Український математичний вісник
Том 17 **(2020)**, № 3, 414 – 436
https://doi.org/10.37069/1810-3200-2020-17-3-7

Про негомеоморфні відображення з оберненою нерівністю Полецького

Євген О. Севостьянов, Сергій О. Скворцов,
Олександр П. Довгопятий

(Представлена В. Я. Гутлянським)

Анотація. Досліджена локальна і межова поведінка відображень з розгалуженням, які задовольняють обернену нерівність типу Полецького. Доведено, що відображення такого типу є логарифмічно гельдеровими за умови, що функція Q, яка відповідає за спотворення модуля сімей кривих, є інтегровною. Отримане неперервне продовження вказаних відображень на межу. Крім того, досліджені умови, за яких сім'ї вказаних відображень є одностайно неперервними всередині і на межі області.

2010 MSC. 30C65, 31B15, 30C62, 30L10.

Ключові слова та фрази. Відображення з обмеженим і скінченним спотворенням, локальна і межова поведінка відображень, нерівність Полецького.

1. Вступ

Дану роботу присвячено вивченню відображень з обмеженим і скінченним спотворенням, які активно вивчаються останнім часом (див., напр., [1–18]).

Добре відомо, що відображення з обмеженим спотворенням (квазірегулярні відображення) задовольняють в своїй області визначення відношення виду

$$M(\Gamma) \leqslant N(f, A) \cdot K \cdot M(f(\Gamma))\,, \tag{1.1}$$

де M – модуль сім'ї кривих Γ в області D,

$$N(y, f, A) \,=\, \text{card}\,\{x \in A : f(x) = y\}\;, \qquad N(f, A) \,=\, \sup_{y\in\mathbb{R}^n} N(y, f, A)\,,$$

Стаття надійшла в редакцію 03.01.2020

A – довільна борелівська множина в D, а $K \geqslant 1$ – деяка стала, яка може бути обчислена як

$$K = \operatorname{ess\,sup} K_O(x, f)\,,$$

де $K_O(x,f) = \|f'(x)\|^n / J(x,f)$ при $J(x,f) \neq 0$; $K_O(x,f) = 1$ при $f'(x) = 0$, і $K_O(x,f) = \infty$ при $f'(x) \neq 0$, але $J(x,f) = 0$ (див., напр., [8, теорема 3.2] або [14, теорема 6.7.II]). Дещо аналогічне виконується і для відображень, зовнішня дилатація яких може бути необмежена. Наприклад, для так званих відображень зі скінченим спотворенням довжини встановленні оцінки виду

$$M(\Gamma) \leq \int\limits_{f(E)} K_I\left(y, f^{-1}, E\right) \cdot \rho_*^n(y)\, dm(y)\,, \tag{1.2}$$

де E – довільна вимірна підмножина області D, Γ – довільна сім'я кривих в E і $\rho_*(y) \in \operatorname{adm} f(\Gamma)$ (див., напр., [11, теорема 8.5]). В даній роботі основним об'єктом вивчення є відображення, які задовольняють деяку більш загальну нерівність у порівнянні з (1.2). Звернемося до означень. Нехай $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$ і

$$A = A(y_0, r_1, r_2) = \{y \in \mathbb{R}^n : r_1 < |y - y_0| < r_2\}\,. \tag{1.3}$$

Для заданих множин E, $F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ і області $D \subset \mathbb{R}^n$ позначимо через $\Gamma(E, F, D)$ сім'ю всіх кривих $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$ таких, що $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ і $\gamma(t) \in D$ при $t \in [a, b]$. Якщо $f : D \to \mathbb{R}^n$ – задане відображення, $y_0 \in f(D)$ і $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \sup\limits_{y \in f(D)} |y - y_0|$, то через $\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)$ ми позначимо сім'ю всіх кривих γ в області D таких, що $f(\gamma) \in \Gamma(S(y_0, r_1), S(y_0, r_2), A(y_0, r_1, r_2))$. Нехай $Q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ – вимірна за Лебегом функція. Будемо говорити, що f *задовольняє обернену нерівність Полецького* в точці $y_0 \in f(D)$, якщо співвідношення

$$M(\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)) \leqslant \int\limits_{A(y_0, r_1, r_2) \cap f(D)} Q(y) \cdot \eta^n(|y - y_0|)\, dm(y) \tag{1.4}$$

виконується для довільної вимірної за Лебегом функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такій, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1\,. \tag{1.5}$$

З приводу порівняння (1.4) з класичною нерівністю Полецького вкажемо на [12, теорема 1]. Зауважимо, що першим автором встановлені відкритість і дискретність відображень виду (1.4) за певних умов на функцію Q, див., напр., [19]. У більш загальному випадку виконання цих властивостей не гарантоване. Зауважимо також, що одностайна неперервність гомеоморфізмів з умовою (1.4) при дещо менш загальних обмеженнях на області і відповідні відображення детально вивчена в [20]. Дана робота переважно відноситься до відображень з розгалуженням.

Сформулюємо тепер основні результати даної статті. Для цього нагадаємо ще декілька означень. Відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ називається *дискретним*, якщо прообраз $\{f^{-1}(y)\}$ кожної точки $y \in \mathbb{R}^n$ складається з ізольованих точок, і *відкритим*, якщо образ будь-якої відкритої множини $U \subset D$ є відкритою множиною в $\mathbb{R}^n$. Відображення f області D на D' називається *замкненим*, якщо $f(E)$ є замкненим в D' для будь-якої замкненої множини $E \subset D$ (див., напр., [16, розд. 3]). У подальшому, в розширеному просторі $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ використовується *сферична (хордальна) метрика* $h(x, y) = |\pi(x)-\pi(y)|$, де π – стереографічна проекція $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, а саме,

$$h(x,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}\,,$$

$$h(x,y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}\,, \quad x \ne \infty \ne y \tag{1.6}$$

(див., напр., [15, означення 12.1]). У подальшому, для множин $A, B \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ покладемо

$$h(A,B) = \inf_{x\in A, y\in B} h(x,y)\,, \quad h(A) = \sup_{x,y\in A} h(x,y)\,,$$

де h – хордальная відстань, визначена в (1.6). Крім того, для множин $A, B \subset \mathbb{R}^n$ покладемо

$$\mathrm{dist}\,(A,B) = \inf_{x\in A, y\in B} |x-y|\,, \quad \mathrm{diam}(A) = \sup_{x,y\in A} |x-y|\,.$$

Для області $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і вимірної за Лебегом функції $Q : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ визначимо через $\mathfrak{F}_Q(D)$ сім'ю всіх відкритих дискретних відображень $f : D \to \mathbb{R}^n$ таких, що співвідношення (1.4) виконується для кожної точки $y_0 \in f(D)$. Виконується наступна теорема.

Теорема 1.1. *Нехай $Q \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Тоді знайдеться стала $C_n > 0$, яка залежить тільки від розмірності простору n, така що для будь-якого $x_0 \in D$ і будь-якого $r_0 > 0$ такого, що $0 < 2r_0 < \mathrm{dist}\,(x_0, \partial D)$,* *виконується нерівність*

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant\frac{C_n\cdot(\|Q\|_1)^{1/n}}{\log^{1/n}\left(1+\frac{r_0}{|x-x_0|}\right)} \tag{1.7}$$

$$\forall\ x\in B(x_0,r_0)\,,\quad \forall\ f\in\mathfrak{F}_Q(D)\,,$$

де $\|Q\|_1$ *– норма функції* Q *в* $L^1(\mathbb{R}^n)$*. Зокрема, сім'я* $\mathfrak{F}_Q(D)$ *є одностайно неперервною в* D*.*

Зауваження 1.1. Стосовно оцінок типу Гельдера щодо квазіконформних відображень і відображень з обмеженим спотворенням див., напр., [7, теорема 3.2.II], [9, теорема 3.2], [13, наслідок 1.II.1] і [15, теорема 18.1, зауваження 18.4]. Для відображень з обмеженим інтегралом Діріхле див., напр., [21, теореми 1.1.V і 2.1.V].

Окремим випадком теореми 1.1 є ситуація, коли f є гомеоморфізмом у D. Позначимо в цьому випадку $g:=f^{\,-1}$ і зауважимо, що

$$g(\Gamma(S(y_0,r_1),S(y_0,r_2),f(D)))=\Gamma_f(y_0,r_1,r_2)\,. \tag{1.8}$$

Справді, якщо $\gamma\in g(\Gamma(S(y_0,r_1),S(y_0,r_2),f(D)))$, то $\gamma:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}^n$, де $\gamma=g\circ\alpha$, $\alpha:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}^n$ і $\alpha(a)\in S(y_0,r_1)$, $\alpha(b)\in S(y_0,r_2)$ і $\alpha(t)\in f(D)$ при $a\leqslant t\leqslant b$. Тоді $\gamma(t)\in D$ при $a\leqslant t\leqslant b$ і $f(\gamma)=\alpha\in\Gamma(S(y_0,r_1),S(y_0,r_2),f(D))$, тобто, $\gamma\in\Gamma_f(y_0,r_1,r_2)$. Отже, $g(\Gamma(S(y_0,r_1),S(y_0,r_2),f(D)))\subset\Gamma_f(y_0,r_1,r_2)$. Обернене включення доводиться аналогічно. З теореми 1.1, з урахуванням співвідношення (1.8), випливає наступне твердження.

