $\forall t \in (0,1)$. На указанных классах найдены оценки (в том числе и точные) верхних граней коэффициентов Фурье–Эрмита. Приведены конкретизации полученных точных результатов и дан ряд комментариев, касающихся их.

**2010 MSC.** 33C45, 33C50, 33D50, 41A10, 41A46, 42C05.

**Ключевые слова и фразы.** Наилучшее приближение функции, полиномы Эрмита, обобщенный модуль непрерывности, поперечник, мажоранта, коэффициенты Фурье–Эрмита.

## 1. Введение

Различные аспекты аппроксимации в среднем на всей вещественной оси $\mathbb{R}$ алгебраическими полиномами с весом Чебышева–Эрмита

*Статья поступила в редакцию* 11.02.2020

исследовались в разное время в работах С. З. Рафальсона, Г. Фройда, В. А. Абилова, В. М. Федорова, Д. В. Алексеева, Х. Н. Мхаскара, З. Дициана, В. Тотика, Ф. В. Абиловой, С. Б. Вакарчука, А. В. Швачко, М. Б. Вакарчука и других (см., например, [1–11]). В двумерном случае задачи подобного содержания изучались, напрмер, В. А. Абиловым, Ф. В. Абиловой, М. Г. Есмаганбетовым, С. Б. Вакарчуком, А. В. Швачко и другими [12–17].

Следует отметить, что при изучении целого рядя задач теории приближения довольно эффективным является подход, связанный с построением различных обобщенных характеристик гладкости. Это позволяет с несколько иных позиций подойти к решению ряда известных проблем, а также на более высоком качественном уровне решать некоторые классические экстремальные задачи теории аппроксимации, имеющие оптимизационные содержание. Так, в случае аппроксимации функций алгебраическими полиномами в этом направлении следует указать, например, работы М. К. Потапова, В. М. Федорова, Д. В. Алексеева, В. А. Абилова и других (см., например, [18–19, 4–5, 8, 12, 14, 20]); в случае приближения $2\pi$-периодических функций – работы Дж. Бомана, Х. С. Шапиро, С. Н. Васильева, А. Г. Бабенко, А. Н. Козко, А. В. Рождественского, К. В. Руновского, С. Б. Вакарчука и других (см., например, [21–28]) и, наконец, в случае аппроксимации функций в среднем на $\mathbb{R}$ целыми функциями экспоненциального типа – статьи С. Н. Васильева, С. Ю. Артамонова, С. Б. Вакарчука [29–35].

Данная работа продолжает указанную тематику, поскольку в ней рассмотрен ряд вопросов, связанных с аппроксимацией функций двух переменных на всей плоскости $\mathbb{R}^2$ алгебраическими полиномами с весом Чебышева–Эрмита, а также получены оценки различных поперечников классов функций, в определении которых участвуют обобщенные характеристики гладкости $\Omega_{m,\gamma}$, $m \in \mathbb{N}$, введенные ранее в [12, 14].

## 2. Необходимые понятия и обозначения

**2.1.** Под $L_2(\mathbb{R}^2)$, где $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) : -\infty < x, y < \infty\}$, понимаем пространство измеримых на плоскости $\mathbb{R}^2$ вещественных функций, суммируемых на $\mathbb{R}^2$ с квадратом. Символом $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$, где $\gamma(x,y) := \exp(-x^2 - y^2)$, обозначим множество функций $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, для которых $\gamma^{1/2} f \in L_2(\mathbb{R}^2)$. Линейное множество $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$ превращается в полное гильбертово пространство с введением в нем скалярного произведения

$$(f,g)_\gamma := \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \gamma(x,y)f(x,y)g(x,y)dxdy;\ f,g \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2),$$

и нормы

$$\|f\|_{2,\gamma} := \|f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)} = (f,f)_\gamma^{1/2}.$$

Рассмотрим в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$ оператор обобщенного сдвига

$$F_h : L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2) \to L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2),\ \ h \in (0,1),$$

имеющий вид [12, 14]

$$F_h f(x,y) := \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x\sqrt{1-h^2}+hu, y\sqrt{1-h^2}+hv)\gamma(u,v)dudv. \quad (2.1)$$

Используя (2.1), запишем для $f \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$ обобщенные конечные разности первого и высших порядков, определенные почти всюду на $\mathbb{R}^2$:

$$\Delta_h(f;x,y) := F_h f(x,y) - f(x,y) = (F_h - \mathbb{I})f(x,y),$$

$$\Delta_h^m(f;x,y) := \Delta_h(\Delta_h^{m-1}(f);x,y) = (F_h - \mathbb{I})^m f(x,y)$$

$$= \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} F_{h,j} f(x,y),\ m = 2,3,...,$$

где $\mathbb{I}$ – единичные оператор в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$; $F_{h,j}f(x,y) := F_h \circ F_h^{j-1} f(x,y)$, $j = \overline{1,m}$, $F_{h,0}f(x,y) \equiv f(x,y)$.

Величину

$$\Omega_{m,\gamma}(f,t) := \sup\{\|\Delta_h^m(f)\|_{2,\gamma} : 0 < h \leqslant t\},\ 0 < t < 1, \qquad (2.2)$$

согласно [8], будем называть обобщенным модулем непрерывности $m$-го порядка функции $f \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$.

**2.2.** Рассмотрим далее дифференциальный оператор [12, 14]

$$D := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2x\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Как и в работе [14], под $L_{2,\gamma}^r(D,\mathbb{R}^2)$, $r \in \mathbb{N}$, понимаем класс, состоящий из функций $f \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$, каждая из которых имеет обобщенные частные производные $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^j}$, где $i + j = k$, $k = \overline{1,2r}$; $i,j \in \mathbb{Z}_+$, принадлежащие пространству $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$. При этом полагаем $D^r f =$

$D(D^{r-1}f)$, где $r \in \mathbb{N}$, и $D^0 f \equiv f$. Очевидно, что для функции $f \in L^r_{2,\gamma}(D, \mathbb{R}^2)$ справедливо включение $D^r f \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$. В случае $r = 0$ под $L^0_{2,\gamma}(D, \mathbb{R}^2)$ будем понимать пространство $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$.

Пусть $\Psi(t)$, $t \in [0, 1]$, есть монотонно возрастающая, непрерывная функция, такая, что $\Psi(0) = 0$. Всюду далее её будем называть мажорантой. Через $W^r_2(\Omega_{m,\gamma}, \Psi)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, обозначим классы, состоящие из функций $f \in L^r_{2,\gamma}(D, \mathbb{R}^2)$, для которых при любом значении $t \in (0, 1)$ выполняется неравенство $\Omega_{m,\gamma}(D^r f, t) \leqslant \Psi(t)$. В случае $r = 0$ полагаем $W_2(\Omega_{m,\gamma}, \Psi) := W^0_2(\Omega_{m,\gamma}, \Psi)$.

Через $\mathcal{P}_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, обозначим подпространство алгебраических полиномов вида

$$p_{n-1}(x, y) := \sum_{i+j=0 (i,j \in \mathbb{Z}_+)}^{n-1} a_{ij} x^i y^j,$$

Отметим, что $\dim \mathcal{P}_{n-1} = n(n + 1)/2$.

