

І.С. ДОЦЕНКО, Р.С. КОРОБКА

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

(Просп. Академіка Глушкова, 4, Київ 03127; e-mail: ivando@ukr.net, roman.korobka@gmail.com)

КВАНТОВА ТЕЛЕПОРТАЦІЯ ЗАШУМЛЕНИХ ЗАПЛУТАНИХ СТАНІВ

УДК ???

У системі чотирьох кубітів розглянуто вплив наявності білого та кольорового шуму в станах початково пригтованих заплутаних пар кубітів на кінцевий стан пари кубітів, що отримується в результаті операції безконтактного заплутування. Побудовано відповідні матриці густини, проаналізовано перерозподіл часток чистого стану та білого і кольорового шуму. З'ясовано умови збереження та руйнування заплутаності при переході від початкового до кінцевого стану. Проведено також порівняння ентропії фон Неймана початкового і кінцевого станів пари кубітів.

Ключові слова: обмін заплутаністю, телепортація, матриця густини, ентропія фон Неймана

1. Вступ

Після завершення фон Нейманом (1932 р.) побудови концепції квантового опису процесів в природі Ейнштейн, Подольський, Розен (ЕПР) [1], а також Шредінгер [2] вперше звернули увагу на дивний феномен, до якого приводить квантова теорія – на існування квантових станів композитних систем, хвильову функцію яких не можна представити у вигляді добутку хвильових функцій окремих підсистем. Пізніше такі стани стали називати заплутаними станами (entangled states), а сам феномен – “заплутаність” (entanglement). Сама можливість існування заплутаних станів безпосередньо випливає з фундаментального принципу суперпозиції в квантовій теорії.

В 1964 р. Белл (Bell) [3], прийнявши як робочу гіпотезу основні положення, висловлені в [1], формалізував глобальну детерміністичну ідею Ейнштейна в термінах так званої локальної теорії з прихованими параметрами – ЛТВП (LHVM – Local Hidden Variables Model). Белл показав, що положення, закладені в таку модель з необхідністю, приводять до певних обмежень в статистичних кореляціях двочастинкових систем. Матема-

тичне формулювання таких обмежень було подано у вигляді (тепер добре відомих) нерівностей Белла. В той час, як для будь-якої ЛТВП моделі нерівності Белла строго виконуються, відповідні обчислення кореляцій за правилами квантової механіки для заплутаних станів порушують нерівності Белла. Інакше кажучи, в заплутаних квантових станах існують такі кореляції величин двох підсистем, які не може відтворити жодна локальна модель з прихованими параметрами.

З часом стало зрозуміло, що заплутаність є ще одним ресурсом природи, який можна створювати, зберігати, розподіляти, концентрувати, передавати на відстань. В теперішній час заплутаність реально створюється і обробляється в багатьох фізичних лабораторіях. Природа фізичних носіїв заплутаних станів є досить різноманітною, це можуть бути фотони, іони, атоми, молекули, кристали тощо. Відкриття ролі заплутаних станів сприяло появі нових напрямків сучасної фізики, зокрема таких, як квантові обчислення, квантова криптографія, квантова комунікація.

Протягом певного часу вважалось, що заплутаний стан системи, що складається з двох і більше квантових підсистем (частинок, фотонів), створюється лише або при їх одночасному народженні

в одному процесі із спільного джерела, або в результаті взаємодії між ними. Однак в 1993 р. [4] (Zukowski *et al.*) був запропонований протокол, за результатами якого квантові кореляції утворюються між частинками, що можуть знаходитись на великій відстані одна від одної, і які не мали спільного минулого. Такий спосіб утворення заплутаності має назву “entanglement swapping”, що можна перекласти як “обмін заплутаностями”, “переключення заплутаності”, або “передача заплутаності”, і по своїй суті є телепортацією заплутаності на відстань. В подальшому ми умовно будемо називати дане явище процесом безконтактного заплутування, або процесом БКЗ.

Стаття Zukowski *et al.* знайшла широкий відгук у науковій літературі. W. Dur *et al.* [5] розробили протокол квантової комунікації на великій відстані, елементом якого є БКЗ. Хуе *et al.* [6] запропонували схему безконтактного заплутування на основі тричастинкового стану, відомого під назвою стан Грінберга–Горна–Зелінгера (GHZ, Greenberger–Horn–Zeilinger):

$$|\text{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle).$$

Разом з теоретичними розробками протоколів безконтактного заплутування крок за кроком удосконалюються реальні експерименти [7–10] в фізичних лабораторіях.

Для вірного оцінювання реальних можливостей передачі квантового стану на великій відстані слід враховувати всі негативні чинники, які впливають на якість сигналу на всіх етапах його утворення і проходження по каналах зв'язку. Детальне обговорення даної теми можна знайти в роботі [11]. Для вивчення загального впливу всіх чинників необхідно, на нашу думку, досягти повного розуміння фізичних процесів у кожному окремому елементі каналу зв'язку.

Оскільки в протоколах передачі квантових станів на велику відстань за допомогою так званих квантових повторювачів обов'язковим елементом є безконтактне заплутування, то актуальним, на нашу думку, є детальне дослідження даного елемента з врахуванням реальних умов процесу.