Наслідок 1.1. *Нехай* $Q\in L^1(\mathbb{R}^n)$ *і нехай* $f:D\rightarrow\mathbb{R}^n$ *– гомеоморфізм такий, що для кожного* $x_0\in D$ *і всіх* $0<r_1<r_2<d_0=\sup\limits_{x\in D}|x-x_0|$ *співвідношення*

$$M(f(\Gamma(S(x_0,r_1),S(x_0,r_2),D)))\leqslant\int\limits_{A(x_0,r_1,r_2)\cap D}Q(x)\cdot\eta^n(|x-x_0|)\,dm(x)$$

виконується для довільної вимірної за Лебегом функції $\eta:(r_1,r_2)\rightarrow[0,\infty]$ *з умовою (1.5).*

Покладемо $g=f^{\,-1}$*. Тоді знайдеться стала* $C_n>0$*, яка залежить тільки від розмірності простору* n*, така що для будь-якого* $y_0\in f(D)$ *і будь-якого* $0<2r_0<\mathrm{dist}\,(y_0,\partial f(D))$ *виконується нерівність*

$$|g(y)-g(y_0)|\leqslant\frac{C_n\cdot(\|Q\|_1)^{1/n}}{\log^{1/n}\left(1+\frac{r_0}{|y-y_0|}\right)}\quad\forall\ y\in B(y_0,r_0)\,,$$

де $\|Q\|_1$ *– норма функції* Q *в* $L^1(\mathbb{R}^n)$*.*

Нагадаємо, що область $D \subset \mathbb{R}^n$ називається *локально зв'язною в точці* $x_0 \in \partial D$, якщо для будь-якого околу U точки x_0 знайдеться окіл $V \subset U$ точки x_0 такий, що $V \cap D$ є зв'язним. Область D локально зв'язна на ∂D, якщо D локально зв'язна в кожній точці $x_0 \in \partial D$. Межа області D називається *слабо плоскою* в точці $x_0 \in \partial D$, якщо для кожного $P > 0$ і для будь-якого околу U точки x_0 знайдеться окіл $V \subset U$ цієї ж самої точки такий, що $M(\Gamma(E, F, D)) > P$ для будь-яких континуумів $E, F \subset D$, які перетинають ∂U і ∂V. Межа області D називається слабо плоскою, якщо відповідна властивість виконується в будь-якій точці межі D.

Для числа $\delta > 0$, областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, континуума $A \subset D'$ і довільної вимірної за Лебегом функції $Q : D' \to [0, \infty]$ позначимо через $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$ сім'ю всіх відкритих дискретних і замкнених відображень f області D на D', що задовольняють умову (1.4) для кожного $y_0 \in D'$ і таких, що $h(f^{-1}(A), \partial D) \geqslant \delta$. Виконується наступне твердження.

Теорема 1.2. *Припустимо, що область D має слабо плоску межу. Якщо $Q \in L^1(D')$, і область D' локально зв'язна на своїй межі, то будь-яке $f \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$ неперервно продовжується до відображення $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$, причому, $\overline{f}(\overline{D}) = \overline{D'}$ і сім'я $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(\overline{D}, \overline{D'})$, яка складається з усіх продовжених відображень $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$, одностайно неперервна в $\overline{D}$.*

Зауваження 1.2. В теоремі 1.1 одностайну неперервність треба розуміти відносно евклідової метрики, а саме, для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ таке, що з умов $|x - x_0| < \delta$ і $x \in D$, випливає нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ для усіх $f \in \mathfrak{F}_Q(D)$. В теоремі 1.2 одностайну неперервність треба розуміти відносно хордальної метрики, тобто, для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ таке, що з умов $h(x, x_0) < \delta$ і $x \in D$ випливає нерівність $h(\overline{f}(x), \overline{f}(x_0)) < \varepsilon$ при всіх $\overline{f} \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(\overline{D}, \overline{D'})$.

2. Одностайна неперервність сімей у внутрішніх точках області

Доведення теореми 1.1. Зафіксуємо $x_0 \in D$, $0 < 2r_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ і $f \in \mathfrak{F}_Q(D)$. Розглянемо $x \in B(x_0, r)$ і покладемо

$$|f(x) - f(x_0)| := \varepsilon_0 \,. \tag{2.1}$$

Якщо $\varepsilon_0 = 0$, доводити нема що. Нехай $\varepsilon_0 > 0$. Проведемо через точки $f(x)$ і $f(x_0)$ пряму $r = r(t) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0))t$, $-\infty < t < \infty$

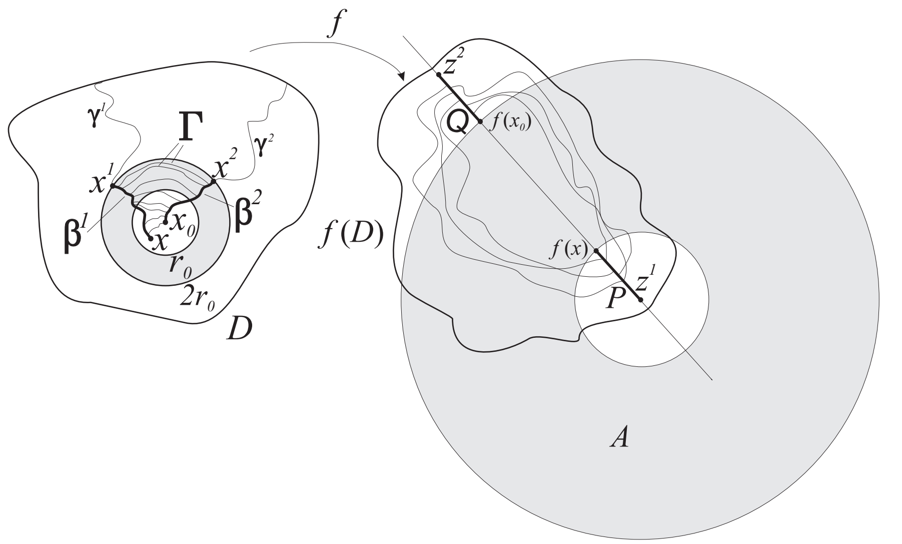

Рис. 1: До доведення теореми 1.1

(див. рисунок 1). Нехай $\gamma^1 : [1, c) \to D$, $1 < c \leqslant \infty$ – максимальне f-підняття променя $r = r(t)$, $t \geqslant 1$, з початком в точці x, що існує за [10, лема 3.12]. За цією ж лемою

$$h(\gamma^1(t), \partial D) \to 0 \tag{2.2}$$

при $t \to c - 0$. Аналогічно, нехай $\gamma^2 : (d, 0] \to D$, $-\infty \leqslant d < 0$ – максимальне f-підняття променя $r = r(t)$, $t \leqslant 0$, з кінцем в точці x_0, що існує за [10, лема 3.12]. Так само, як і в (2.2) ми маємо, що

$$h(\gamma^2(t), \partial D) \to 0 \tag{2.3}$$

при $t \to d - 0$. Зі співвідношень (2.2) і (2.3), враховуючи [22, теорема 1.I.5.46], випливає існування чисел $1 \leqslant t^1 < c$ і $d \leqslant t^2 < 0$ і елементів $x^1 := \gamma^1(t^1)$ і $x^2 := \gamma^2(t^2) \in S(x_0, 2r_0)$. Без обмеження загальності, можна вважати, що $\gamma^1(t) \in B(x_0, 2r_0)$ при всіх $t \in [1, t^1]$ і $\gamma^2(t) \in B(x_0, 2r_0)$ при всіх $t \in [t^2, 0]$. Нехай

$$\beta^1 := \gamma^1|_{[1,t^1]}, \qquad \beta^2 := \gamma^2|_{[t^2,0]}, \qquad \Gamma := (|\beta^1|, |\beta^2|, B(x_0, 2r_0))\,.$$

Тоді з одного боку за [17, лема 4.3]

$$M(\Gamma) \geqslant (1/2) \cdot M(\Gamma(|\beta^1|, |\beta^2|, \mathbb{R}^n))\,, \tag{2.4}$$

а з іншого боку, за [18, лема 7.38]

$$M(\Gamma(|\beta^1|, |\beta^2|, \mathbb{R}^n)) \geqslant c_n \cdot \log\left(1 + \frac{1}{m}\right)\,, \tag{2.5}$$

де $c_n > 0$ – деяка стала, яка залежить лише від n,

$$m = \frac{\mathrm{dist}(|\beta^1|, |\beta^2|)}{\min\{\mathrm{diam}\,(|\beta^1|), \mathrm{diam}\,(|\beta^2|)\}}\,.$$

Зауважимо, що $\mathrm{diam}\,(|\beta^i|) = \sup\limits_{x,y\in|\beta^i|} |x-y| \geqslant r_0$, $i = 1,2$. Тоді поєднуючи (2.4) і (2.5) і враховуючи, що $\mathrm{dist}\,(|\beta^1|, |\beta^2|) \leqslant |x - x_0|$, ми отримуємо, що

$$M(\Gamma) \geqslant \widetilde{c_n} \cdot \log\left(1 + \frac{r_0}{\mathrm{dist}(|\beta^1|, |\beta^2|)}\right) \geqslant \widetilde{c_n} \cdot \log\left(1 + \frac{r_0}{|x - x_0|}\right), \quad (2.6)$$

де $\widetilde{c_n} > 0$ – деяка стала, яка залежить тільки від n.