Наилучшее приближение функции $f \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$ элементами подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$ в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$ обозначим следующим образом:

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma} := \inf\{\|f - p_{n-1}\|_{2,\gamma} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Для множества $\mathfrak{N} \subset L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$ полагаем

$$E_{n-1}(\mathfrak{N})_{2,\gamma} := \sup\{E_{n-1}(f)_{2,\gamma} : f \in \mathfrak{N}\}.$$

Пусть $\{H_i(x)H_j(y)\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ есть ортонормированная в $\mathbb{R}^2$ с весом $\gamma$ система полиномов Эрмита, где

$$H_k(t) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k! 2^k \sqrt{\pi}}}\ e^{t^2}\ \frac{d^k e^{-t^2}}{dt^k},\ t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+.$$

В смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$ имеет место представление функции $f \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$ в виде двойного ряда Фурье–Эрмита

$$f(x, y) = \sum_{i+j \geqslant 0 (i,j \in Z_+)} c_{ij}(f) H_i(x) H_j(y), \tag{2.3}$$

где

$$c_{ij}(f) = \iint_{\mathbb{R}^2} \gamma(x, y) f(x, y) H_i(x) H_j(y) dx dy \tag{2.4}$$

есть коэффициенты Фурье–Эрмита функции $f$. Символом $S_{n-1}(f)$, $n \in \mathbb{N}$, обозначим треугольную частную сумму $(n - 1)$-го порядка ряда Фурье–Эрмита (2.3) функции $f \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$, т.е.

$$S_{n-1}(f;x,y) := \sum_{i+j=0(i,j\in Z_+)}^{n-1} c_{ij}H_i(x)H_j(y).$$

Отметим [14], что для $f \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$ и $n \in \mathbb{N}$ имеет место следующее соотношение:

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma} = \|f - S_{n-1}(f)\|_{2,\gamma} = \Big\{ \sum_{i+j\geqslant n(i,j\in\mathbb{Z}_+)} c_{ij}^2(f)\Big\}^{1/2}. \qquad (2.5)$$

## 3. Оценки значений поперечников классов функций $W_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi)$ и $W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma},\Psi)$; $r,m \in \mathbb{N}$, в пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$

**3.1.** Напомним определения поперечников, которые будем рассматривать далее. Пусть $\mathbb{B}$ – единичный шар в пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$; $\mathcal{L}_n \subset L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$ – $n$-мерное подпространство; $\mathcal{L}^n \subset L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$ – подпространство коразмерности $n$; $V : L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{L}_n$ есть непрерывный линейный оператор; $V^\perp : L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{L}_n$ есть непрерывный оператор линейного проектирования; $\{v_j\}_{j=1}^n$ – ортонормированная система функций в пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$; $\mathfrak{N}$ – выпуклое центрально-симметричное подмножество из $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$. Тогда величины

$$b_n(\mathfrak{N}; L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)) = \sup\big\{\sup\{\rho > 0 : \rho\mathbb{B} \cap \mathcal{L}_{n+1} \subset \mathfrak{N}\} : \mathcal{L}_{n+1} \subset L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)\big\},$$

$$d_n(\mathfrak{N}; L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2))$$
$$= \inf\big\{\sup\{\inf\{\|f-g\|_{2,\gamma} : g\in\mathcal{L}_n\} : f \in \mathfrak{N}\} : \mathcal{L}_n \subset L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)\big\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{N}; L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2))$$
$$= \inf\big\{\inf\big\{\sup\{\|f - V(f)\|_{2,\gamma} : f \in \mathfrak{N}\} : VL_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{L}_n\big\} : \mathcal{L}_n \subset L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)\big\},$$

$$d^n(\mathfrak{N}; L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)) = \inf\big\{\inf\{\|f\|_{2,\gamma} : f \in \mathfrak{N} \cap \mathcal{L}^n\} : \mathcal{L}^n \subset L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)\big\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{N}; L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2))$$
$$= \inf\big\{\inf\big\{\sup\big\{\|f - V^\perp(f)\|_{2,\gamma} : f\in\mathfrak{N}\big\} : V^\perp L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{L}_n\big\} : \mathcal{L}_n \subset L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)\big\},$$

$$\varphi_n(\mathfrak{N}; L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)) = \inf\Big\{\sup\Big\{\|f - \sum_{j=1}^n (f,v_j)v_j\|_{2,\gamma} : f\in\mathfrak{N}\Big\} : \{v_j\}_{j=1}^n \subset L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)\Big\},$$

называют соответственно бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским и проекционным поперечниками подмножества $\mathfrak{N}$ в пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$, а $\varphi_n$ называют ортопоперечником (или Фурье-поперечником) $\mathfrak{N}$ в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$ (см., например, [36–37]). Так как

$L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$ с введенным в нем скалярным произведением является гильбертовым пространством, то между перечисленными экстремальными характеристиками имеют место следующие соотношения:

$$b_n(\mathfrak{N}; L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)) \leqslant d^n(\mathfrak{N}; L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)) \leqslant d_n(\mathfrak{N}; L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2))$$

$$= \Pi_n(\mathfrak{N}; L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)) = \delta_n(\mathfrak{N}; L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)) = \varphi_n(\mathfrak{N}; L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)). \tag{3.6}$$

**3.2.**

**Теорема 1.** *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$; $k = \overline{0, n}$ и функция $\Psi$ является мажорантой. Тогда имеют место следующие неравенства:*

$$\frac{1}{n^m} \inf_{0<t<1} \frac{(1 + (1 - t^2)^{1/2})^m \Psi(t)}{t^{2m}} \leqslant p_{n(n+1)/2+k}(W_2(\Omega_{m,\gamma}, \Psi); L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2))$$

$$\leqslant E_{n-1}(W_2(\Omega_{m,\gamma}, \Psi))_{2,\gamma} \leqslant \left(\frac{2}{n}\right)^m \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{\Psi(t)}{t^{2m}}, \tag{3.7}$$

*где $p_{n(n+1)/2+k}(W_2(\Omega_{m,\gamma}, \Psi); L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2))$ – любой из рассмотренных выше поперечников.*

*Доказательство.* Пусть $f$ – произвольная функция из класса $W_2(\Omega_{m,\gamma}, \Psi)$. Согласно (2.5) для любого $\nu \in \mathbb{Z}_+$ существует единственное неотрицательное значение $\lambda_{\nu,f}$, зависящее от $f$ и $\nu$, для которого выполняется равенство

$$E_{n-1}^2(f)_{2,\gamma} = \sum_{i+j=n (i,j\in\mathbb{Z}_+)}^{n+\nu} c_{ij}^2(f) + \lambda_{\nu,f}. \tag{3.8}$$

Если функция $f$ не принадлежит $\mathcal{P}_n$ ни при каком $n \in \mathbb{Z}_+$, то из соотношений (2.5) и (3.8) следует, что $\{\lambda_{\nu,f}\}_{\nu\in\mathbb{Z}_+}$ является невозрастающей последовательностью положительных чисел, для которой $\lim\limits_{\nu\to\infty} \lambda_{\nu,f} = 0$. В случае, когда функция $f$ является элементом подпространства $\mathcal{P}_l$, где $l \geqslant n$, и имеет хотя бы один отличный от нуля коэффициент $c_{ij}(f)$ при $x^i y^j$, где $i + j = l$; $i, j \in \mathbb{Z}_+$, то из (3.8) следует, что последовательность неотрицательных чисел $\{\lambda_{\nu,f}\}_{\nu\in\mathbb{Z}_+}$ будет иметь нулевые элементы $\lambda_{\nu,f} = 0$ для всех целых чисел $\nu \geqslant l - n$.