Метою даної роботи є теоретичне дослідження впливу наявності шумів у первинно утворених заплутаних станах на кінцевий стан, отриманий в результаті операції безконтактного заплутування.

2. Деякі елементи квантової інформатики та феномен безконтактного заплутування

Для пояснення прийнятих у роботі позначень нагадаємо деякі елементи квантової інформатики і розглянемо суть безконтактного заплутування. Читач, що має певний досвід роботи з таким матеріалом, може пропустити даний розділ.

Базовим поняттям у квантовій інформатиці є “кубіт” (квантовий біт), який описує стан квантової дворівневої системи будь-якої фізичної природи. Для опису стану одного кубіта в гільбертовому просторі слід задати два ортонормованих базисних стани, які за традицією позначаються кет-векторами $|0\rangle$ та $|1\rangle$. Для частинки зі спіном $s = \frac{1}{2}$ в ролі базисних станів можна вибрати стани з проекцією спіна на певну вісь “вгору” та проекцією “вниз”: $|0\rangle \equiv |\uparrow\rangle$, $|1\rangle \equiv |\downarrow\rangle$. Для стану поляризації фотона $|0\rangle$ та $|1\rangle$ може означати, відповідно, горизонтальний та вертикальний стани поляризації. Базис $|0\rangle$, $|1\rangle$ прийнято називати стандартним, або обчислювальним базисом. Замість обчислювального базису можна вибрати, наприклад, базис Адамара:

$$|\chi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle),$$

$$|\chi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle),$$

або будь-який інший базис. Перехід від одного базису до іншого здійснюється унітарним перетворенням. Ортонормованість базисних станів визначається значеннями скалярних добутоків:

$$\langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0, \langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1,$$

$$\langle \chi_1|\chi_2\rangle = \langle \chi_2|\chi_1\rangle = 0,$$

$$\langle \chi_1|\chi_1\rangle = \langle \chi_2|\chi_2\rangle = 1.$$

Отже, довільний стан окремого кубіта можна завжди зобразити у вигляді

$$|\chi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

з умовою нормування $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Принциповою відмінністю кубіта від класичного біта є можливість існування станів у вигляді суперпозиції базисних векторів.

Стан системи з двох кубітів описується вектором в чотиривимірному гільбертовому просторі, який є тензорним добутком гільбертових просторів окремих кубітів. Найбільш поширеними базами в такому просторі є обчислювальний (стандартний) базис у вигляді тензорного добутку відповідних базисних станів окремих кубітів:

$$|0_1\rangle \cdot |0_2\rangle, |0_1\rangle \cdot |1_2\rangle, |1_1\rangle \cdot |0_2\rangle, |1_1\rangle \cdot |1_2\rangle, \quad (1)$$

та базис Белла:

$$\begin{cases} |\Psi^+\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle \cdot |1_2\rangle + |1_1\rangle \cdot |0_2\rangle), \\ |\Psi^-\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle \cdot |1_2\rangle - |1_1\rangle \cdot |0_2\rangle), \\ |\Phi^+\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle \cdot |0_2\rangle + |1_1\rangle \cdot |1_2\rangle), \\ |\Phi^-\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle \cdot |0_2\rangle - |1_1\rangle \cdot |1_2\rangle), \end{cases} \quad (2)$$

де індекси 1 та 2 позначають номер кубіта.

Стани Белла прийнято також називати ЕПР-парами, оскільки саме про стани подібного типу йшлося в роботі Ейнштейна, Подольського, Розена. Всі стани Белла (2) є заплутаними, оскільки їх не можна представити у вигляді добутку векторів станів окремих кубітів.

Найбільш цікавим і незвичним феноменом, що ґрунтується на заплутаності, є квантова телепортация, коли шляхом застосування локальних операцій і класичних комунікацій (LOCC – Local Operations and Classical Communication) невідомий квантовий стан передається на будь-яку відстань. Під локальними операціями маються на увазі унітарні перетворення і вимірювання, що виконуються лише окремо над кожною з просторово розділених підсистем загальної системи.

Вперше схему (протокол) телепортации невідомого стану кубіта запропоновано в [12] (Bennett *et al.*), де для телепортации використовується заплутаність EPR пари. Стаття Bennett'а стимулювала розробку численних схем телепортации з носіями заплутаності різної природи. Зокрема, серед інших слід відзначити протокол телепортации з використанням заплутаності тричастинкового стану GHZ [13] (Karlsson *et al.*), а також симетричного стану Вігнера [14] (Shi *et al.*):

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle).$$

Удосконалена схема на основі асиметричного стану Вігнера [15] (Li *et al.*):

$$|W_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|001\rangle + \frac{1}{2}(|010\rangle + |100\rangle)$$

дозволяє виконати телепортацию стану окремого фотона з високою ймовірністю.

Більш розгорнуте посилення на оригінальні роботи з квантової телепортации можна знайти, наприклад, в [16, 17].

Перейдемо до пояснення суті феномену безконтактного заплутування.