Встановимо тепер верхню оцінку для $M(\Gamma)$. Нехай P – частина прямої $r(t)$, розташована між точками $f(x)$ і $z^1 := f(x^1) = f(\gamma^1(t^1))$, а Q – частина прямої $r(t)$, розташована між точками $f(x_0)$ і $z^2 := f(x^2) = f(\gamma^2(t^2))$. Покладемо

$$A := A(z^1, \varepsilon^1, \varepsilon^2) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon^1 < |x - z^1| < \varepsilon^2\}\,,$$

де $\varepsilon^1 := |f(x) - z^1|$, $\varepsilon^2 := |f(x_0) - z^1|$. Покажемо, що

$$f(\Gamma) > \Gamma(S(z^1, \varepsilon^1), S(z^1, \varepsilon^2), A)\,. \quad (2.7)$$

Справді, нехай $\gamma \in \Gamma$. Тоді $f(\gamma) \in f(\Gamma)$, $f(\gamma) = f(\gamma(s)) : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $f(\gamma(0)) \in P$, $f(\gamma(1)) \in Q$ і $f(\gamma(s)) \in f(D)$ при $0 < s < 1$. Нехай $q > 1$ – число, таке що

$$z^1 = f(x_0) + (f(x) - f(x_0))\,q.$$

Оскільки $f(\gamma(0)) \in P$, знайдеться $1 \leqslant t \leqslant q$ таке, що $f(\gamma(0)) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0))t$. Отже,

$$\begin{aligned} |f(\gamma(0)) - z^1| &= |(f(x) - f(x_0))(q - t)| \leqslant \\ \leqslant |(f(x) - f(x_0))(q-1)| &= |(f(x) - f(x_0))q + f(x_0) - f(x))| \\ &= |f(x) - z^1| = \varepsilon^1\,. \end{aligned} \quad (2.8)$$

З іншого боку, оскільки $f(\gamma(1)) \in Q$, знайдеться $p \leqslant 0$ таке, що

$$f(\gamma(1)) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0))p\,.$$

В такому випадку, ми отримаємо, що

$$|f(\gamma(1)) - z^1| = |(f(x) - f(x_0))(q - p)|$$

$$\geqslant |(f(x)-f(x_0))q| = |(f(x)-f(x_0))q + f(x_0) - f(x_0)| \tag{2.9}$$
$$= |f(x_0) - z^1| = \varepsilon^2\,.$$

Зауважимо, що

$$|f(x_0)-f(x)| + \varepsilon^1$$
$$= |f(x_0)-f(x)| + |f(x)-z^1| = |z^1 - f(x_0)| = \varepsilon^2\,, \tag{2.10}$$

а, отже, $\varepsilon^1 < \varepsilon^2$. Тоді з (2.9) випливає, що

$$|f(\gamma(1)) - z^1| > \varepsilon^1\,. \tag{2.11}$$

З (2.8) і (2.11) випливає, що $|f(\gamma)|\cap\overline{B(z^1,\varepsilon^1)} \neq \varnothing \neq (f(D)\setminus\overline{B(z^1,\varepsilon^1)})\cap |f(\gamma)|$. В такому випадку, за [22, теорема 1.I.5.46] знайдеться $t_1 \in (0,1)$ таке, що $f(\gamma(t_1)) \in S(z^1,\varepsilon^1)$. Без обмеження загальності, ми можемо вважати, що $f(\gamma(t)) \notin B(z^1,\varepsilon^1)$ при $t\in(t_1,1)$. Покладемо $\alpha^1 := f(\gamma)|_{[t_1,1]}$.

З іншого боку, оскільки $\varepsilon^1<\varepsilon^2$ і $f(\gamma(t_1))\in S(z^1,\varepsilon^1)$, ми отримаємо, що $|\alpha^1|\cap B(z^1,\varepsilon^2)\neq\varnothing$. З співвідношення (2.9) ми отримаємо, що $(f(D)\setminus B(z^1,\varepsilon^2))\cap|\alpha^1|\neq\varnothing$. Отже, за [22, теорема 1.I.5.46] існує $t_2\in(t_1,1)$ таке, що $\alpha^1(t_2)\in S(z^1,\varepsilon^2)$. Без обмеження загальності, ми можемо вважати, що $f(\gamma(t))\in B(z^1,\varepsilon^2)$ при $t\in(t_1,t_2)$. Покладемо $\alpha^2 := \alpha^1|_{[t_1,t_2]}$. Тоді $f(\gamma) > \alpha^2$ і $\alpha^2\in\Gamma(S(z^1,\varepsilon^1), S(z^1,\varepsilon^2), A)$. Таким чином, співвідношення (2.7) доведене.

З (2.7) випливає, що $\Gamma > \Gamma_f(z^1,\varepsilon^1,\varepsilon^2)$. Тепер покладемо

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_0}, & t\in[\varepsilon^1,\varepsilon^2],\\ 0, & t\notin[\varepsilon^1,\varepsilon^2]\,. \end{cases}$$

Зауважимо, що η задовольняє співвідношення (1.5) при $r_1=\varepsilon^1$ і $r_2=\varepsilon^2$. Справді, з (2.1) і (2.10) випливає, що

$$r_1 - r_2 = \varepsilon^2-\varepsilon^1 = |f(x_0)-z^1| - |f(x)-z^1|$$
$$= |f(x)-f(x_0)| = \varepsilon_0\,.$$

Тоді $\int\limits_{\varepsilon^1}^{\varepsilon^2}\eta(t)\,dt = (1/\varepsilon_0)\cdot(\varepsilon^2-\varepsilon^1)\geqslant 1$. За нерівністю (2.7), а також співвідношенням (1.4), застосованим в точці z^1 і покладеним в основу означення сім'ї $\mathfrak{F}_Q(D)$, ми отримаємо, що

$$M(\Gamma)\leqslant M(\Gamma_f(z^1,\varepsilon^1,\varepsilon^2))$$
$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon_0^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} Q(y)\,dm(y) = \frac{\|Q\|_1}{|f(x)-f(x_0)|^n}\,. \tag{2.12}$$

З (2.6) і (2.12) випливає, що

$$\widetilde{c_n} \cdot \log\left(1 + \frac{r_0}{|x - x_0|}\right) \leqslant \frac{\|Q\|_1}{|f(x) - f(x_0)|^n}\,.$$

З останнього співвідношення випливає бажана нерівність (1.7), де $C_n := \widetilde{c_n}^{\,-1/n}$. □

3. Межова поведінка відображень

Зауважимо деякі відомі твердження про продовження гомеоморфізмів з умовою (1.4) на межу області, див., напр., [23, лема 5.20, наслідок 5.23], [24, лема 6.1, теорема 6.1] и [25, лема 5, теорема 3]. Наша найближча мета – отримати аналогічний результат для відображень, які допускають розгалуження. Виконується наступне твердження.

Теорема 3.1. *Нехай $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, – область, яка має слабо плоску межу, а область $D' \subset \mathbb{R}^n$ локально зв'язна на своїй межі. Припустимо, f – відкрите дискретне і замкнене відображення області D на D', що задовольняє співвідношення (1.4) в кожній точці $y_0 \in D'$, де $Q \in L^1(D')$. Тоді відображення f неперервно продовжується до відображення $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$, причому, $\overline{f}(\overline{D}) = \overline{D'}$.*

Доведення. Зафіксуємо довільним чином точку $x_0 \in \partial D$. Необхідно показати можливість неперервного продовження відображення f в точку x_0. Використовуючи при необхідності мьобіусове перетворення $\varphi : \infty \mapsto 0$ і враховуючи інваріантість модуля M в лівій частині співвідношення (1.4) (див. [15, теорема 8.1]), ми можемо вважати, що $x_0 \neq \infty$.

Припустимо, що висновок про неперервне продовження відображення f в точку x_0 не є правильним. Тоді знайдеться не менше двох послідовностей $x_i, y_i \in D$, $i = 1, 2, \ldots$, таких, що $x_i, y_i \to x_0$ при $i \to \infty$, причому, $h(f(x_i), f(y_i)) \geqslant a > 0$ при деякому $a > 0$ і усіх $i \in \mathbb{N}$, де h – хордальна метрика, див. [15, означення 12.1]. Через компактність простору $\overline{\mathbb{R}^n}$ ми можемо вважати, що послідовності $f(x_i)$ і $f(y_i)$ збігаються при $i \to \infty$ до z_1 і z_2, відповідно, причому $z_1 \neq \infty$. Оскільки відображення f замкнене, то воно зберігає межу області, див. [16, теорема 3.3], тому $z_1, z_2 \in \partial D'$. Оскільки область D' локально зв'язна на своїй межі, існують непересічні околи U_1 і U_2 точок z_1 і z_2 такі, що $W_1 = D' \cap U_1$ і $W_2 = D' \cap U_2$ є зв'язними. Можна вважати, що W_1 і W_2 лінійно зв'язні, оскільки U_1 і U_2 можна вибрати відкритими (див., напр., [11, пропозиція 13.2]; див. малюнок 2). Можна вважати, що

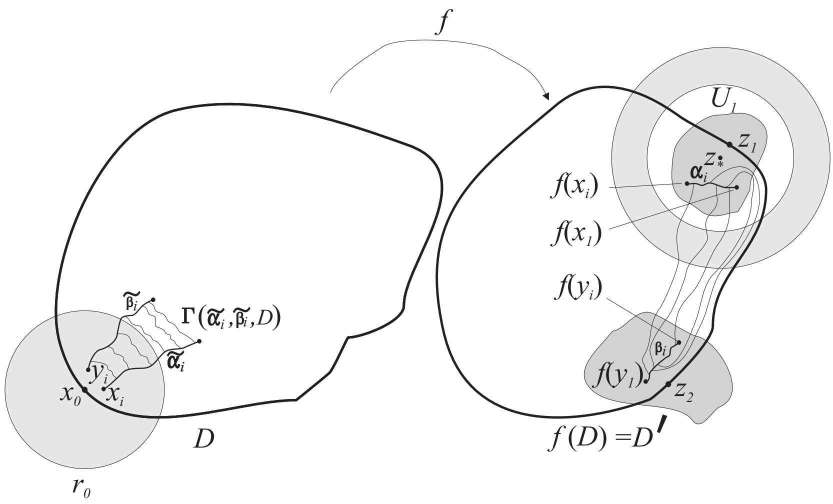

Рис. 2: До доведення теореми 3.1

$$U_1 \subset B(z_*, R_0), \qquad \overline{B(z_*, 2R_0)} \cap \overline{U_2} = \varnothing\,, \qquad R_0 > 0\,, \tag{3.1}$$