Согласно [14] для обобщенной конечной разности $m$-го порядка функции $f \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$ в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$ имеет место равенство

$$\Delta_h^m(f; x, y) = \sum_{i+j\in\mathbb{N} (i,j\in\mathbb{Z}_+)} c_{ij}(f)\big((1 - h^2)^{(i+j)/2} - 1\big)^m H_i(x) H_j(y),$$

где $m \in \mathbb{N}$, $0 < h < 1$. Следовательно,

$$\|\Delta_h^m(f)\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{i+j\in\mathbb{N}(i,j\in\mathbb{Z}_+)} \Big(1-(1-h^2)^{(i+j)/2}\Big)^{2m} c_{ij}^2(f).$$

Согласно (2.2) отсюда получаем

$$\Omega_{m,\gamma}(f,t) = \Big\{ \sum_{i+j\in\mathbb{N}(i,j\in\mathbb{Z}_+)} \Big(1-(1-t^2)^{(i+j)/2}\Big)^{2m} c_{ij}^2(f)\Big\}^{1/2}. \qquad (3.9)$$

Произвольным образом выберем числовую последовательность $\{\tau_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}_+}$ так, чтобы выполнялись два следующих условия: 1) $\tau_\nu \in (0, 1/(n+\nu)]$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$; 2) последовательность является строго убывающей. Очевидно, что тогда $\lim\limits_{\nu\to\infty} \tau_\nu = 0$.

Для любого значения $\nu \in \mathbb{Z}_+$ с учетом (3.9) имеем

$$\sum_{i+j=n(i,j\in\mathbb{Z}_+)}^{n+\nu} c_{ij}^2(f) = \sum_{i+j=n(i,j\in\mathbb{Z}_+)}^{n+\nu} c_{ij}^2(f) \frac{\big(1-(1-\tau_\nu^2)^{(i+j)/2}\big)^{2m}}{\big(1-(1-\tau_\nu^2)^{(i+j)/2}\big)^{2m}}$$

$$\leqslant \frac{1}{\big(1-(1-\tau_\nu^2)^{n/2}\big)^{2m}} \sum_{i+j=n(i,j\in\mathbb{Z}_+)}^{n+\nu} \big(1-(1-\tau_\nu^2)^{(i+j)/2}\big)^{2m} c_{ij}^2(f)$$

$$\leqslant \frac{\Omega_{m,\gamma}^2(f,\tau_\nu)}{\big(1-(1-\tau_\nu^2)^{n/2}\big)^{2m}}. \qquad (3.10)$$

Тогда из (3.8) и (3.10) получаем

$$E_{n-1}^2(f)_{2,\gamma} \leqslant \frac{\Omega_{m,\gamma}^2(f,\tau_\nu)}{\big(1-(1-\tau_\nu^2)^{n/2}\big)^{2m}} + \lambda_{\nu,f}. \qquad (3.11)$$

Переходя в правой части неравенства (3.11) к верхнему пределу при $\nu \to \infty$, для произвольной функции $f \in W_2(\Omega_{m,\gamma}, \Psi)$ имеем

$$E_{n-1}^2(f)_{2,\gamma} \leqslant \varlimsup_{\nu\to\infty} \Big\{ \frac{\Omega_{m,\gamma}^2(f,\tau_\nu)}{\big(1-(1-\tau_\nu^2)^{n/2}\big)^{2m}} + \lambda_{\nu,f} \Big\}$$

$$\leqslant \varlimsup_{\nu\to\infty} \frac{\Psi^2(\tau_\nu)}{\big(1-(1-\tau_\nu^2)^{n/2}\big)^{2m}} \leqslant \varlimsup_{t\to 0+} \frac{\Psi^2(t)}{\big(1-(1-t^2)^{n/2}\big)^{2m}}. \qquad (3.12)$$

Далее воспользуемся формулой

$$1-\beta^n = (1-\beta)q_n(\beta), \;\; n \in \mathbb{N},$$

где

$$q_n(\beta) := \sum_{j=0}^{n-1} \beta^j. \tag{3.13}$$

Поскольку в нашем случае $\beta = (1-t^2)^{1/2}$, где $0 < t < 1$, то

$$\big(1-(1-t^2)^{n/2}\big)^m = \frac{t^{2m} q_n^m\big((1-t^2)^{1/2}\big)}{(1+(1-t^2)^{1/2})^m}. \tag{3.14}$$

С учетом (3.13) и (3.14) соотношение (3.12) примет вид

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma} \leqslant \Big(\frac{2}{n}\Big)^m \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{\Psi(t)}{t^{2m}}. \tag{3.15}$$

Оценки сверху рассматриваемых экстремальных характеристик класса $W_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi)$ получаем, используя формулы (3.6) и (3.15)

$$p_{n(n+1)/2+k}(W_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi); L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)) \leqslant d_{n(n+1)/2+k}(W_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi); L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2))$$

$$\leqslant d_{n(n+1)/2}(W_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi); L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)) \leqslant E_{n-1}(W_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi))_{2,\gamma}$$

$$\leqslant \Big(\frac{2}{n}\Big)^m \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{\Psi(t)}{t^{2m}}, \tag{3.16}$$

где $p_{n(n+1)/2+k}(W_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi); L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2))$ – любой из рассмотренных ранее поперечников класса $W_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi)$ в пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$.

Перейдем к получению оценок снизу. Для этого рассмотрим в подпространстве алгебраических полиномов $\mathcal{P}_n$, $dim\mathcal{P}_n = (n+1)(n+2)/2$, шар $\sigma_{(n+1)(n+2)/2}(\widehat{\rho}) := \widehat{\rho}\mathbb{B} \cap \mathcal{P}_n = \{p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_{2,\gamma} \leqslant \widehat{\rho}\}$, где

$$\widehat{\rho} := \frac{1}{n^m} \inf_{0<t<1} \frac{(1+(1-t^2)^{1/2})^m \Psi(t)}{t^{2m}}, \tag{3.17}$$

и покажем, что он принадлежит классу $W_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi)$.

Пусть $p_n$ – произвольный полином, принадлежащий $\sigma_{(n+1)(n+2)/2}(\widehat{\rho})$. Тогда, согласно (3.9) и (3.17), (3.13)–(3.14), для любого значения $\tau \in (0,1)$ имеем

$$\Omega_{m,\gamma}(p_n,\tau) = \Big\{ \sum_{i+j=1 (i,j\in\mathbb{Z}_+)}^{n} \big(1-(1-\tau^2)^{(i+j)/2}\big)^{2m} c_{ij}^2(p_n) \Big\}^{1/2}$$

$$\leqslant \big(1-(1-\tau^2)^{n/2}\big)^m \Big\{ \sum_{i+j=1 (i,j\in\mathbb{Z}_+)}^{n} c_{ij}^2(p_n) \Big\}^{1/2} \leqslant \big(1-(1-\tau^2)^{n/2}\big)^m \|p_n\|_{2,\gamma}$$

$$\leqslant \bigl(1-(1-\tau^2)^{n/2}\bigr)^m \frac{1}{n^m} \inf_{0<t<1} \frac{(1+(1-t^2)^{1/2})^m \Psi(t)}{t^{2m}}$$

$$= \frac{\tau^{2m} q_n^m((1-\tau^2)^{1/2})}{(1+(1-\tau^2)^{1/2})^m n^m} \inf_{0<t<1} \frac{(1+(1-t^2)^{1/2})^m \Psi(t)}{t^{2m}}$$

$$\leqslant \frac{\tau^{2m}}{(1+(1-\tau^2)^{1/2})^m} \inf_{0<t<1} \frac{(1+(1-t^2)^{1/2})^m \Psi(t)}{t^{2m}}. \qquad (3.18)$$

Полагая во втором сомножителе правой части соотношения (3.18) $t=\tau$ и используя определение нижней грани числового множества, получаем

$$\Omega_{m,\gamma}(p_n,\tau) \leqslant \Psi(\tau) \quad \forall \tau \in (0,1).$$