Нехай два джерела незалежно утворюють по одній парі кубітів в одному з заплутаних ЕПР станів (2). В експерименті [7] короткі імпульси ультрафіолетових променів пропускалися крізь нелінійний ВВО-кристал ($\beta - \text{BaB}_2\text{O}_4$). Внаслідок параметричної вниз-конверсії типу II (parametric down conversion (PDC)) утворювались пари фотонів в поляризаційно заплутаному стані Белла $|\Psi^-\rangle$. При незалежному утворенні двох таких заплутаних пар вектор стану системи 4-х кубітів представляється у вигляді тензорного добутку векторів станів окремих пар кубітів:

$$|\Psi_{1234}\rangle = |\Psi_{12}^-\rangle \cdot |\Psi_{34}^-\rangle.$$

Над парою кубітів (фотонів) 2 і 3 далі виконуються проєктивне вимірювання в базисі Белла (2). Вимірювальний прилад налаштований таким чином, що по схемі збігання сигналів з детекторів виділяється подія, коли пара фотонів 2 і 3 знаходиться в стані $|\Psi_{23}^-\rangle$. Така операція називається неповним проєктивним вимірюванням. Математично дана операція розглядається як проєктування стану $|\Psi_{1234}\rangle$ на стан $|\Psi_{23}^-\rangle$.

Шляхом перегрупування доданків вектор стану $|\Psi_{1234}\rangle$ можна подати у вигляді

$$|\Psi_{1234}\rangle = \frac{1}{2} \left(|\Psi_{14}^+\rangle \cdot |\Psi_{23}^+\rangle - |\Psi_{14}^-\rangle \cdot |\Psi_{23}^-\rangle - |\Phi_{14}^+\rangle \cdot |\Phi_{23}^+\rangle + |\Phi_{14}^-\rangle \cdot |\Phi_{23}^-\rangle \right).$$

Отже, в результаті проєктування стан кубітів 1 і 4 “колапсує” в стан Белла $|\Psi_{14}^-\rangle$:

$$\langle \Psi_{23}^- | \Psi_{1234} \rangle = -\frac{1}{2} |\Psi_{14}^- \rangle,$$

пара кубітів з номерами 1 та 4 опиняється в тому самому стані $|\Psi^-\rangle$, що і попередньо приготовані стани двох пар 1 і 2 та 3 і 4.

Оскільки операція проєктування на певний стан є неповним вимірюванням фон Неймана, то в результаті проєктування отримується вектор стану,

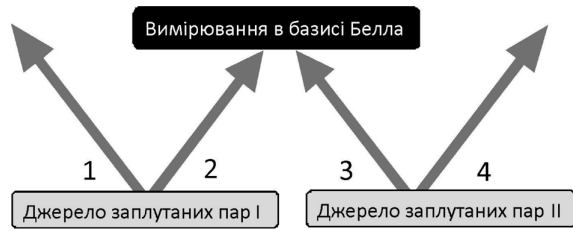


Рис. 1. Схема реалізації процесу безконтактного заплутування

що є ненормованим. У даному випадку при багатократному повторенні операції приготування стану $|\Psi_{1234}\rangle$ і наступним проектуванням на $|\Psi_{23}^-\rangle$ в середньому лише одна подія з чотирьох спроб дає бажаний результат $|\Psi_{23}^-\rangle$. Але, після того, як подія зафіксована, вектор стану вважається нормованим на одиницю. Зауважимо ще раз, що попередньо приготовані пари кубітів створювалися незалежно одна від однієї, і вони ніяким чином не взаємодіяли між собою.

Процес БКЗ можна зобразити у вигляді простої схеми (рис. 1) [7].

Підкреслимо, що заплутаність кубітів 1 і 4 виникає в момент вимірювання, під час проектування на стан $|\Psi_{23}^-\rangle$. Кубіти 1 і 4 при цьому можуть бути один від одного на будь-якій відстані.

У розглянутому прикладі вважається, що обидві пари кубітів приготовані в чистому стані Белла $|\Psi^-\rangle$, і в результаті процедури БКЗ отримується той самий чистий заплутаний стан $|\Psi^-\rangle$ кубітів 1 та 4.

Розглянемо тепер феномен БКЗ у випадку, коли кожна з двох початкових пар кубітів утворюється у мішаному стані.

3. Безконтактне заплутування за наявності білого шуму у початкових станах

Нехай до чистого стану $|\Psi^-\rangle$ у суміші додаються всі базисні стани з однаковими ваговими коефіцієнтами. Оператор густини такого стану, що має назву стан Вернера [18], подається у вигляді:

$$\hat{\rho}_W = p|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| + \frac{1-p}{4}\hat{I}, \quad (3)$$

де \hat{I} – одиничний оператор в чотиривимірному просторі, p – параметр чистоти стану, $p \in [0, 1]$. При $p = 1$ маємо оператор густини чистого стану $|\Psi^-\rangle$, а при $p = 0$ маємо так званий білий шум.