де $z_* \in D'$ – деяка точка, достатньо близька до z_1. Ми також можемо вважати, що $f(x_i) \in W_1$ і $f(y_i) \in W_2$ при всіх $i = 1, 2, \ldots$. З'єднаємо точки $f(x_i)$ і $f(x_1)$ кривою $\alpha_i : [0, 1] \to D'$, а точки $f(y_i)$ і $f(y_1)$ – кривою $\beta_i : [0, 1] \to D'$ таким чином, що $|\alpha_i| \subset W_1$ і $|\beta_i| \subset W_2$ при $i = 1, 2, \ldots$. Нехай $\widetilde{\alpha_i} : [0, 1] \to D'$ і $\widetilde{\beta_i} : [0, 1] \to D'$ – повні підняття кривих α_i і β_i з початком в точках x_i і y_i, відповідно (ці підняття існують за [16, лема 3.7]). Зауважимо, що у точок $f(x_1)$ і $f(y_1)$ в області D може бути не більше скінченного числа прообразів при відображенні f, див. [16, лема 3.2]. Тоді знайдеться $r_0 > 0$ таке, що $\widetilde{\alpha_i}(1), \widetilde{\beta_i}(1) \in D \setminus B(x_0, r_0)$ при всіх $i = 1, 2, \ldots$. Оскільки межа області D є слабо плоскою, для кожного $P > 0$ знайдеться $i = i_P \geqslant 1$ таке, що

$$M(\Gamma(|\widetilde{\alpha_i}|, |\widetilde{\beta_i}|, D)) > P \qquad \forall\ i \geqslant i_P\,. \tag{3.2}$$

Покажемо, що умова (3.2) суперечить визначенню відображення f в (1.4). Справді, через співвідношення (3.1) і з огляду на [22, теорема 1.I.5.46]

$$f(\Gamma(|\widetilde{\alpha_i}|, |\widetilde{\beta_i}|, D)) > \Gamma(S(z_*, R_0), S(z_*, 2R_0), A(z_*, R_0, 2R_0))\,. \tag{3.3}$$

З (3.3) випливає, що

$$\Gamma(|\widetilde{\alpha_i}|, |\widetilde{\beta_i}|, D) > \Gamma_f(z_*, R_0, 2R_0)\,. \tag{3.4}$$

Покладемо $\eta(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{R_0}, & t \in [R_0, 2R_0], \\ 0, & t \notin [R_0, 2R_0] \end{array} \right.$. Зауважимо, що η задовольняє співвідношення (1.5) при $r_1 = R_0$ і $r_2 = 2R_0$. Тоді з (3.4) і (1.4) ми отримаємо, що

$$M(\Gamma(|\widetilde{\alpha_i}|, |\widetilde{\beta_i}|, D)) \leqslant M(\Gamma_f(z_*, R_0, 2R_0)) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{R_0^n} \int\limits_{D'} Q(y)\, dm(y) := c < \infty\,, \tag{3.5}$$

оскільки $Q \in L^1(D)$. Проте, співвідношення (3.5) суперечить умові (3.2). Отримана суперечність спростовує припущення про відсутність границі у відображення f в точці x_0.

Залишилось перевірити рівність $\overline{f}(\overline{D}) = \overline{D'}$. Очевидно, що $\overline{f}(\overline{D}) \subset \overline{D'}$. Покажемо, що $\overline{D'} \subset \overline{f}(\overline{D})$. Справді, нехай $y_0 \in \overline{D'}$, тоді або $y_0 \in D'$, або $y_0 \in \partial D'$. Якщо $y_0 \in D'$, то $y_0 = f(x_0)$ і $y_0 \in \overline{f}(\overline{D})$, оскільки за умовою f – відображення області D на D'. Нарешті, нехай $y_0 \in \partial D'$, тоді знайдеться послідовність $y_k \in D'$ така, що $y_k = f(x_k) \to y_0$ при $k \to \infty$ і $x_k \in D$. Через компактність простору $\overline{\mathbb{R}^n}$ ми можемо вважати, що $x_k \to x_0$, де $x_0 \in \overline{D}$. Помітимо, що $x_0 \in \partial D$, оскільки відображення f є відкритим. Тоді $f(x_0) = y_0 \in \overline{f}(\partial D) \subset \overline{f}(\overline{D})$. Теорема повністю доведена. □

4. Одностайна неперервність сімей в замиканні області

Доведення теореми 1.2. Нехай $f \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$. За теоремою 3.1 відображення f продовжується до неперервного відображення $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$, причому, $\overline{f}(\overline{D}) = \overline{D'}$. Одностайна неперервність сім'ї відображень $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(\overline{D}, \overline{D'})$ в D є твердженням теореми 1.1. Залишилось встановити її одностайну неперервність на ∂D.

Проведемо доведення від супротивного. Припустимо, що знайдеться $x_0 \in \partial D$, число $\varepsilon_0 > 0$, послідовність $x_m \in \overline{D}$, яка збігається до точки x_0 і відповідні відображення $\overline{f}_m \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(\overline{D}, \overline{D})$ такі, що

$$h(\overline{f}_m(x_m), \overline{f}_m(x_0)) \geqslant \varepsilon_0, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{4.1}$$

Покладемо $f_m := \overline{f}_m|_D$. Оскільки f_m має неперервне продовження на ∂D, можна вважати, що $x_m \in D$. Отже, $\overline{f}_m(x_m) = f_m(x_m)$. Крім цього, знайдеться послідовність $x_m' \in D$ така, що $x_m' \to x_0$ при $m \to \infty$ і $h(f_m(x_m'), \overline{f}_m(x_0)) \to 0$ при $m \to \infty$. Оскільки простір $\overline{\mathbb{R}^n}$ компактний, ми можемо вважати, що $f_m(x_m)$ і $\overline{f}_m(x_0)$ збігаються при $m \to \infty$. Нехай $f_m(x_m) \to \overline{x_1}$ і $\overline{f}_m(x_0) \to \overline{x_2}$ при $m \to \infty$. За неперервністю метрики в (4.1), $\overline{x_1} \neq \overline{x_2}$. Без обмеження загальності, можна вважати, що $\overline{x_1} \neq \infty$. Оскільки відображення f_m замкнуті, то вони зберігають межу (див. [16, теорема 3.3]), тому $\overline{x_2} \in \partial D$. Нехай $\widetilde{x_1}$ і $\widetilde{x_2}$ різні точки континуума A, жодна з яких не співпадає з $\overline{x_1}$. За [26, лема 2.1] дві пари точок $\widetilde{x_1}$, $\overline{x_1}$ і $\widetilde{x_2}$, $\overline{x_2}$ можна з'єднати кривими $\gamma_1 : [0,1] \to \overline{D'}$ і $\gamma_2 : [0,1] \to \overline{D'}$ такими, що $|\gamma_1| \cap |\gamma_2| = \varnothing$, $\gamma_1(t), \gamma_2(t) \in D'$ при $t \in (0,1)$, $\gamma_1(0) = \widetilde{x_1}$, $\gamma_1(1) = \overline{x_1}$, $\gamma_2(0) = \widetilde{x_2}$ і $\gamma_2(1) = \overline{x_2}$. Оскільки D' локально зв'язна на $\partial D'$, знайдуться околи U_1 і U_2 точок $\overline{x_1}$ і $\overline{x_2}$, чиї замикання не перетинаються, причому, множини $W_i := D' \cap U_i$ лінійно зв'язні. Без обмеження загальності можна вважати, що $\overline{U_1} \subset B(\overline{x_1}, \delta_0)$ і

$$\overline{B(\overline{x_1}, \delta_0)} \cap |\gamma_2| = \varnothing = \overline{U_2} \cap |\gamma_1|\,, \quad \overline{B(\overline{x_1}, \delta_0)} \cap \overline{U_2} = \varnothing\,. \tag{4.2}$$

Можна також вважати, що $f_m(x_m) \in W_1$ і $f_m(x'_m) \in W_2$ при всіх $m \in \mathbb{N}$. Нехай a_1 і a_2 – дві різні точки, які належать $|\gamma_1| \cap W_1$ і $|\gamma_2| \cap W_2$, крім того, нехай $0 < t_1, t_2 < 1$ такі, що $\gamma_1(t_1) = a_1$ і $\gamma_2(t_2) = a_2$. З'єднаємо точки a_1 і $f_m(x_m)$ кривою $\alpha_m : [t_1, 1] \to W_1$ такою, що $\alpha_m(t_1) = a_1$ і $\alpha_m(1) = f_m(x_m)$. Аналогічно, з'єднаємо a_2 і $f_m(x'_m)$ кривою $\beta_m : [t_2, 1] \to W_2$, такою що $\beta_m(t_2) = a_2$ і $\beta_m(1) = f_m(x'_m)$ (див. малюнок 3). Покладемо

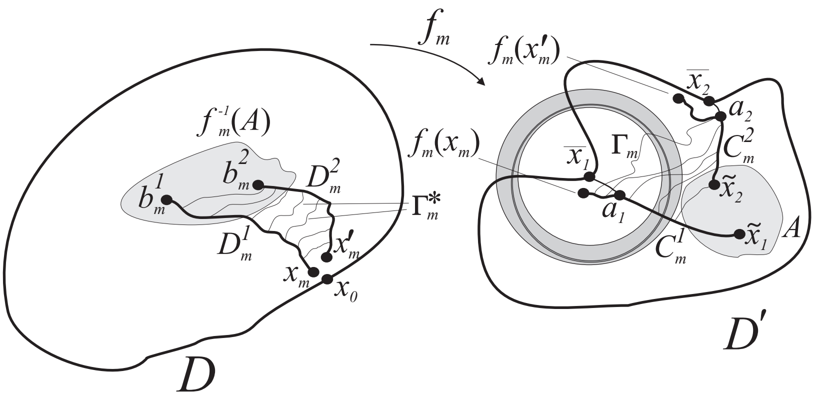

Рис. 3: До доведення теореми 1.2

$$C^1_m(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [0, t_1], \\ \alpha_m(t), & t \in [t_1, 1] \end{cases}, \quad C^2_m(t) = \begin{cases} \gamma_2(t), & t \in [0, t_2], \\ \beta_m(t), & t \in [t_2, 1] \end{cases}.$$

Нехай D^1_m і D^2_m – повні підняття кривих C^1_m і C^2_m з початками в точках x_m і x'_m, відповідно (такі підняття існують за [16, лема 3.7]). Зокрема, через умову $h(f_m^{-1}(A), \partial D) \geqslant \delta > 0$, яка приймає участь в означенні класу $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$, кінці кривих D^1_m і D^2_m, які в майбутньому будемо позначати b^1_m і b^2_m, віддалені від межі D на відстань, не меншу δ.