Следовательно, $\sigma_{(n+1)(n+2)/2}(\widehat{\rho}) \subset W_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi)$. Тогда для любого $k=\overline{0,n}$, исходя из определения и свойств бернштейновского поперечника, имеем

$$b_{n(n+1)/2+k}(W_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi);L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)) \geqslant b_{n(n+3)/2}(W_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi);L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2))$$

$$\geqslant b_{n(n+3)/2}(\sigma_{(n+1)(n+2)/2}(\widehat{\rho});L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)) \geqslant \widehat{\rho}$$

$$= \frac{1}{n^m} \inf_{0<t<1} \frac{(1+(1-t^2)^{1/2})^m \Psi(t)}{t^{2m}}. \qquad (3.19)$$

Требуемый результат (3.7) получаем из формул (3.16), (3.19) и (3.6). Теорема 1 доказана. □

**Следствие 1.** *Пусть $n,m \in \mathbb{N}$; $k=\overline{0,n}$ и мажоранта $\Psi$ удовлетворяет условию*

$$\inf_{0<t<1} \frac{(1+(1-t^2)^{1/2})^m \Psi(t)}{t^{2m}} = 2^m \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{\Psi(t)}{t^{2m}}. \qquad (3.20)$$

*Тогда справедливы следующие равенства:*

$$p_{n(n+1)/2+k}(W_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi);L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)) = E_{n-1}(W_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi))_{2,\gamma}$$

$$= \left(\frac{2}{n}\right)^m \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{\Psi(t)}{t^{2m}}, \qquad (3.21)$$

*где $p_{n(n+1)/2+k}(W_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi);L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2))$ есть любой из перечисленных ранее поперечников.*

**3.3.** В работе В. А. Абилова и М. В. Абилова [12] было показано, что для коэффициентов Фурье–Эрмита произвольной функции $f \in L_{2,\gamma}^r(D,\mathbb{R}^2)$, $r\in\mathbb{N}$, выполняются равенства

$$c_{ij}(f) = (-1)^r \frac{1}{2^r(i+j)^r} c_{ij}(D^r f); \quad i,j \in \mathbb{N}. \qquad (3.22)$$

Исходя из (3.22), обозначим через $L^{r,0}_{2,\gamma}(D,\mathbb{R}^2)$, $r\in\mathbb{N}$, классы, состоящие из функций $f\in L^{r}_{2,\gamma}(D,\mathbb{R}^2)$, для коэффициентов Фурье–Эрмита которых $c_{i0}(f)=c_{0j}(f)=c_{00}(f)=0$, где $i,j\in\mathbb{N}$ – любые числа.

Пусть $f\in L^{r,0}_{2,\gamma}(D,\mathbb{R}^2)$. Тогда, используя (3.22), запишем

$$D^r f(x,y)=\sum_{i+j\in\mathbb{N}\setminus\{1\}(i,j\in\mathbb{N})} c_{ij}(D^r f)H_i(x)H_j(y)$$

$$=\sum_{i+j\in\mathbb{N}\setminus\{1\}(i,j\in\mathbb{N})}(-1)^r 2^r (i+j)^r c_{ij}(f)H_i(x)H_j(y), \tag{3.23}$$

где равенство понимается в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$.

Из (2.5) и (3.23) для $f\in L^{r,0}_{2,\gamma}(D,\mathbb{R}^2)$ и любого $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ получаем

$$E_{n-1}(D^r f)_{2,\gamma}=2^r\Big\{\sum_{i+j\geqslant n(i,j\in\mathbb{N})}(i+j)^{2r}c^2_{ij}(f)\Big\}^{1/2}.$$

Тогда при $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ для функции $f\in L^{r,0}_{2,\gamma}(D,\mathbb{R}^2)$, с учетом (2.5), (3.22) и последнего равенства, справедливо соотношение

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma}=\Big\{\sum_{i+j\geqslant n(i,j\in\mathbb{N})}c^2_{ij}(f)\Big\}^{1/2}$$

$$\leqslant\frac{1}{(2n)^r}\Big\{\sum_{i+j\geqslant n(i,j\in\mathbb{N})}(2(i+j))^{2r}c^2_{ij}(f)\Big\}^{1/2}$$

$$=\frac{1}{(2n)^r}\Big\{\sum_{i+j\geqslant n(i,j\in\mathbb{N})}c^2_{ij}(D^r f)\Big\}^{1/2}=\frac{1}{(2n)^r}E_{n-1}(D^r f)_{2,\gamma}. \tag{3.24}$$

Исходя из (3.22) и (3.24), рассмотрим классы функций

$$W^{r,0}_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi):=L^{r,0}_{2,\gamma}(D,\mathbb{R}^2)\cap W^r_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi);\quad m,r\in\mathbb{N}.$$

**Теорема 2.** *Пусть $m,r\in\mathbb{N}$; $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$; $k=\overline{0,n}$ и функция $\Psi$ является мажорантой. Тогда имеют место неравенства*

$$\frac{2^{-r}}{n^{m+r}}\inf_{0<t<1}\frac{(1+(1-t^2)^{1/2})^m\Psi(t)}{t^{2m}}\leqslant p_{n(n+1)/2+k}(W^{r,0}_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi);L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2))$$

$$\leqslant E_{n-1}(W^{r,0}_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi))_{2,\gamma}\leqslant\frac{2^{m-r}}{n^{m+r}}\varlimsup_{t\to0+}\frac{\Psi(t)}{t^{2m}}, \tag{3.25}$$

*где $p_{n(n+1)/2+k}(W^{r,0}_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi);L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2))$ – любой из рассмотренных ранее поперечников.*

*Доказательство.* Пусть $f$ является произвольной функцией, принадлежащей классу $W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma},\Psi)$. Из его определения следует, что функция $D^r f$ является элементом класса $W_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi)$, поскольку для любого $t\in(0,1)$ будет справедливо неравенство $\Omega_{m,\gamma}(D^r f,t)\leqslant\Psi(t)$. Тогда, исходя из (3.15), имеем

$$E_{n-1}(D^r f)_{2,\gamma}\leqslant\left(\frac{2}{n}\right)^m\overline{\lim_{t\to0+}}\frac{\Psi(t)}{t^{2m}}. \tag{3.26}$$

Используя (3.24) и (3.26), для произвольной функции $f\in W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma},\Psi)$ запишем

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma}\leqslant\frac{2^{m-r}}{n^{m+r}}\overline{\lim_{t\to0+}}\frac{\Psi(t)}{t^{2m}}. \tag{3.27}$$

Из (3.6) и (3.27) при $k=\overline{0,n}$ получаем следующие оценки сверху:

$$p_{n(n+1)/2+k}(W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma},\Psi);L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2))\leqslant d_{n(n+1)/2}(W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma},\Psi);L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2))$$
$$\leqslant E_{n-1}(W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma},\Psi))_{2,\gamma}\leqslant\frac{2^{m-r}}{n^{m+r}}\overline{\lim_{t\to0+}}\frac{\Psi(t)}{t^{2m}}. \tag{3.28}$$

Перейдем к получению оценок снизу рассматриваемых экстремальных характеристик оптимизационного содержания класса $W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma},\Psi)$ в метрике пространства $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$. Исходя из определения и свойств бернштейновского поперечника, при $k=\overline{0,n}$, где $n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$, имеем

$$b_{n(n+1)/2+k}(W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma},\Psi);L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2))\geqslant b_{n(n+3)/2}(W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma},\Psi);L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2))$$
$$\geqslant\sup\{\rho\mathbb{B}\cap\mathcal{P}_n\subset W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma},\Psi):\rho>0\}. \tag{3.29}$$