Шум називається білим, оскільки він утворюється всіма базисним станами з однаковими ваговими коефіцієнтами. Відповідна матриця густини в обчислювальному базисі має вигляд

$$\rho_W = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+p & -2p & 0 \\ 0 & -2p & 1+p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p \end{pmatrix}, \quad (4)$$

а в базисі Белла (2) вона представляється діагональною матрицею:

$$\rho_W^B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+3p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Оператор густини такого стану можна подати у вигляді суміші станів Белла:

$$\hat{\rho}_W = \frac{1}{4} \left\{ (1-p)|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| + (1+3p)|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| + (1-p)|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + (1-p)|\Phi^-\rangle\langle\Phi^-| \right\}.$$

Оскільки пари кубітів приготовані незалежно, то оператор густини системи двох пар кубітів представляється у вигляді тензорного добутку станів (3):

$$\hat{\rho}_{1234} = \hat{\rho}_{12} \otimes \hat{\rho}_{34}. \quad (6)$$

У результаті проектування (6) на стан Белла $|\Psi_{23}^-\rangle$ отримуємо матрицю густини пари кубітів 1 та 4:

$$\hat{\rho}_{14} = \langle\Psi_{23}^-|\hat{\rho}_{1234}|\Psi_{23}^-\rangle. \quad (7)$$

Матричне представлення $\hat{\rho}_{14}$ в обчислювальному базисі та базисі Белла отримується з (4) та (5) простою заміною в них $p \rightarrow p_1 \cdot p_2$, де p_1 і p_2 – вагові коефіцієнти чистого стану відповідно першої і другої пар кубітів (пар частинок 1, 2 та 3, 4).

Звідси видно, що якщо одна з пар кубітів приготована в чистому стані ($p_1 = 1$ або $p_2 = 1$), то матриця густини ρ_{14} в точності повторює матрицю густини пари кубітів, приготованих у мішаному початковому стані. Якщо ж обидві пари кубітів приготовані в мішаному стані, то результуючий стан пари кубітів 1 та 4 буде більш зашумленим, ніж стан кожної з початково приготованих пар.

При представленні оператора густини у формі (3) ми вважаємо, що зашумленість стану зростає

із зменшенням значення параметра p , оскільки при цьому частка бажаного чистого стану $|\Psi^-\rangle$ в суміші зменшується, а частка шуму (коефіцієнт $1-p$) зростає.

Розглянемо детально випадок $p_1 = p_2 = p$. Оператор густини кінцевого стану кубітів після БКЗ-процесу можна представити у вигляді, подібному до (3), а саме:

$$\hat{\rho}_{14W} = p^2 |\Psi_{14}^-\rangle \langle \Psi_{14}^-| + \frac{1-p^2}{4} \hat{I}_{14}. \quad (8)$$

Матриця густини цього ж стану в обчислюваль-ному базисі матиме вигляд

$$\tilde{\rho}_{14W} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-p^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+p^2 & -2p^2 & 0 \\ 0 & -2p^2 & 1+p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p^2 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

а у базисі Белла, відповідно

$$\tilde{\rho}_{14W}^B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-p^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+3p^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p^2 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

тобто оператор густини (8), матриці (9) та (10) отримується відповідно до (3), (4) та (5) простою заміною $p \rightarrow p^2$. Це означає, що стани початкової і кінцевої пар кубітів подібні з точністю до вказаної вище заміни. Оскільки $p \in [0, 1]$, то в цьому проміжку $p^2 \leq p$ і $1-p^2 \geq 1-p$, що свідчить про збільшення домішки білого шуму.

Порівняння значень ентропії фон Неймана для стану кожної з початкових та кінцевої пари кубітів дає наочну демонстрацію збільшення домішки білого шуму. На рис. 2 наведено графіки залежності ентропії від параметра p для обох систем. Суцільна крива відповідає ентропії пари кубітів 1 і 4, штрихова крива відповідає ентропії кожної з початкових пар кубітів.

З рисунка видно, що ентропія кінцевої пари кубітів при $0 < p < 1$ перевищує ентропію кожної пари кубітів у початковому стані, що також свідчить про збільшення шуму. Найбільша різниця ентропій $\Delta S \approx 0,44$ спостерігається при $p \approx 0,72$.

Приведені (редуковані) матриці густини, що відповідають матрицям (4) та (9), будуть пропорційні одиничним:

$$\rho_1^{\text{Red}} = \rho_2^{\text{Red}} = \frac{1}{2} I = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

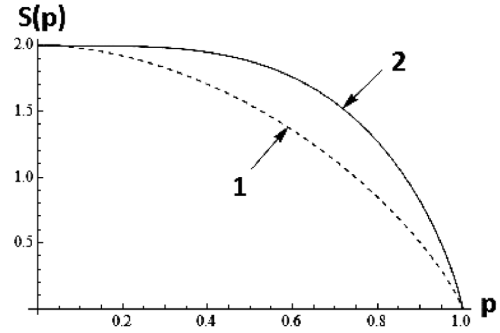


Рис. 2. Залежність ентропії фон Неймана стану системи пари кубітів від параметра p . Крива 1 – для стану кожної з початково приготованих пар кубітів (стан Вернера), крива 2 – для стану пари кубітів, отриманої в результаті виконання БКЗ процесу

$$\tilde{\rho}_1^{\text{Red}} = \tilde{\rho}_4^{\text{Red}} = \frac{1}{2} I = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Такий результат є цілком зрозумілим: додавання до чистого стану системи білого шуму не може зменшити ентропію в підсистемах. Оскільки редуковані матриці густини являють собою суміш обох базисних станів, то ентропія фон Неймана для цих станів не залежить від p і дорівнює 1.