Як завжди, позначимо через $|C_m^1|$ і $|C_m^2|$ носії кривих C_m^1 і C_m^2, відповідно. Покладемо

$$l_0 = \min\{\mathrm{dist}\,(|\gamma_1|, |\gamma_2|), \mathrm{dist}\,(|\gamma_1|, U_2 \setminus \{\infty\})\}$$

і розглянемо покриття $A_0 := \bigcup\limits_{x\in|\gamma_1|} B(x, l_0/4)$ кривої $|\gamma_1|$ за допомогою куль. Оскільки $|\gamma_1|$ – компактна множина, можна вибрати скінченне число індексів $1 \leqslant N_0 < \infty$ і відповідні точки $z_1, \ldots, z_{N_0} \in |\gamma_1|$ так, що $|\gamma_1| \subset B_0 := \bigcup\limits_{i=1}^{N_0} B(z_i, l_0/4)$. У цьому випадку,

$$|C_m^1| \subset U_1 \cup |\gamma_1| \subset B(\overline{x_1}, \delta_0) \cup \bigcup_{i=1}^{N_0} B(z_i, l_0/4)\,.$$

Нехай Γ_m – сім'я всіх кривих, які з'єднують $|C_m^1|$ і $|C_m^2|$ в D'. Тоді ми маємо, що

$$\Gamma_m = \bigcup_{i=0}^{N_0} \Gamma_{mi}\,, \tag{4.3}$$

де Γ_{mi} – сім'я всіх кривих $\gamma : [0, 1] \to D'$ таких, що $\gamma(0) \in B(z_i, l_0/4) \cap |C_m^1|$ і $\gamma(1) \in |C_2^m|$ при $1 \leqslant i \leqslant N_0$. Аналогічно, нехай Γ_{m0} – сім'я кривих $\gamma : [0, 1] \to D'$ таких, що $\gamma(0) \in B(\overline{x_1}, \delta_0) \cap |C_m^1|$ і $\gamma(1) \in |C_2^m|$. За (4.2) знайдеться $\sigma_0 > \delta_0 > 0$ таке, що

$$\overline{B(\overline{x_1}, \sigma_0)} \cap |\gamma_2| = \varnothing = \overline{U_2} \cap |\gamma_1|\,, \quad \overline{B(\overline{x_1}, \sigma_0)} \cap \overline{U_2} = \varnothing\,.$$

Міркуючи які і при доведенні теореми 1.1 і використовуючи [22, теорема 1.I.5.46], ми можемо показати, що

$$\Gamma_{m0} > \Gamma(S(\overline{x_1}, \delta_0), S(\overline{x_1}, \sigma_0), A(\overline{x_1}, \delta_0, \sigma_0))\,,$$

$$\Gamma_{mi} > \Gamma(S(z_i, l_0/4), S(z_i, l_0/2), A(z_i, l_0/4, l_0/2))\,. \tag{4.4}$$

Можна підібрати $x_* \in D'$, $\delta_* > 0$ і $\sigma_* > 0$ такі, що $A(x_*, \delta_*, \sigma_*) \subset A(\overline{x_1}, \delta_0, \sigma_0)$, тому

$$\Gamma(S(\overline{x_1}, \delta_0), S(\overline{x_1}, \sigma_0), A(\overline{x_1}, \delta_0, \sigma_0))$$

$$> \Gamma(S(x_*, \delta_*), S(x_*, \sigma_*), A(x_*, \delta_*, \sigma_*))\,. \tag{4.5}$$

Покладемо

$$\eta(t) = \begin{cases} 4/l_0, & t \in [l_0/4, l_0/2], \\ 0, & t \notin [l_0/4, l_0/2]\,, \end{cases}$$

$$\eta_0(t) = \begin{cases} 1/(\sigma_* - \delta_*), & t \in [\delta_*, \sigma_*], \\ 0, & t \notin [\delta_*, \sigma_*]. \end{cases}$$

Позначимо $\Gamma_m^* := \Gamma(|D_m^1|, |D_m^2|, D)$. Зауважимо, що $f_m(\Gamma_m^*) \subset \Gamma_m$. Тоді через (4.3), (4.4) і (4.5)

$$\Gamma_m^* > \left(\bigcup_{i=1}^{N_0} \Gamma_{f_m}(z_i, l_0/4, l_0/2)\right) \cup \Gamma_{f_m}(x_*, \delta_*, \sigma_*). \qquad (4.6)$$

Оскільки відображення f_m задовольняють співвідношення (1.4) в D', з (4.6) отримаємо, що

$$M(\Gamma_m^*) \leqslant (4^n N_0/l_0^n + (1/(\sigma_* - \delta_*))^n)\|Q\|_1 := c < \infty. \qquad (4.7)$$

Покажемо, що співвідношення (4.7) суперечить умові слабкої плоскості відображеної області. Справді, за побудовою

$$h(|D_m^1|) \geqslant h(x_m, b_m^1) \geqslant (1/2) \cdot h(f_m^{-1}(A), \partial D) > \delta/2,$$

$$h(|D_m^2|) \geqslant h(x'_m, b_m^2) \geqslant (1/2) \cdot h(f_m^{-1}(A), \partial D) > \delta/2 \qquad (4.8)$$

при всіх $m \geqslant M_0$ і для деякого $M_0 \in \mathbb{N}$. Покладемо $U := B_h(x_0, r_0) = \{y \in \overline{\mathbb{R}^n} : h(y, x_0) < r_0\}$, де $0 < r_0 < \delta/4$ і число δ стосується співвідношення (4.8). Зауважимо, що $|D_m^1| \cap U \neq \varnothing \neq |D_m^1| \cap (D \setminus U)$ для кожного $m \in \mathbb{N}$, оскільки $h(|D_m^1|) \geqslant \delta/2$ і $x_m \in |D_m^1|$, $x_m \to x_0$ при $m \to \infty$. Аналогічно, $|D_m^2| \cap U \neq \varnothing \neq |D_m^2| \cap (D \setminus U)$. Оскільки $|D_m^1|$ і $|D_m^2|$ – континууми,

$$|D_m^1| \cap \partial U \neq \varnothing, \quad |D_m^2| \cap \partial U \neq \varnothing, \qquad (4.9)$$

див., напр., [22, теорема 1.I.5.46]. Оскільки ∂D слабо плоска, то для $P := c > 0$, де c – число зі співвідношення (4.7), знайдеться окіл $V \subset U$ точки x_0 такий, що

$$M(\Gamma(E, F, D)) > c \qquad (4.10)$$

для будь-яких континуумів $E, F \subset D$ таких, що $E \cap \partial U \neq \varnothing \neq E \cap \partial V$ і $F \cap \partial U \neq \varnothing \neq F \cap \partial V$. Покажемо, що для достатньо великих $m \in \mathbb{N}$

$$|D_m^1| \cap \partial V \neq \varnothing, \quad |D_m^2| \cap \partial V \neq \varnothing. \qquad (4.11)$$

Справді, $x_m \in |D_m^1|$ і $x'_m \in |D_m^2|$, де $x_m, x'_m \to x_0 \in V$ при $m \to \infty$. У такому випадку, $|D_m^1| \cap V \neq \varnothing \neq |D_m^2| \cap V$ для достатньо великих $m \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що $h(V) \leqslant h(U) \leqslant 2r_0 < \delta/2$. За (4.8) $h(|D_m^1|) > \delta/2$. Отже, $|D_m^1| \cap (D \setminus V) \neq \varnothing$ і, отже, $|D_m^1| \cap \partial V \neq \varnothing$ (див., напр., [22, теорема 1.I.5.46]). Аналогічно, $h(V) \leqslant h(U) \leqslant 2r_0 < \delta/2$. З (4.8) випливає, що $h(|D_m^2|) > \delta/2$, отже, $|D_m^2| \cap (D \setminus V) \neq \varnothing$. За [22, теорема 1.I.5.46] ми отримаємо, що $|D_m^2| \cap \partial V \neq \varnothing$. Таким чином, співвідношення (4.11) встановлене. Поєднуючи співвідношення (4.9), (4.10) і (4.11), ми отримаємо, що $M(\Gamma_m^*) = M(\Gamma(|D_m^1|, |D_m^2|, D)) > c$. Остання умова суперечить (4.7), що і доводить теорему. $\Box$

5. Приклади

Приклад 5.1. Розглянемо в одиничній кулі $\mathbb{B}^n$ послідовність $f_m(z) = mz$, $m = 1, 2, \ldots$. Зауважимо, що як прямі відображення f_m, так і обернені відображення f_m^{-1} задовольняють умову (1.4) в відповідній області при $Q \equiv 1$ (див., напр., [11, теореми 8.1, 8.5]). Зауважимо, що послідовність f_m не є одностайно неперервною, що пояснюється неінтегровністю функції $Q \equiv 1$ в $\mathbb{R}^n$. В цей же час, обернена послідовність $f_m^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ одностайно неперервна в $\mathbb{R}^n$, що безпосередньо випливає з теореми 1.1. Справді, розглянемо довільну точку $y_0 \in \mathbb{R}^n$ і розглянемо звуження $g_m := f_m^{-1}|_{B(y_0, r_0)}$, $r_0 > 0$. Тоді при деякому достатньо великому $m_0 \in \mathbb{N}$ маємо: $g_m : B(y_0, r_0) \to \mathbb{B}^n$ при $m \geqslant m_0$. Якщо тепер покласти $Q(x) \equiv 1$ при $x \in \mathbb{B}^n$ і $Q(x) \equiv 0$ при $x \notin \mathbb{B}^n$, то видно, що g_m задовольняє (1.4) при $Q \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (див. [12, теорема 1]). Отже, всі умови теореми 1.1 виконуються.