Далее полагаем $\mathbb{B}_0:=\{f\in\mathbb{B}:c_{i0}(f)=c_{0j}(f)=c_{00}(f)=0\ \forall i,j\in\mathbb{N}\}$. Тогда $\rho\mathbb{B}_0\cap\mathcal{P}_n=\{p_n\in\mathcal{P}_n:c_{i0}(p_n)=c_{0j}(p_n)=c_{00}(p_n)=0;\ i,j=\overline{1,n},\ \|p_n\|_{2,\gamma}\leqslant\rho\}$. С учетом этого из (3.29) при $n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$ получаем

$$b_{n(n+3)/2}(W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma},\Psi);L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2))$$
$$\geqslant\sup\{\rho\mathbb{B}_0\cap\mathcal{P}_n\subset W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma},\Psi):\rho>0\}. \tag{3.30}$$

Обозначим

$$\widetilde{\rho}:=\frac{2^{-r}}{n^{m+r}}\inf_{0<t<1}\frac{((1+(1-t^2)^{1/2})^m\Psi(t)}{t^{2m}} \tag{3.31}$$

и $\widetilde{\sigma}^0_{(n+1)(n+2)/2}(\widetilde{\rho}):=\widetilde{\rho}\mathbb{B}_0\cap\mathcal{P}_n$ и покажем, что это множество принадлежит классу $W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma},\Psi)$. Поскольку для произвольного полинома $p_n$ принадлежащего $\widetilde{\sigma}^0_{(n+1)(n+2)/2}(\widetilde{\rho})$, с учетом (3.22) имеем

$$D^r p_n(x,y)=\sum_{i+j=2(i,j\in\mathbb{N})}^{n}c_{ij}(D^r p_n)H_i(x)H_j(y)$$

$$= \sum_{i+j=2(i,j\in\mathbb{N})}^{n} (-1)^r (2(i+j))^r c_{ij}(p_n) H_i(x) H_j(y), \ \ n \in \mathbb{N}\backslash\{1\},$$

то в силу (3.31) получаем

$$\|D^r p_n\|_{2,\gamma} = 2^r \Big\{ \sum_{i+j=2(i,j\in\mathbb{N})}^{n} (i+j)^{2r} c_{ij}^2(p_n) \Big\}^{1/2}$$

$$\leqslant (2n)^r \Big\{ \sum_{i+j=2(i,j\in\mathbb{N})}^{n} c_{ij}^2(p_n) \Big\}^{1/2} = (2n)^r \|p_n\|_{2,\gamma}$$

$$\leqslant (2n)^r \widetilde{\rho} = \frac{1}{n^m} \inf_{0<t<1} \frac{(1+(1-t^2)^{1/2})^m \Psi(t)}{t^{2m}}, \ n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}. \tag{3.32}$$

Для произвольного элемента $p_n \in \widetilde{\sigma}^0_{(n+1)(n+2)/2}(\widetilde{\rho})$ и любого $\tau \in (0,1)$ на основании (3.9), (3.32) и (3.13)–(3.14) запишем

$$\Omega_{m,\gamma}(D^r p_n, \tau) = \Big\{ \sum_{i+j=2(i,j\in\mathbb{N})}^{n} (1-(1-\tau^2)^{(i+j)/2})^{2m} c_{ij}^2(D^r p_n) \Big\}^{1/2}$$

$$\leqslant (1-(1-\tau^2)^{n/2})^m \Big\{ \sum_{i+j=2(i,j\in\mathbb{N})}^{n} c_{ij}^2(D^r p_n) \Big\}^{1/2}$$

$$= (1-(1-\tau^2)^{n/2})^m \|D^r p_n\|_{2,\gamma}$$

$$\leqslant (1-(1-\tau^2)^{n/2})^m \frac{1}{n^m} \inf_{0<t<1} \frac{(1+(1-t^2)^{1/2})^m \Psi(t)}{t^{2m}}$$

$$\leqslant \frac{\tau^{2m}}{(1+(1-\tau^2)^{n/2})^m} \inf_{0<t<1} \frac{(1+(1-t^2)^{1/2})^m \Psi(t)}{t^{2m}}, \ n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}. \tag{3.33}$$

Полагая во втором сомножителе правой части соотношения (3.33) $t = \tau$, для любого значения $\tau \in (0,1)$ имеем $\Omega_{m,\gamma}(D^r p_n, \tau) \leqslant \Psi(\tau)$. Следовательно, $\widetilde{\sigma}^0_{(n+1)(n+2)/2}(\widetilde{\rho}) \subset W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma}, \Psi)$. Учитывая данный факт, из (3.30) имеем

$$b_{n(n+3)/2}(W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma}, \Psi); L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)) \geqslant \widetilde{\rho}. \tag{3.34}$$

Используя (3.6), свойства бернштейновского поперечника и (3.31), (3.34), для $k = \overline{0,n}$, где $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, запишем

$$p_{n(n+1)/2+k}(W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma}, \Psi); L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2))$$

$$\geqslant b_{n(n+1)/2+k}(W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma}, \Psi); L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2))$$

$$\geqslant b_{n(n+3)/2}(W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma},\Psi);L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2))$$
$$\geqslant \frac{2^{-r}}{n^{m+r}}\inf_{0<t<1}\frac{(1+(1-t^2)^{1/2})^m\Psi(t)}{t^{2m}}. \tag{3.35}$$

Требуемое соотношение (3.25) получаем из (3.28) и (3.35). Теорема 2 доказана. □

**Следствие 2.** *Если* $m,r\in\mathbb{N}$*;* $n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$*;* $k=\overline{0,n}$ *и мажоранта* $\Psi$ *удовлетворяет условию* (3.20)*, то справедливы равенства*

$$p_{n(n+1)/2+k}(W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma},\Psi);L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2))=E_{n-1}(W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma},\Psi))_{2,\gamma}$$
$$=\frac{2^{m-r}}{n^{m+r}}\overline{\lim_{t\to0+}}\frac{\Psi(t)}{t^{2m}}, \tag{3.36}$$

*где* $p_{n(n+1)/2+k}(W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma},\Psi);L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2))$ *– любой из рассмотренных ранее поперечников.*

## 4. Вычисление на классах функций $W_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi)$ и $W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma},\Psi)$, $r,m\in\mathbb{N}$, верхних граней коэффициентов Фурье–Эрмита

В 1910 году Лебег впервые ввел в рассмотрение модуль непрерывности для $2\pi$-периодических функций и в терминах этой характеристики гладкости получил оценки сверху их коэффициентов Фурье [38]. Вопросы вычисления верхних граней коэффициентов Фурье на различных классах $2\pi$-периодических функций в последующем рассматривались, например, в работах А. В. Ефимова, Н. П. Корнейчука, А. Ф. Тимана, С. А. Теляковского, В. И. Бердышева и многих других.

В случае аппроксимации непериодических функций одного переменного классическими ортогональными полиномами с весом поведение коэффициентов Фурье на ряде классов функций изучалось в работах В. А. Абилова, Б. А. Халиловой и других (см., например, [11, 39, 40]). С нашей точки зрения данный вопрос представляет определенный интерес и для функций двух переменных.