Частково-транспонована матриця густини для початкового стану пари кубітів у стандартному базисі має вигляд

$$\rho_W^{\text{PT}} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-p & 0 & 0 & -2p \\ 0 & 1+p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+p & 0 \\ -2p & 0 & 0 & 1-p \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Для двохкубітових систем необхідною і достатньою умовою відсутності заплутаності у системі, за критерієм Переса–Городецького [19, 20], є додатновизначеність частково-транспонованої матриці густини цієї ж системи. Порухення цієї умови свідчатиме про наявність заплутаності.

Знайдемо область значень коефіцієнта p , за яких початкова система пари кубітів є заплутаною. Діагоналізуємо (11):

$$\rho_{\text{diag}}^{\text{PT}} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-3p \end{pmatrix}.$$

Для $p \in [0, 1]$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1+p}{4} \geq 0$. Єдине власне число, що може набувати від'ємних значень, це λ_4 :

$$\lambda_4 = \frac{1-3p}{4} < 0 \quad \implies \quad p > \frac{1}{3}.$$

Для стану Вернера цей результат є добре відомим і вперше наведений в роботі [18].

Область значень p , за яких стан пари кубітів, утворений в процесі БКЗ, є заплутаним, легко отримати, використавши подібність стану початкової і кінцевої пари з точністю до заміни $p \rightarrow p^2$:

$$p^2 > \frac{1}{3} \implies p > \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,58.$$

Отже, при $\frac{1}{3} < p < \frac{1}{\sqrt{3}}$ заплутаність в результаті операції БКЗ втрачається збільшення наявності домішки білого шуму.

4. Безконтактне заплутування за наявності у початкових станах кольорового шуму

Протягом певного часу загально прийнято було вважати, що при створенні в лабораторії заплутаних станів реальний стан являє собою мішаний стан, що описується оператором густини у вигляді суміші бажаного максимально чистого заплутаного стану та домішки білого шуму (стан Вернера (3)).

У 2005 р. Adan Cabello *et al.* [21] дослідивши створення поляризаційно заплутаних станів пари фотонів у процесі параметричної вниз-конверсії (PDC), прийшов до висновку, що реально створені стани не можуть бути безкольоровими. Наприклад, для створення в експериментальному приладі чистого стану Белла $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ слід досягти ідеального узгодження по фазі і по часу прибуття фотонів до місця їх інтерференції. За ідеальних умов фотони в місці інтерференції стають нерозрізненими, і в результаті інтерференції утворюється заплутаний стан $|\Psi^-\rangle$ з певною відносною фазою між станами $|01\rangle$ та $|10\rangle$.

В результаті неможливості ідеальної синхронізації в реальному приладі до стану $|\Psi^-\rangle$ домішуються окремо ті самі стани $|01\rangle$ та $|10\rangle$ без певного фазового узгодження, що приводить до наявності в реальному стані кольорового шуму, і оператор густини такого стану набуває вигляду

$$\hat{\rho}_C = p|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| + \frac{1-p}{2}(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|), \quad (12)$$

де p – параметр, що характеризує частку чистого стану $|\Psi^-\rangle$ в суміші. Шум в (12) називають кольоровим, оскільки на відміну від білого шуму, він складається з суміші базисних станів з різними ваговими коефіцієнтами.

В тій самій роботі [21] автори показали, що порушення нерівності Белла є надзвичайно стійким, щодо зміни частки кольорового шуму в стані (12). Тобто стан (12) порушує нерівність Белла за будь-якого співвідношення в ньому чистого стану $|\Psi^-\rangle$ і кольорового шуму (тобто при всіх $0 < p \leq 1$) в той час, як стан Вернера (3) не порушує нерівність Белла, якщо частка білого шуму перебільшує деяке критичне значення (нестійкість порушення нерівності Белла по відношенню до білого шуму).

Fabio A. Bavino *et al.* [22] своїми експериментами з кореляцій поляризацій пари фотонів переконливо підтвердили наявності кольорового шуму і стійкість порушення нерівності Белла відносно кольорового шуму і нестійкість по відношенню до білого шуму. В роботі [23] досліджено умови порушення нерівності Белла за наявності в матриці густини одночасно обох типів шумів.

Розглянемо тепер та проаналізуємо кінцевий стан пари кубітів 1 і 4 після виконання операції безконтактного заплутування за наявності кольорового шуму у початкових станах двох пар кубітів.

Вважаємо, що початковий стан кожної пари кубітів за наявності кольорового шуму має вигляд (12). Матриця густини цього стану в стандартному базисі має вигляд:

$$\rho_C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -p & 0 \\ 0 & -p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

а у базисі Белла:

$$\rho_C^B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Підставляючи оператор густини початкових пар кубітів (12) з різними параметрами p_1 і p_2 у вирази (6) та (7), одержуємо $\hat{\rho}_{14}$. Матричне представлення ρ_{14} в обчислювальному базисі та базисі Белла отримується з (13) та (14) простою заміною в них $p \rightarrow p_1 \cdot p_2$.