Приклад 5.2. В публікаціях [26] і [27] були побудовані приклади гомеоморфізмів, що задовольняють умову (1.4). Вкажемо тепер на аналогічний приклад сім'ї відображень з точками розгалуження. Нехай $p \geqslant 1$ настільки велике, що число $2/p$ менше 1, і нехай, крім того, $\alpha \in (0, 2/p)$ – довільне число. Визначимо послідовність відображень $f_m : B(0, 2) \to \mathbb{B}^2$ наступним чином: $f_m(z) = (f \circ \widetilde{f}_m)(z)$, $f(z) = z^2$,

$$\widetilde{f}_m(z) = \begin{cases} \frac{(|z|-1)^{1/\alpha}}{|z|} \cdot z\,, & 1 + 1/(m^\alpha) \leqslant |z| \leqslant 2, \\ \frac{1/m}{1+(1/m)^\alpha} \cdot z\,, & 0 < |z| < 1 + 1/(m^\alpha)\,. \end{cases}$$

Використовуючи підхід, використаний при розгляді Пропозиції 6.3 в [11], можна показати, що зовнішня дилатація $K_O(z, f_m)$ відображення f_m в точці $z \in \mathbb{B}^2$ обчислюється як $K_O(z, f_m) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{|z|}{|z|-1}$ при $z \in B(0, 2) \setminus \overline{\mathbb{B}^2}$, $K_O(z, f_m) = 1$ при $z \in \mathbb{B}^2$. Зауважимо, що кожна точка $z \in \mathbb{B}^2 \setminus B(0, 1/m)$ має рівно два прообрази при відображенні f_m, а саме, $w = re^{i\varphi} \mapsto \pm((\sqrt{r})^\alpha + 1)e^{i\varphi/2}$. Точки $w \in B(0, 1/m)$ також мають деякі два прообрази при відображенні f_m, скажімо, z_m^1 і z_m^2. Ці прообрази співпадають і рівні нулю тільки при $w = 0$. Таким чином, при $w\in \mathbb{B}^2$ і за вибором α

$$K_I(w,f_m^{-1},B(0,2)):=$$

$$=\sum\limits_{z\in f_m^{-1}(w)\cap B(0,2)}K_O(z,f_m)\leqslant\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{(\sqrt{r})^{\alpha}+1}{(\sqrt{r})^{\alpha}}\leqslant\frac{4}{\alpha r^{\alpha}}\in L^p(\mathbb{B}^2)\,.$$

За [11, теореми 8.1, 8.5] відображення f_m задовольняють співвідношення (1.4) для функції $Q(y)=\frac{4}{\alpha|y|^{\alpha}}$, $y\in \mathbb{B}^2$; $Q(y)\equiv 0$ при $y\in {\mathbb R}^2\setminus \overline{\mathbb{B}^2}$. Звідси випливає, що для сім'ї відображення $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ виконуються всі умови теореми 1.1. Також для цієї сім'ї виконуються всі умови теореми 1.2, оскільки f_m фіксують нескінченну кількість точок круга $B(0,2)$ при всіх $m\geqslant 2$.

Приклад 5.3. Тепер розглянемо приклад сім'ї відображень, аналогічний прикладу 5.2, який відноситься до простору довільної розмірності $n\geqslant 2$. Для цього, для числа $p\geqslant 1$ такого, що $n/p(n-1)$, зафіксуємо довільним чином $\alpha\in (0, n/p(n-1))$. Нехай $f(x)=(r\cos 2\varphi, r\sin 2\varphi, x_3,\ldots, x_n)$, $x=(x_1,x_2,\ldots, x_n)$, $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$. Визначимо послідовність відображень $f_m:B(0,2)\rightarrow \mathbb{B}^n$ наступним чином: $f_m(x)=(f\circ\widetilde{f}_m)(x)$, де

$$\widetilde{f}_m(x)\,=\,\left\{\begin{array}{rr}\frac{(|x|-1)^{1/\alpha}}{|x|}\cdot x\,, & 1+1/(m^{\alpha})\leqslant|x|\leqslant 2,\\ \frac{1/m}{1+(1/m)^{\alpha}}\cdot x\,, & 0<|x|< 1+1/(m^{\alpha})\,.\end{array}\right.$$

Використовуючи підхід, використаний при розгляді [11, пропозиція 6.3], можна показати, що $K_O(x,f_m)\leqslant \frac{2^{n-1}}{\alpha^{n-1}}\cdot\frac{|x|^{n-1}}{(|x|-1)^{n-1}}$ при $x\in B(0,2)\setminus \overline{\mathbb{B}^n}$, $K_O(x,f)=2^{n-1}$ при $x\in \mathbb{B}^n$. Зауважимо, що кожна точка $w\in \mathbb{B}^n\setminus B(0, 1/m)$ має рівно два прообрази при відображенні f_m, а саме,

$$w=(r\cos\varphi, r\sin\varphi, x_3,\ldots, x_n)\mapsto$$

$$\mapsto\frac{1+|x|^{\alpha}}{|x|}\cdot(\pm r\cos\varphi/2, \pm r\sin\varphi/2, x_3,\ldots, x_n)\,.$$

У такому випадку,

$$K_I(w,f_m^{-1},B(0,2)):=\sum\limits_{x\in f_m^{-1}(w)\cap B(0,2)}K_O(x,f_m)$$

$$\leqslant\frac{2\cdot 2^{n-1}}{\alpha^{n-1}}\cdot\frac{(r^{\alpha}+1)^{n-1}}{r^{\alpha(n-1)}}\leqslant\frac{2\cdot 2^{2n-2}}{\alpha^{n-1}r^{\alpha(n-1)}}\in L^p(\mathbb{B}^n)\,.$$

За [11, теорема 8.1, 8.5] відображення f_m задовольняють співвідношення (1.4) для функції $Q(y)=\frac{2\cdot 2^{2n-2}}{\alpha^{n-1}|y|^{(n-1)\alpha}}$, $y\in \mathbb{B}^n$; $Q(y)\equiv 0$ при

$y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathbb{B}^n}$. Звідси випливає, що для сім'ї відображення $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ виконуються всі умови теореми 1.1. Також для цієї сім'ї виконуються всі умови теореми 1.2, так як f_m фіксують нескінченну кількість точок кулі $B(0,2)$ при всіх $m \geqslant 2$.

6. Лема про континуум

Варіант наведеного нижче твердження встановлений для гомеоморфізмів в [27, пункт v леми 2], див. також [26, лема 4.1]. У даній роботі ми маємо справу з аналогічним твердженням, яке відноситься до широкого класу відображень з розгалуженням.

Лема 6.1. *Нехай $n \geqslant 2$, D і D' – області в $\mathbb{R}^n$, причому, D має слабо плоску межу, жодна компонента зв'язності якої не вироджується в точку, а область D' локально зв'язна на своїй межі. Нехай також A – невироджений континуум в D' і $\delta > 0$. Припустимо, f_m – послідовність відкритих, дискретних і замкнених відображень області D на D' з наступною властивістю: для кожного $m = 1, 2, \ldots$ знайдеться континуум $A_m \subset D$, $m = 1, 2, \ldots$, такий, що $f_m(A_m) = A$ і $h(A_m) \geqslant \delta > 0$. Якщо для кожного $m = 1, 2, \ldots$ відображення f_m задовольняє співвідношення (1.4) в довільній точці $y_0 \in D'$, причому, $Q \in L^1(D')$, то знайдеться $\delta_1 > 0$ таке, що*

$$h(A_m, \partial D) > \delta_1 > 0 \quad \forall\, m \in \mathbb{N}\,.$$

Доведення. Через компактність простору $\overline{\mathbb{R}^n}$ межа області D не порожня і є компактом, так що відстань $h(A_m, \partial D)$ коректно визначена.

Проведемо доведення від супротивного. Припустимо, що висновок леми не є вірним. Тоді для кожного $k \in \mathbb{N}$ знайдеться номер $m = m_k$ такий, що $h(A_{m_k}, \partial D) < 1/k$. Можна вважати, що послідовність m_k зростає по k. Оскільки A_{m_k} – компакт, то знайдуться $x_k \in A_{m_k}$ і $y_k \in \partial D$ такі, що $h(A_{m_k}, \partial D) = h(x_k, y_k) < 1/k$ (див. малюнок 4). Оскільки ∂D – компактна множина, ми можемо вважати, що $y_k \to y_0 \in \partial D$ при $k \to \infty$; тоді також $x_k \to y_0 \in \partial D$ при $k \to \infty$. Нехай K_0 – компонента зв'язності ∂D, яка містить точку y_0. Очевидно, K_0 – континуум в $\overline{\mathbb{R}^n}$. Оскільки ∂D є слабко плоскою, за теоремою 3.1 відображення f_{m_k} має неперервне продовження $\overline{f}_{m_k} : \overline{D} \to \overline{D'}$. Більш того, відображення $\overline{f}_{m_k}$ є рівномірно неперервним у $\overline{D}$ при кожному фіксованому k, оскільки $\overline{f}_{m_k}$ неперервне на компакті $\overline{D}$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta_k = \delta_k(\varepsilon) < 1/k$ таке, що

$$h(\overline{f}_{m_k}(x), \overline{f}_{m_k}(x_0)) < \varepsilon \tag{6.1}$$

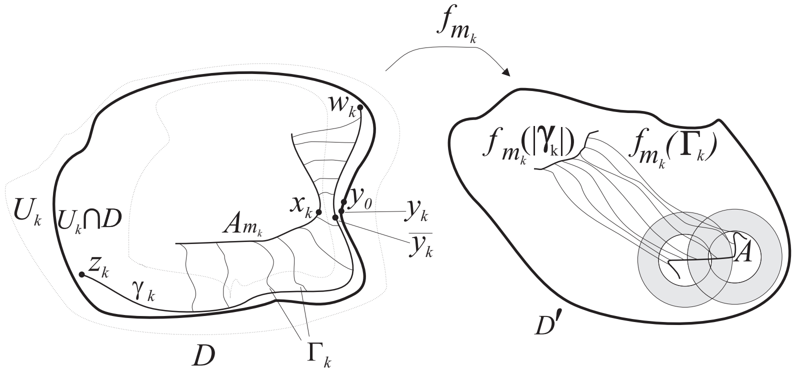

Рис. 4: До доведення леми 6.1

$$\forall\ x, x_0 \in \overline{D}, \quad h(x, x_0) < \delta_k\,, \quad \delta_k < 1/k\,.$$