**Теорема 3.** *Пусть* $n,m\in\mathbb{N}$*, функция* $\Psi$ *– мажоранта и* $i+j=n$*, где* $i,j\in\mathbb{Z}_+$*. Тогда имеют место неравенства*

$$\frac{1}{n^m}\inf_{0<t<1}\frac{(1+(1-t^2)^{1/2})^m\Psi(t)}{t^{2m}}\leqslant\sup_{f\in W_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi)}c_{ij}(f)$$
$$\leqslant\left(\frac{2}{n}\right)^m\overline{\lim_{t\to0+}}\frac{\Psi(t)}{t^{2m}}. \tag{4.37}$$

*Доказательство.* Из формул (2.5) и (3.7) для любых $i,j\in\mathbb{Z}_+$ таких, что $i+j=n$, $n\in\mathbb{N}$, получаем оценку сверху

$$\sup_{f\in W_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi)} c_{ij}(f)\leqslant E_{n-1}(W_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi))_{2,\gamma}\leqslant\left(\frac{2}{n}\right)^m\overline{\lim_{t\to0+}}\frac{\Psi(t)}{t^{2m}}. \quad (4.38)$$

Для получения оценки снизу рассматриваемой экстремальной характеристики воспользуемся функцией $\widehat{f}(x,y):=\widehat{\rho}H_1(x)H_{n-1}(y)$, где величина $\widehat{\rho}$ определена формулой (3.17). Поскольку $\widehat{f}\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$ и

$$\|\widehat{f}\|_{2,\gamma}=\widehat{\rho}\|H_1(x)H_{n-1}(y)\|_{2,\gamma}=\widehat{\rho},$$

то функция $\widehat{f}$ является элементом множества $\sigma_{(n+1)(n+2)/2}(\widehat{\rho})$, определенного в ходе доказательства теоремы 1. Учитывая, что $\sigma_{(n+1)(n+2)/2}(\widehat{\rho})$ принадлежит классу $W_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi)$ и используя формулу (3.17), для $i,j\in\mathbb{Z}_+$, где $i+j=n$, $n\in\mathbb{N}$, запишем оценку снизу

$$\sup_{f\in W_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi)} c_{ij}(f)\geqslant c_{1,n-1}(\widehat{f})=\widehat{\rho}$$

$$=\frac{1}{n^m}\inf_{0<t<1}\frac{(1+(1-t^2)^{1/2})^m\Psi(t)}{t^{2m}}. \quad (4.39)$$

Требуемый результат (4.37) получаем из соотношений (4.38) и (4.39), чем и завершаем доказательство теоремы 3. □

**Следствие 3.** *Если $n,m\in\mathbb{N}$; $i+j=n$, где $i,j\in\mathbb{Z}_+$, и мажоранта $\Psi$ удовлетворяет условию* (3.20), *то выполняется равенство*

$$\sup_{f\in W_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi)} c_{ij}(f)=\left(\frac{2}{n}\right)^m\overline{\lim_{t\to0+}}\frac{\Psi(t)}{t^{2m}}. \quad (4.40)$$

**Теорема 4.** *Пусть $m,r\in\mathbb{N}$; $n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$, функция $\Psi$ – мажоранта и $i+j=n$, где $i,j\in\mathbb{N}$. Тогда выполняются следующие соотношения:*

$$\frac{2^{-r}}{n^{m+r}}\inf_{0<t<1}\frac{(1+(1-t^2)^{1/2})^m\Psi(t)}{t^{2m}}\leqslant\sup_{f\in W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma},\Psi)} c_{ij}(f)$$

$$\leqslant\frac{2^{m-r}}{n^{m+r}}\overline{\lim_{t\to0+}}\frac{\Psi(t)}{t^{2m}}.$$

Доказательство данной теоремы не приводится, поскольку оно практически дословно повторяет рассуждения теоремы 3 с той лишь разницей, что при получении оценки сверху используется соотношение (3.25), а при нахождении оценки снизу – функция $\widetilde{f}(x,y):=\widetilde{\rho}H_1(x)H_{n-1}(y)$, $n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$, где величина $\widetilde{\rho}$ определяется формулой (3.31).

**Следствие 4.** *Если $m, r \in \mathbb{N}$; $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$; $i + j = n$, где $i, j \in \mathbb{N}$, и мажоранта $\Psi$ удовлетворяет условию (3.20), то выполняется равенство*

$$\sup_{f \in W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma},\Psi)} c_{ij}(f) = \frac{2^{m-r}}{n^{m+r}} \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{\Psi(t)}{t^{2m}}. \tag{4.41}$$

## 5. Примеры конкретизации полученных точных результатов

Символом $\widetilde{C}_+([0,1])$ обозначим класс непрерывных на отрезке [0,1] функций, которые являются неубывающими и принимают на указанном точечном множестве только положительные значения. Для произвольного класса $\mathfrak{N} \subset L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$ под $p_m(\mathfrak{N}; L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2))$, $m \in \mathbb{N}$, понимаем любой из перечисленных ранее поперечников.

**5.1.** Рассмотрим семейство мажорант

$$\Psi_{0,m}(\eta, t) := \frac{t^{2m}\eta(t)}{(1 + (1-t^2)^{1/2})^m},$$

где $m \in \mathbb{N}, \eta \in \widetilde{C}_+([0,1])$. Очевидно, что в данном случае условие (3.20) выполняется, так как

$$\inf_{0<t<1} \frac{(1+(1-t^2)^{1/2})^m \Psi_{0,m}(\eta,t)}{t^{2m}} = 2^m \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{\Psi_{0,m}(\eta,t)}{t^{2m}} = \eta(0). \tag{5.42}$$

Исходя из (3.21), (4.40) и (5.42), для $n, m \in \mathbb{N}$, $k = \overline{0, n}$; $i + j = n$, где $i, j \in \mathbb{Z}_+$, получаем

$$p_{n(n+1)/2+k}(W_2(\Omega_{m,\gamma}, \Psi_{0,m}(\eta)); L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)) = E_{n-1}(W_2(\Omega_{m,\gamma}, \Psi_{0,m}(\eta)))_{2,\gamma}$$

$$= \sup_{f\in W_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi_{0,m}(\eta))} c_{ij}(f) = \frac{1}{n^m}\eta(0).$$

Если же $m, r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $k = \overline{0, n}$; $i+j = n$, где $i, j \in \mathbb{N}$, то в силу (3.36), (4.41) и (5.42) запишем

$$p_{n(n+1)/2+k}(W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma}, \Psi_{0,m}(\eta)); L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2))$$

$$= E_{n-1}(W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma}, \Psi_{0,m}(\eta)))_{2,\gamma}$$

$$= \sup_{f\in W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma},\Psi_{0,m}(\eta))} c_{ij}(f) = \frac{2^{-r}}{n^{m+r}}\ \eta(0).$$

**5.2.** Далее рассмотрим семейство мажорант

$$\Psi_{1,m}(\eta, t) := \Big(\frac{(1+t^2)^m - 1}{1 + (1-t^2)^{1/2}}\Big)^m \eta(t),$$

где $m \in \mathbb{N}$, $\eta \in \widetilde{C}_+([0,1])$. В данном случае условие (3.20) также выполняется, поскольку

$$\inf_{0<t<1} \frac{(1+(1-t^2)^{1/2})^m \Psi_{1,m}(\eta,t)}{t^{2m}} = 2^m \varlimsup_{t\to 0+} \frac{\Psi_{1,m}(\eta,t)}{t^{2m}} = m^m \eta(0). \tag{5.43}$$

Тогда, используя (3.21), (4.40) и (5.43), для $n, m \in \mathbb{N}$, $k = \overline{0,n}$; $i+j = n$, где $i,j \in \mathbb{Z}_+$, имеем

$$p_{n(n+1)/2+k}(W_2(\Omega_{m,\gamma}, \Psi_{1,m}(\eta)); L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)) = E_{n-1}(W_2(\Omega_{m,\gamma}, \Psi_{1,m}(\eta)))_{2,\gamma}$$

$$= \sup_{f\in W_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi_{1,m}(\eta))} c_{ij}(f) = \Big(\frac{m}{n}\Big)^m \eta(0).$$

В случае $m, r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $k = \overline{0,n}$; $i+j = n$, где $i,j \in \mathbb{N}$, из (3.36), (4.41) и (5.43) получаем

$$p_{n(n+1)/2+k}(W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma}, \Psi_{1,m}(\eta)); L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2))$$

$$= E_{n-1}(W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma}, \Psi_{1,m}(\eta)))_{2,\gamma}$$

$$= \sup_{f\in W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma},\Psi_{1,m}(\eta))} c_{ij}(f) = \frac{2^{-r} m^m}{n^{m+r}}\, \eta(0).$$