Аналогічно до випадку білого шуму бачимо, що у випадку, коли одна з початкових пар кубітів приготована в чистому стані ($p_1 = 1$ або $p_2 = 1$), то матриця густини ρ_{14} в точності повторює матрицю густини пари кубітів, приготованих у початковому мішаному стані.

При $p_1 = p_2 = p$ оператор густини кінцевого стану кубітів можна представити у вигляді, подібному до (12), а саме:

$$\hat{\rho}_{14C} = p^2 |\Psi_{14}^-\rangle \langle \Psi_{14}^-| + \frac{1-p^2}{2} (|0_1 1_4\rangle \langle 0_1 1_4| + |1_1 0_4\rangle \langle 1_1 0_4|).$$

Матриця густини цього ж стану в обчислювальному базисі матиме вигляд

$$\tilde{\rho}_{14C} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -p^2 & 0 \\ 0 & -p^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

а у базисі Белла:

$$\tilde{\rho}_{14C}^B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-p^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+p^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно до попереднього випадку стани початкової і кінцевої пар кубітів подібні, з точністю до заміни $p \rightarrow p^2$. Оскільки $p \in [0, 1]$, то в цьому проміжку $p^2 \leq p$ і $1 - p^2 \geq 1 - p$, що свідчить про збільшення домішки кольорового шуму.

На рис. 3 наведено порівняльні графіки залежності ентропії фон Неймана від параметра p для стану кожної із початково приготованих пар кубітів (штрихова крива) і кінцевого стану пари кубітів 1 та 4 (суцільна крива).

З рисунка видно, що ентропія кінцевої пари кубітів при $0 < p < 1$ перевищує ентропію пар кубітів у початковому стані, що також свідчить про збільшення шуму. Найбільша різниця ентропій $\Delta S \approx 0,21$ спостерігається при $p \approx 0,76$.

Зазначимо також, що максимальне значення ентропії (при $p = 0$) дорівнює $S_{\max} = 1$, в той час як у попередньому випадку (білий шум) $S_{\max} = 2$. Така різниця є цілком зрозумілою, оскільки білий шум являє собою найбільш хаотичний стан.

Редуковані матриці густини, що відповідають матрицям (13) та (15), пропорційні одиничній матриці, як і у попередньому випадку, а отже ентропія фон Неймана для стану кожного кубіта із пари не залежить від p і дорівнює 1.

Частково-транспонована матриця густини для початкового стану пари кубітів у стандартному базисі має вигляд

$$\rho_C^{PT} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

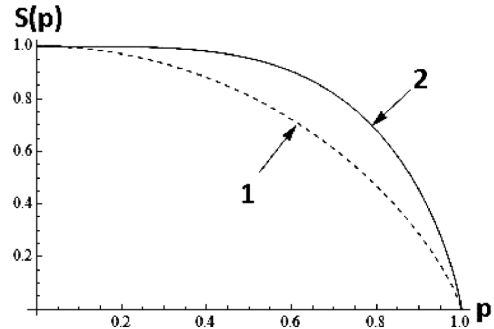


Рис. 3. Залежність ентропії фон Неймана від параметра p за наявності кольорового шуму. Крива 1 – для стану кожної з початково приготованих пар кубітів, крива 2 – для стану, отриманого в результаті виконання БКЗ операції

а власні числа даної матриці мають значення $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = p$, $\lambda_4 = -p$. Значення $\lambda_4 < 0$ при $0 < p \leq 1$ свідчить про те, що початково приготована пара кубітів знаходиться в заплутаному стані при довільному домішку кольорового шуму.

Використовуючи подібність стану початкової і кінцевої пари ($p \rightarrow p^2$), робимо висновок, що пара кубітів 1 і 4 після виконання операції БКЗ буде також заплутаною при будь-яких значеннях параметра p .

5. Безконтактне заплутування за одночасної наявності білого та кольорового шуму у початкових станах

Розглянемо тепер операцію безконтактного заплутування за одночасної наявності білого і кольорового шуму у початкових станах двох пар кубітів.

Стан початково приготованих пар у даному випадку визначається оператором густини [23]:

$$\hat{\rho}_{CW} = p |\Psi_{12}^-\rangle \langle \Psi_{12}^-| + \frac{r}{2} (|01\rangle \langle 01| + |10\rangle \langle 10|) + \frac{1-p-r}{4} \hat{I}_{12}, \quad (16)$$

де p – частка чистого стану, $p \in [0, 1]$, r – частка кольорового шуму (ваговий коефіцієнт), $r \in [0, 1 - p]$. Ваговий коефіцієнт білого шуму, який дорівнює $1 - p - r$, позначимо як q , $p + r + q = 1$ – умова нормування.