Оберемо $\varepsilon > 0$ таким, щоб

$$\varepsilon < (1/2) \cdot h(\partial D', A)\,. \tag{6.2}$$

Позначимо $B_h(x_0, r) = \{x \in \overline{\mathbb{R}^n} : h(x, x_0) < r\}$. Для фіксованого $k \in \mathbb{N}$, покладемо

$$B_k := \bigcup_{x_0 \in K_0} B_h(x_0, \delta_k)\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Оскільки B_k – окіл континуума K_0, за [28, лема 2.2] знайдеться окіл U_k множини K_0, такий, що $U_k \subset B_k$ і $U_k \cap D$ зв'язна. Можна вважати, що U_k – відкрита, так що $U_k \cap D$ є лінійно зв'язною (див. [11, пропозиція 13.1]). Нехай $h(K_0) = m_0$. Тоді знайдуться $z_0, w_0 \in K_0$ такі, що $h(K_0) = h(z_0, w_0) = m_0$. Отже, знайдуться послідовності $\overline{y_k} \in U_k \cap D$, $z_k \in U_k \cap D$ і $w_k \in U_k \cap D$ такі, що $z_k \to z_0$, $\overline{y_k} \to y_0$ і $w_k \to w_0$ при $k \to \infty$. Можна вважати, що

$$h(z_k, w_k) > m_0/2 \quad \forall\ k \in \mathbb{N}\,. \tag{6.3}$$

Оскільки множина $U_k \cap D$ лінійно зв'язна, ми можемо з'єднати точки z_k, $\overline{y_k}$ і w_k, використовуючи деяку криву $\gamma_k \in U_k \cap D$. Як завжди, ми позначаємо через $|\gamma_k|$ носій (образ) кривої γ_k в області D. Тоді $f_{m_k}(|\gamma_k|)$ – компактна множина в D'. Якщо $x \in |\gamma_k|$, то знайдеться $x_0 \in K_0$ таке, що $x \in B(x_0, \delta_k)$. Зафіксуємо довільне $\omega \in A \subset D$. Оскільки $x \in |\gamma_k|$ і, більше того, x – внутрішня точка D, ми можемо використовувати запис $f_{m_k}(x)$ замість $\overline{f}_{m_k}(x)$. Зі співвідношень (6.1) і (6.2), а також за нерівністю трикутника, ми отримаємо, що

$$h(f_{m_k}(x), \omega) \geqslant h(\omega, \overline{f}_{m_k}(x_0)) - h(\overline{f}_{m_k}(x_0), f_{m_k}(x))$$

$$\geqslant h(\partial D', A) - (1/2)\cdot h(\partial D', A) = (1/2)\cdot h(\partial D', A) > \varepsilon \qquad (6.4)$$

для достатньо великих $k\in\mathbb{N}$. Переходячи до inf в (6.4) по всіх $x\in|\gamma_k|$ і $\omega\in A$, ми отримаємо, що $h(f_{m_k}(|\gamma_k|), A)>\varepsilon$, $k=1,2,\ldots$. Оскільки $h(x,y)\leqslant|x-y|$ для будь-яких $x,y\in\mathbb{R}^n$, звідси випливає, що

$$\mathrm{dist}\,(f_{m_k}(|\gamma_k|), A) > \varepsilon, \quad \forall\ k=1,2,\ldots\,. \qquad (6.5)$$

Покриємо множину A кулями $B(x,\varepsilon/4)$, $x\in A$. Оскільки A компакт, ми можемо вважати, що $A\subset\bigcup\limits_{i=1}^{M_0}B(x_i,\varepsilon/4)$, $x_i\in A$, $i=1,2,\ldots,M_0$, $1\leqslant M_0<\infty$. За означенням, M_0 залежить тільки від A, зокрема, M_0 не залежить від k. Покладемо

$$\Gamma_k := \Gamma(A_{m_k}, |\gamma_k|, D)\,. \qquad (6.6)$$

Нехай $\Gamma_{ki}:=\Gamma_{f_{m_k}}(x_i,\varepsilon/4,\varepsilon/2)$, іншими словами, Γ_{ki} складається з усіх кривих $\gamma:[0,1]\to D$, таких що $f_{m_k}(\gamma(0))\in S(x_i,\varepsilon/4)$, $f_{m_k}(\gamma(1))\in S(x_i,\varepsilon/2)$ і $\gamma(t)\in A(x_i,\varepsilon/4,\varepsilon/2)$ при $0<t<1$. Покажемо, що

$$\Gamma_k > \bigcup\limits_{i=1}^{M_0}\Gamma_{ki}\,. \qquad (6.7)$$

Справді, нехай $\widetilde{\gamma}\in\Gamma_k$, іншими словами, $\widetilde{\gamma}:[0,1]\to D$, $\widetilde{\gamma}(0)\in A_{m_k}$, $\widetilde{\gamma}(1)\in|\gamma_k|$ і $\widetilde{\gamma}(t)\in D$ при $0\leqslant t\leqslant 1$. Тоді $\gamma^*:=f_{m_k}(\widetilde{\gamma})\in\Gamma(A, f_{m_k}(|\gamma_k|), D')$. Оскільки кулі $B(x_i,\varepsilon/4)$, $1\leqslant i\leqslant M_0$, утворюють покриття компакта A, знайдеться $i\in\mathbb{N}$ таке, що $\gamma^*(0)\in B(x_i,\varepsilon/4)$ і $\gamma^*(1)\in f_{m_k}(|\gamma_k|)$. За співвідношенням (6.5), $|\gamma^*|\cap B(x_i,\varepsilon/4)\neq\varnothing\neq|\gamma^*|\cap(D'\setminus B(x_i,\varepsilon/4))$. Отже, за [22, теорема 1.I.5.46] знайдеться $0<t_1<1$ таке, що $\gamma^*(t_1)\in S(x_i,\varepsilon/4)$. Можна вважати, що $\gamma^*(t)\notin B(x_i,\varepsilon/4)$ при $t>t_1$. Покладемо $\gamma_1:=\gamma^*|_{[t_1,1]}$. З (6.5) випливає, що $|\gamma_1|\cap B(x_i,\varepsilon/2)\neq\varnothing\neq|\gamma_1|\cap(D\setminus B(x_i,\varepsilon/2))$. Отже, за [22, теорема 1.I.5.46] знайдеться $t_1<t_2<1$ таке, що $\gamma^*(t_2)\in S(x_i,\varepsilon/2)$. Можна вважати, що $\gamma^*(t)\in B(x_i,\varepsilon/2)$ при всіх $t<t_2$. Вважаючи $\gamma_2:=\gamma^*|_{[t_1,t_2]}$, зауважимо, що крива γ_2 є підкривою γ^*, яка належить $\Gamma(S(x_i,\varepsilon/4), S(x_i,\varepsilon/2), A(x_i,\varepsilon/4,\varepsilon/2))$.

Остаточно, $\widetilde{\gamma}$ має підкриву $\widetilde{\gamma_2}:=\widetilde{\gamma}|_{[t_1,t_2]}$, таку, що $f_{m_k}\circ\widetilde{\gamma_2}=\gamma_2$, причому, $\gamma_2\in\Gamma(S(x_i,\varepsilon/4), S(x_i,\varepsilon/2), A(x_i,\varepsilon/4,\varepsilon/2))$. Отже, співвідношення (6.7) встановлене. Покладемо

$$\eta(t)=\left\{\begin{array}{rl} 4/\varepsilon, & t\in[\varepsilon/4,\varepsilon/2],\\ 0, & t\notin[\varepsilon/4,\varepsilon/2]\,. \end{array}\right.$$

Зауважимо, що η задовольняє співвідношення (1.5) при $r_1=\varepsilon/4$ і $r_2=\varepsilon/2$. Оскільки відображення f_{m_k} задовольняє співвідношення (1.4), то припускаючи тут $y_0 = x_i$, отримаємо:

$$M(\Gamma_{f_{m_k}}(x_i, \varepsilon/4, \varepsilon/2)) \leqslant (4/\varepsilon)^n \cdot \|Q\|_1 < c < \infty\,, \tag{6.8}$$

де c – деяка додатна стала і $\|Q\|_1$ – L_1-норма функції Q в D'. З (6.7) і (6.8), враховуючи напівадитивність модуля сімей кривих, отримаємо:

$$M(\Gamma_k) \leqslant \frac{4^n M_0}{\varepsilon^n} \int\limits_{D'} Q(y)\, dm(y) \leqslant c \cdot M_0 < \infty\,. \tag{6.9}$$

Міркуючи так само, як при доведенні співвідношень (4.8) і використовуючи умову (6.3), ми отримаємо, що $M(\Gamma_k) \to \infty$ при $k \to \infty$, що суперечить (6.9). Отримане протиріччя доводить лему. $\Box$

7. Про відображення з фіксованою точкою

Зауважимо, що в теоремі 1.2 присутні досить жорсткі умови як на межу відображеної області, так і на саму сім'ю. Зараз ми вкажемо деякий частинний випадок, в якому вказані умови можна сформулювати в більш витонченому вигляді. З цією метою розглянемо наступне означення. Для областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, точок $a \in D$, $b \in D'$ і довільної вимірної за Лебегом функції $Q : D' \to [0, \infty]$ позначимо через $\mathfrak{S}_{a,b,Q}(D, D')$ сім'ю всіх відкритих, дискретних і замкнених відображень f області D на D', що задовольняють умову (1.4) для кожного $y_0 \in f(D)$, таких що $f(a) = b$. Виконується наступне твердження.