**5.3.** Рассмотрим еще одно из возможных семейств мажорант

$$\Psi_{2,m}(\eta,t) := \Big(\frac{(a^t-1)^2}{1+(1-t^2)^{1/2}}\Big)^m \eta(t),$$

где $m \in \mathbb{N}$, константа $a \in (1,\infty)$ и функция $\eta \in \widetilde{C}_+([0,1])$. Так как и в данном случае условие (3.20) имеет место, а именно

$$\inf_{0<t<1} \frac{(1+(1-t^2)^{1/2})^m \Psi_{2,m}(\eta,t)}{t^{2m}} = 2^m \varlimsup_{t\to 0+} \frac{\Psi_{2,m}(\eta,t)}{t^{2m}} = \eta(0)\ln^{2m}(a),$$

то, используя необходимые соотношения из пунктов 3.2, 3.3 и 4, несложно получить точные значения рассмотренных в пункте 3.1 поперечников классов функций $W_2(\Omega_{m,\gamma}, \Psi_{2,m}(\eta))$ и $W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma}, \Psi_{2,m}(\eta))$, где $r, m \in \mathbb{N}$, а также записать точные значения коэффициентов Фурье–Эрмита для указанных классов.

## 6. Несколько комментариев по ходу статьи

В заключение статьи укажем ряд, с нашей точки зрения, важных моментов, связанных с решаемой нами задачей.

**6.1.** Соотношение (3.24), необходимое для нахождения оценок сверху и снизу в теореме 2, справедливо лишь на классах $L_{2,\gamma}^{r,0}(D,\mathbb{R}^2)$, $r\in\mathbb{N}$, и получено с помощью (3.22).

Отметим, что равенства (3.22), ранее доказанные В. А. Абиловым и М. В. Абиловым в работе [12], справедливы только при $i,j\in\mathbb{N}$, а для коэффициентов Фурье–Эрмита $c_{i0}(f)$ и $c_{0j}(f)$, где $i,j\in\mathbb{N}$ и $f\in L_{2,\gamma}^{r}(D,\mathbb{R}^2)$, $r\in\mathbb{N}$, они не имеют места. В связи с этим для $f\in L_{2,\gamma}^{r}(D,\mathbb{R}^2)$, $r\in\mathbb{N}$, не удается оценить сверху величины $E_{n-1}(f)_{2,\gamma}$, $n\in\mathbb{N}$, представленные в виде (2.5), через $E_{n-1}(D^rf)_{2,\gamma}$ (как это было сделано для $f\in L_{2,\gamma}^{r,0}(D,\mathbb{R}^2)$ в пункте 3.3), поскольку формула (2.5), в частности, содержит слагаемые $c_{i0}^2(f)$ и $c_{0j}^2(f)$, где натуральные числа $i\geqslant n$, $j\geqslant n$.

Исходя из сказанного, были рассмотрены более узкие, чем $W_2^r(\Omega_{m,\gamma},\Psi)$, классы функций $W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma},\Psi) := L_{2,\gamma}^{r,0}(D,\mathbb{R}^2)\cap W_2^r(\Omega_{m,\gamma},\Psi)$ и для них сформулированы теорема 2 и следствие 2 из неё.

**6.2.** Определенный интерес представляет сравнение полученных нами результатов (3.21) и (3.36), связанных с вычислением точных значений различных поперечников в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$, с основным результатом статьи М. Г. Есмаганбетова [14] (теорема 2).

**6.2.1.** Так, если мажоранта $\Psi$ удовлетворяет условию (3.20), то при $m,r\in\mathbb{N}$, $k=\overline{0,n}$ и $n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$ для рассматриваемых здесь поперечников классов $W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma},\Psi)$ найдены их точные значения (3.36). Ранее, в пункте 2.2, были рассмотрены классы $W_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi)$, $m\in\mathbb{N}$, для которых при любых $n\in\mathbb{N}$ и $k=\overline{0,n}$ вычислены точные значения поперечников, если мажоранта $\Psi$ удовлетворяет тому же условию (3.20).

Исходя из изложенного в пункте 3.3, под $W_2^{0,0}(\Omega_{m,\gamma},\Psi)$, $m\in\mathbb{N}$, будем понимать классы функций $L_{2,\gamma}^{0}(\mathbb{R}^2)\cap W_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi)$. Очевидно, что класс $W_2^{0,0}(\Omega_{m,\gamma},\Psi)$ принадлежит $W_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi)$, $m\in\mathbb{N}$. Исходя из проведенных в пунктах 3.2 и 3.3 рассуждений, можно убедиться в том, что равенство (3.36) имеет место и в случае $r=0$, т.е для классов $W_2^{0,0}(\Omega_{m,\gamma},\Psi)$, но уже при всех значениях $n\in\mathbb{N}$.

**6.2.2.** Используя введенные ранее обозначения, запишем классы функций, рассмотренные в [14], а именно $W_2^r(\Omega_{m,\gamma},\Psi;t) := \{f\in L_{2,\gamma}^{r}(D,\mathbb{R}^2) : \Omega_{m,\gamma}(D^rf,t)\leqslant\Psi(t)\}$, где $t\in(0,1)$ есть произвольная фиксированная точка, $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $\Psi$ – мажоранта.

Очевидно, что введенные в пункте 3.3 классы $W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma},\Psi)$, $m,r\in\mathbb{N}$, намного уже, чем $W_2^r(\Omega_{m,\gamma},\Psi;t)$, поскольку, в частности, в нашем случае выполнение неравенства $\Omega_{m,\gamma}(D^rf,t)\leqslant\Psi(t)$ требуется не в какой-то отдельно взятой точке $t\in(0,1)$, а для всех значений аргумента $0 < t < 1$. Именно этим фактом, в отличие от [14], и объясняется появление условия (3.20) на мажоранту $\Psi$, без выполнения которого невозможно найти точные значения различных поперечников рассматриваемых классов.

**6.2.3.** И, наконец, основной результат [14], с использованием предложенной нами символики, можно представить следующим образом:

$$p_{n(n+1)/2+k}(W_2^r(\Omega_{m,\gamma},\Psi;t);L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)) = \frac{\Psi(t)}{(2n)^r(1-(1-t^2)^{n/2})^m}, \tag{6.44}$$

где $n,m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $k = \overline{0,n}$, а $p_{n(n+1)/2+k}(W_2^r(\Omega_{m,\gamma},\Psi;t);L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2))$ есть любой из поперечников, перечисленных в пункте 3.1.

Однако, при $r \in \mathbb{N}$, в силу пункта 6.1 и из приведенных в [14] схем доказательств теорем 1 (вспомогательной) и 2 (основной), равенство (6.44) будет иметь место при любом значении $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ лишь в более "узком" случае, а именно для классов $W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma},\Psi;t) := L_{2,\gamma}^{r,0}(D,\mathbb{R}^2) \cap W_2^r(\Omega_{m,\gamma},\Psi;t)$, $m \in \mathbb{N}$, а не для $W_2^r(\Omega_{m,\gamma},\Psi;t)$.

## Литература


[1] Рафальсон, С.З. (1968). О приближении функций в среднем суммами Фурье–Эрмита. *Изв. вузов. Матем., 7*, 78-84.

[2] Фройд, Г. (1970). Об аппроксимации с весом алгебраическими многочленами на действительной оси. *Докл. АН СССР, 191*(2), 293-294.

[3] Абилов, В.А. (1972). О порядке приближения непрерывных функций арифметическими средними частных сумм ряда Фурье–Эрмита. *Изв. вузов. Матем., 3*, 3-9.