Матриця густини стану (16) в стандартному базисі має вигляд

$$\rho_{CW} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-p-r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+p+r & -2p & 0 \\ 0 & -2p & 1+p+r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p-r \end{pmatrix}, \quad (17)$$

а у базисі Белла:

$$\rho_{CW}^B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-p+r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+3p+r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p-r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p-r \end{pmatrix}$$

Підставляючи оператор густини початкових пар кубітів (16) з різними параметрами p_1, p_2, r_1 та r_2 у вирази (6) та (7), отримуємо матричне представлення стану пари кубітів 1 та 4 в кінцевому стані, після виконання операції БКЗ:

$$\rho_{14CW} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix},$$

де $a_1 = 1 - (p_1 + r_1)(p_2 + r_2)$, $a_2 = 1 + (p_1 + r_1)(p_2 + r_2)$, $a_3 = -2p_1p_2$ в обчислювальному базисі, і

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{14CW}^B &= \frac{1}{2} \text{diag}(1 - 2p_1p_2 + (p_1 + r_1)(p_2 + r_2); \\ &1 + 2p_1p_2 + (p_1 + r_1)(p_2 + r_2); \\ &1 - (p_1 + r_1)(p_2 + r_2); 1 - (p_1 + r_1)(p_2 + r_2)) \end{aligned}$$

у базисі Белла.

При $p_1 = p_2 = p$, $r_1 = r_2 = r$ оператор густини кінцевого стану кубітів можна представити у вигляді, подібному до (16), а саме:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{14} &= \tilde{p} |\Psi_{14}^-\rangle \langle \Psi_{14}^-| + \frac{\tilde{r}}{2} (|0_1 1_4\rangle \langle 0_1 1_4| + \\ &+ |1_1 0_4\rangle \langle 1_1 0_4|) + \frac{\tilde{q}}{4} \hat{I}_{14}, \end{aligned} \quad (18)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= p^2, \quad \tilde{r} = r^2 + 2pr, \\ \tilde{q} &= 1 - (\tilde{p} + \tilde{r}) = 1 - (p + r)^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Проаналізуємо перерозподіл часток чистого стану та кольорового і білого шуму в результаті БКЗ-процесу.

При $p = 1$ (тоді $r = 0$ і $q = 0$) маємо: $\tilde{p} = 1, \tilde{r} = 0, \tilde{q} = 0$. Отже, початковий чистий стан переходить в чистий стан – домішки шумів у кінцевому стані відсутні.

При $p = 0$ та $r \neq 0, q = 1 - r \implies \tilde{p} = 0, \tilde{r} = r^2, \tilde{q} = 1 - r^2$. Оскільки $r^2 < r$ ($0 < r < 1$) і $1 - r^2 > 1 - r$, то в результаті процесу БКЗ частка кольорового шуму зменшується, а білого шуму збільшується.

При $p = 0, r = 0$ (тоді $q = 1$) $\implies \tilde{p} = 0, \tilde{r} = 0, \tilde{q} = q = 1$, тобто білий шум залишається без зміни.

При $0 < p < 1$ маємо $p^2 < p$ і $(p+r)^2 < p+r$, отже $\tilde{p} < p, \tilde{q} > q$ – частка чистого стану зменшується, а частка білого шуму збільшується.

Якщо в початковому стані (16) частка чистого стану дорівнює частці білого шуму $p = 1 - (p + r) \implies p = \frac{1-r}{2}$, то в результаті БКЗ-процесу частка кольорового шуму не змінюється. Дійсно:

$$\tilde{r} = r^2 + 2pr = r^2 + 2 \cdot \frac{1-r}{2} \cdot r = r.$$

Тоді очевидно, що при $p < q$ ($p < \frac{1-r}{2}$) отримаємо $\tilde{r} < r$ – частка кольорового шуму зменшується, тобто зростання білого шуму відбувається за рахунок зменшення часток чистого стану та кольорового шуму.

При $p > q$ ($p > \frac{1-r}{2}$) кольоровий і білий шум зростають за рахунок зменшення частки чистого стану.

Матриця густини стану (18) в стандартному базисі має вигляд

$$\tilde{\rho}_{14CW} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

де $a_1 = 1 - (p + r)^2$, $a_2 = 1 + (p + r)^2$, $a_3 = -2p^2$, а у базисі Белла

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{14CW}^B &= \frac{1}{2} \text{diag}(1 - 2p^2 + (p + r)^2; 1 + 2p^2 + (p + r)^2; \\ &1 - (p + r)^2; 1 - (p + r)^2). \end{aligned}$$

Для будь-яких $p \in [0,1]$ та $r \in [0,1-p]$ значення ентропії фон Неймана $S_{fin}(p,r)$ стану кінцевої пари кубітів буде перевищувати значення ентропії $S_{in}(p,r)$ стану кожної з початкових пар кубітів. Найбільша різниця ентропій $\Delta S \approx 0,4$ спостерігається при $p \approx 0,72, r \approx 0,15$.

Приведені матриці густини, що відповідають матрицям (17) та (20), будуть пропорційними одиничній матриці, як і у попередніх випадках, а отже ентропія фон Неймана для стану кожного кубіта із пари не залежить від p та r і дорівнює 1.