Теорема 7.1. *Припустимо, що область D має слабо плоску межу, жодна із зв'язних компонент якої не вироджена. Якщо $Q \in L^1(D')$ і область D' локально зв'язна на своїй межі, то кожне відображення $f \in \mathfrak{S}_{a,b,Q}(D, D')$ має неперервне продовження $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$, причому, $\overline{f}(\overline{D}) = \overline{D'}$ і, крім того, сім'я $\mathfrak{S}_{a,b,Q}(\overline{D}, \overline{D'})$ усіх продовжених відображень $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$ є одностайно неперервною в $\overline{D}$.*

Доведення. Одностайна непервність сім'ї $\mathfrak{S}_{a,b,Q}(D, D')$, можливість неперервного продовження на межу кожного $f \in \mathfrak{S}_{a,b,Q}(D, D')$ і рівність $\overline{f}(\overline{D}) = \overline{D'}$ випливають з теорем 1.1 і 3.1. Залишилось встановити одностайну неперервність сім'ї продовжених відображень $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$ в точках межі області D.

Доведемо це твердження від супротивного. Припустимо, що сім'я $\mathfrak{S}_{a,b,Q}(\overline{D}, \overline{D'})$ не є одностайно неперервною в деякій точці $x_0 \in \partial D$. Тоді знайдуться точки $x_m \in D$ і відображення $f_m \in \mathfrak{S}_{a,b,Q}(\overline{D}, \overline{D'})$, $m = 1, 2, \ldots$, такі що $x_m \to x_0$ при $m \to \infty$ і, причому, при деякому $\varepsilon_0 > 0$

$$h(f_m(x_m), f_m(x_0)) \geqslant \varepsilon_0\,, \quad m = 1, 2, \ldots\,. \tag{7.1}$$

Оберемо довільним чином точку $y_0 \in D'$, $y_0 \neq b$, і з'єднаємо її з точкою b деякої кривою в D', яку ми позначимо α. Покладемо $A := |\alpha|$. Нехай A_m – повне підняття кривої α при відображенні f_m з початком в точці a (воно існує за [16, лема 3.7]). Зауважимо, що $h(A_m, \partial D) > 0$ за замкненістю відображення f_m. Тепер можливі наступні випадки: або $h(A_m) \to 0$ при $m \to \infty$, або $h(A_{m_k}) \geqslant \delta_0 > 0$ при $k \to \infty$ для деякої зростаючої послідовності номерів m_k і деякого $\delta_0 > 0$.

У першому з цих випадків, очевидно, $h(A_m, \partial D) \geqslant \delta > 0$ при деякому $\delta > 0$. Тоді сім'я відображень $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ одностайно неперервна в точці x_0 за теоремою 1.2, що суперечить умові (7.1).

У другому випадку, якщо $h(A_{m_k}) \geqslant \delta_0 > 0$ при $k \to \infty$, ми також маємо, що $h(A_{m_k}, \partial D) \geqslant \delta_1 > 0$ при деякому $\delta_1 > 0$ за лемою 6.1. Знову ж таки, за теоремою 1.2 сім'я $\{f_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ є одностайно неперервною в точці x_0, і це суперечить умові (7.1).

Отже, в обох з двох можливих випадків ми прийшли до протиріччя з (7.1), і це вказує на невірність припущення про відсутність одностайної неперервності сім'ї $\mathfrak{S}_{a,b,Q}(D, D')$ в $\overline{D}$. Теорема доведена. $\square$

Відкрите питання. В умовах теореми 7.1 присутня умова невиродженості довільної зв'язної компоненти межі області D, і вона істотно використовується при доведенні. **Чи вірний аналогічний висновок без цієї умови?**

Література

[1] Bojarski, B., Gutlyanskii, V., Martio, O., Ryazanov, V. (2013). *Infinitesimal geometry of quasiconformal and bi-Lipschitz mappings in the plane.* Zurich: EMS Tracts in Mathematics, 19. European Mathematical Society (EMS).

[2] Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2012). *The Beltrami equation. A geometric approach. Developments in Mathematics, 26.* New York: Springer.

[3] Gutlyanskii, V.Ya., Ryazanov, V.I. (2013). *Infinitesimal Geometry of Spatial Mappings.* Kiev: Akademperiodyka.

[4] Gutlyanskiĭ, V.Ya., Martio, O., Ryazanov, V.I., Vuorinen, M. (1998). On convergence theorems for space qusiregular mappings. *Forum Math., 10*, 353–375.

[5] Gutlyanskii, V.Ya., Ryazanov, V.I., Yakubov, E. (2015). The Beltrami equations and prime ends. *Journal of Mathematical Sciences, 210*(1) 22–51.

[6] Gutlyanskiĭ, V.Ya., Martio, O., Ryazanov, V.I., Vuorinen, M. (1998). On local injectivity and asymptotic linearity of quasiregular mappings. *Studia Math., 128*(3), 243–271.

[7] Lehto, O., Virtanen, K. (1973). *Quasiconformal Mappings in the Plane.* New York etc.: Springer.

[8] Martio, O., Rickman, S., Väisälä, J. (1969). Definitions for quasiregular mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1., 448*, 1–40.

[9] Martio, O., Rickman, S., Väisälä, J. (1970). Distortion and singularities of quasiregular mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1., 465*, 1–13.

[10] Martio, O., Rickman, S., Väisälä, J. (1971). Topological and metric properties of quasiregular mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1., 488*, 1–31.

[11] Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2009). *Moduli in Modern Mapping Theory.* New York: Springer Science + Business Media, LLC.

[12] Полецкий, Е.А. (1970). Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений. *Матем. сб., 83*(2), 261–272.

[13] Решетняк, Ю.Г. (1982). *Пространственные отображения с ограниченным искажением.* Новосибирск: Наука.

[14] Rickman, S. (1993). *Quasiregular mappings.* Berlin: Springer-Verlag.

[15] Väisälä, J. (1971). *Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings.* Lecture Notes in Math. , 229. Berlin etc.: Springer–Verlag.

[16] Vuorinen, M. (1976). Exceptional sets and boundary behavior of quasiregular mappings in n-space. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1. Math. Dissertationes, 11*, 1–44.

[17] Vuorinen, M. (1980). On the existence of angular limits of n-dimensional quasiconformal mappings. *Ark. Math., 18*, 157–180.

[18] Vuorinen, M. (1988). *Conformal Geometry and Quasiregular Mappings.* Lecture Notes in Math., 1319. Berlin etc.: Springer–Verlag.

[19] Sevost'yanov, E.A. (2016). On open and discrete mappings with a modulus condition. *Ann. Acad. Sci. Fenn., 41*, 41–50.

[20] Sevost'yanov, E.A., Skvortsov, S.A. (2020). On mappings whose inverse satisfy the Poletsky inequality. *Ann. Acad. Scie. Fenn. Math., 45*, 259–277.

[21] Суворов, Г.Д. (1985). *Обобщённый принцип длины и площади в теории отображений.* Киев: Наукова Думка.

[22] Куратовский, К. (1969). *Топология,* т. 2. М.: Мир.

[23] Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2005). On Q-homeomorphisms. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, 30*(1), 49–69.

[24] Рязанов, В.И., Салимов, Р.Р. (2007). Слабо плоские пространства и границы в теории отображений. *Укр. мат. вісник, 4*(2), 199–234; transl. Ryazanov, V.I., Salimov, R.R. (2007). Weakly flat spaces and bondaries in the mapping theory. *Ukr. Math. Bull., 4*(2), 199–233.

[25] Смоловая, Е.С. (2010). Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах. *Укр. мат. журн., 62*(5), 682–689; transl. Smolovaya, E.S., (2010). Boundary behavior of ring Q-homeomorphisms in metric spaces. *Ukrainian Math. J., 62*(5), 785–793.

[26] Севостьянов, Е.А., Скворцов, С.А. (2018). О локальном поведении одного класса обратных отображений. *Укр. мат. вісник, 15*(3), 399–417; translation Sevost'yanov, E.A., Skvortsov, S.A. (2019). On the local behavior of a class of inverse mappings. *J. Math. Sci., 241*(1), 77–89.

[27] Севостьянов, Е.А., Скворцов, С.А. (2018). О сходимости отображений в метрических пространствах с прямыми и обратными модульными условиями. *Укр. мат. журнал, 70*(7), 952–967; transl. Sevost'yanov, E.A., Skvortsov, S.A., On the Convergence of Mappings in Metric Spaces with Direct and Inverse Modulus Conditions. *Ukr. Math. J., 70*(7), 1097–1114.

[28] Herron, J., Koskela, P. (1990). Quasiextremal distance domains and conformal mappings onto circle domains. *Compl. Var. Theor. Appl., 15*, 167–179.

Відомості про авторів

Євген Олександрович Севостьянов
Житомирський державний університет ім. І. Франко,
Житомир, Україна,
Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Слов'янськ, Україна
E-Mail: `esevostyanov2009@gmail.com`

Сергій Олександрович Скворцов
Житомирський державний університет ім. І. Франко,
Житомир, Україна
E-Mail: `serezha.skv@gmail.com`

Олександр Петрович Довгопятий
Житомирський державний університет ім. І. Франко,
Житомир, Україна
E-Mail: `Alexdov1111111@gmail.com`