[4] Федоров, В.М. (1984). Приближение алгебраическими многочленами с весом Чебышева–Эрмита. *Изв. вузов. Матем., 6*, 55-63.

[5] Алексеев, Д.В. (1997). Приближение полиномами с весом Чебышева – Эрмита на действительной оси. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 6*, 68-71.

[6] Mhaskar, H.N. (1986). Weighted polynimial approximation. *J. Approx. Theory, 46*(1), 100-110.

[7] Ditzian, Z., Totik, V. (1986). K-functionals and best polynomial approximation in weighted space $L^p(\mathbb{R})$. *J. Approx. Theory, 46*(1), 38-41.

[8] Abilov, V.A., Abilova, F.V. (2006). Some problems of the approximation of functions by Fourier–Hermite sums in the space $L_2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$. *Russian Math., 50*(1), 1–10.

[9] Vakarchuk, S.B., Shvachko, A.V. (2014). On the best approximation in the mean by algebraic polynomials with weight and the exact values of widths for the classes of functions. *Ukr. Math. J., 65*(12), 1774-1792.

[10] Вакарчук, С.Б., Вакарчук, М.Б. (2011). О приближении функций алгебраическими полиномами в среднем на вещественной оси с весом Чебышева–Эрмита. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Сер. Матем., 19, 6/1*(16), 28-31.

[11] Vakarchuk, S.B. (2014). Mean approximation of functions on the real axis by algebraic polynomials with Chebyhev–Hermite weight and widths of function classes. *Math. Notes, 95*(5-6), 599-614.

[12] Abilov, V.A., Abilov, M.V. (1995). Approximation of functions in the space $L_2(\mathbb{R}^N; \exp(-|x|^2))$. *Math. Notes, 57*(1), 3-14.

[13] Abilov, V.A., Abilova, F.V. (2001). On the convergence of multiple Fourier–Hermite series. *Comput. Math. Math.Phys., 41*(11), 1557-1577.

[14] Esmaganbetov, M.G. (2007). Exact Jackson-Stechkin inequalities and diameters of classes of functions from $L_2(R^2, e^{-x^2-y^2})$. *Russian Math., 51*(2), 1-7.

[15] Вакарчук, С.Б., Вакарчук, М.Б. (2014). Точные неравенства типа Джексона в весовом пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Сер. Матем., 22, 6/1*(19), 17-23.

[16] Vakarchuk, S.B., Shvachko, A.V. (2015). Kolmogorov-type inequalities for derived functions of two variables with application for approximation by an "angle". *Russian Math., 59*(11), 3-22.

[17] Джурахонов, О.А. (2016). Некоторые экстремальные задачи приближения функций двух переменных суммами Фурье–Эрмита в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$. *Изв. АН Респ. Тадж., 165*(4), 15-24.

[18] Потапов, М.К. (2005). О взаимосвязи обобщенных модулей гладкости дифференцируемых функций с их наилучшими приближениями алгебраическими многочленами. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 6*, 10-17.

[19] Потапов, М.К., Бериша, Ф.М. (2007). О связи между наилучшими приближениями алгебраическими многочленами и $r$-тым обобщенным модулем гладкости. *Современ. матем. Фундамент. направления, 25*, 149-164.

[20] Boman, J., Shapiro, H.S. (1971). Comparison theorems for a generalized modulus of continuity. *Ark. Math., 9*(1), 91-116.

[21] Vasil'ev, S.N. (2002). Sharp Jackson-Stechkin inequality in $L_2$ with the modulus of continuity generated by an arbitrary finite-difference operator with constant coefficients. Doklady Mathematics, 66(1), 5-8.

[22] Бабенко, А.Г. (2001). О неравенстве Джексона–Стечкина для наилучших $L^2$-приближений функций тригонометрическими полиномами. Теория приближ. *Труды ИММ УрО РАН, 7*(1), 30-46.

[23] Kozko, A.I., Rozhdestvenskii, A.V. (2004). On Jackson's inequality for generalized modulus of continuity in $L_2$. *Sb. Math., 19*5(8), 1073-1115.

[24] Runovski, K.V. (2014). A direct theorem of approximation theory for a general modulus of smoothness. *Math. Notes, 95*(6), 833-842.

[25] Vakarchuk, S.B. (2015). Generalized smoothness sharacteristics in Jackson-type inequalities and widths of classes of functions in $L_2$. *Math. Notes, 98*(4), 572-588.

[26] Vakarchuk, S.B. (2016).Jackson-type inequalities with generalized modulus of continuity and exact values of the n-widths for the classes of $(\psi, \beta)$-differentiable functions in $L_2$. I. *Ukr. Math. J., 68*(6), 823-848.

[27] Vakarchuk, S.B. (2017). Jackson-type inequalities with generalized modulus of continuity and exact values of the n-widths for the classes of $(\psi, \beta)$-differentiable functions in $L_2$. II. *Ukr. Math. J., 68*(8), 1165-1183.

[28] Vakarchuk, S.B. (2017). Widths of some classes of functions defined by the generalized moduli of continuity $\omega_\gamma$ in the space $L_2$. *J. of Math. Sci. (N.Y.), 227*(1), 105-115.

[29] Васильев, С.Н. (2010). Неравенство Джексона в $L_2(\mathbb{R}^N)$ с обобщенным модулем непрерывности. *Труды ИММ УрО РАН, 16*(4), 93-99.

[30] Artamonov, S.Yu. (2016). Nonperiodic modulus of smoothness corresponding to the Riesz derivative. *Math. Notes, 99*(6), 928-931.

[31] Vakarchuk, S.B. (2013). On some extremal problems of approximation theory of functions on the real axis. I. *J. Math. Sci. (N.Y.), 188*(2), 146-166.

[32] Vakarchuk, S.B. (2013). On some extremal problems of approximation theory of functions on the real axis. II. *J. Math. Sci. (N.Y.), 190*(4), 613-630.

[33] Vakarchuk, S.B. (2019). Generalized characteristics of smoothness and some extreme problems of the approximation theory of functions in the space $L_2(\mathbb{R})$. I. *Ukr. Math. J., 70*(9), 1345-1374.

[34] Vakarchuk, S.B. (2019). Generalized characteristics of smoothness and some extreme problems of the approximation theory of functions in the space $L_2(\mathbb{R})$. II. *Ukr. Math. J., 70*(10), 1550-1584.

[35] Vakarchuk, S.B. (2019). On estimates in $L_2(\mathbb{R})$ of mean $\nu$-widths of classes of functions defined via the generalized modulus of continuity of $\omega_{\mathcal{M}}$. *Math. Notes, 106*(2), 191-202.

[36] Тихомиров, В.М. (1974). *Некоторые вопросы теории приближений.* М. : Моск.ун-т.

[37] Романюк, А.С. (2012). *Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных.* Киев : Ин-т матем. НАН Украины.

[38] Lebesque, H. (1910). Sur la representation trigonometrique approchee des fonctions satisfaisant a une condition de Lipschitz. *Bull. Soc. Math. France, 38*, 184-210.

[39] Абилов, В.А. (1969). О коэффициентах ряда Фурье – Эрмита непрерывных функций. *Изв. вузов. Матем., 12*, 3-8.

[40] Халилова, Б.А. (1973). О коэффициентах Фурье–Якоби и о приближении функций ультрасферическими многочленами. *Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-тех. и матем.наук, 2*, 87-94.

## Сведения об авторах

**Сергей Борисович Вакарчук**
Университет имени Альфреда Нобеля,
Днепр, Украина
*E-Mail:* `sbvakarchuk@gmail.com`

**Михаил Борисович Вакарчук**
Днепровский национальный университет имени Олеся Гончара,
Днепр, Украина
*E-Mail:* `mihailvakarchuk@gmail.com`