Частково-транспонована матриця густини для стану кожної з початково приготованих пар в стандартному базисі має вигляд

$$\rho_{CW}^{PT} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-p-r & 0 & 0 & -2p \\ 0 & 1+p+r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+p+r & 0 \\ -2p & 0 & 0 & 1-p-r \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Знайдемо область значень коефіцієнтів p та r , за яких стан кожної з початково приготованих пар є заплутаним. Діагоналізуємо (21):

$$\rho_{diag}^{PT} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+p+r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+p+r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+p-r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-3p-r \end{pmatrix}.$$

В силу умов на коефіцієнти ($p \in [0, 1]$, $r \in [0, 1-p]$) тільки одне власне значення частково-транспонованої матриці може бути меншим від нуля, а саме:

$$1 - 3p - r \leq 0 \implies 3p + r \geq 1. \quad (22)$$

Цей результат раніше було отримано в роботі [23].

Знайдемо тепер область значень p та r , за яких стан пари кубітів, утворений операцією БКЗ, є заплутаним. Використаємо для цього співвідношення (19) та (22):

$$3\tilde{p} + \tilde{r} \geq 1 \implies 3p^2 + r^2 + 2pr \geq 1 \implies 2p^2 + (p+r)^2 \geq 1.$$

На рис. 4 зображено області значень параметрів p та r , за яких початкова та кінцева система кубітів є заплутаними або незаплутаними.

З графіка видно, що існує така область значень параметрів (на рис. 4 позначена як 2), за яких стан

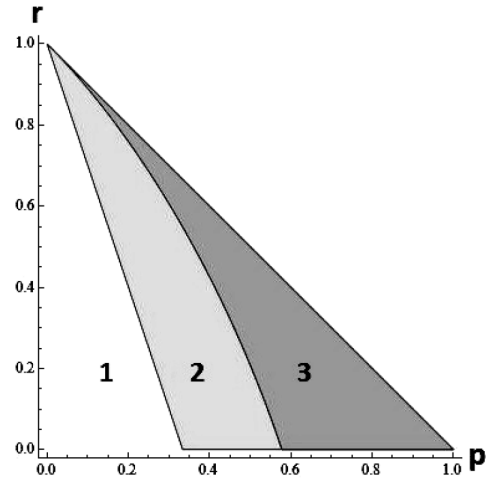


Рис. 4. Области значень параметрів p та r , за яких: 1 – початкова і кінцева система є незаплутаними, 2 – початкова система заплутана, кінцева незаплутана, 3 – початкова і кінцева системи є заплутаними

кожної з початково приготованих пара є заплутаним, а стан пари, отриманої в результаті операції БКЗ, є незаплутаним. Тобто після процесу безконтактного заплутування можлива ситуація, коли утвориться кінцевий стан кубітів 1 і 4, який внаслідок впливу шумів не буде заплутаним, у той час як початкові пари кубітів будуть заплутаними.

6. Висновки

1. Якщо одна з пар кубітів приготована в чистому стані ($p_1 = 1$, або $p_2 = 1$), то матриця густини пари кубітів ρ_{14} , що отримана в результаті процесу безконтактного заплутування, в точності повторює матрицю густини другої пари кубітів, приготованої в мішаному стані. Якщо ж обидві пари кубітів приготовано в мішаному стані, то кінцевий стан пари кубітів 1 та 4 буде більш зашумленим, ніж стан кожної з початково приготованих пар, що приводить до збільшення ентропії фон Неймана пари кубітів.
2. В залежності від початкового розподілу часток чистого стану, кольорового шуму та білого шуму в БКЗ-процесі реалізуються різні схеми перерозподілу цих часток.
3. Визначено область значень параметрів p і r при яких, в процесі безконтактного заплутування, заплутаний стан переходить в незаплутаний.

1. A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
2. E. Schrödinger, *Naturwiss.* **23**, 807 (1935).
3. J.S. Bell, *Physics* **1**, 195 (1964).
4. M. Zukowski, A. Zeilinger, M.A. Horne, and A.K. Ekert, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 4287 (1993).
5. W. Dur, H.J. Briegel, J.I. Cirac, and P. Zoller, *Phys. Rev. A* **59**, 169 (1999).
6. Z.Y. Xue, Y.M. Yi, and Z.L. Cao, *Chin. Phys.* **15**, 1421 (2006).
7. J. Wei-Pan, D. Bouwmeester, and H. Weinfurter, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 3891 (1998).
8. T. Jennewein, G. Weihs, J.-W. Pan, and A. Zeilinger, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 017903 (2002).
9. H. de Riedmatten, I. Marcikic, J.A.W. van Houwelingen, W. Tittel, H. Zbinden, and N. Gisin, *Phys. Rev. A* **71**, 050302 (2005).
10. C.Y. Lu, T. Yang, and J.W. Pan, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 020501 (2009).
11. A. Scherer, R. Howard, B.C. Sanders, and W. Tittel, *Phys. Rev. A* **80**, 062310 (2009).
12. C.H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, and W.K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993).
13. A. Karlsson and M. Bourennane, *Phys. Rev. A* **58**, 4394 (1998).
14. B.S. Shi and A. Tomita, *Phys. Lett. A* **296**, 161 (2002).
15. L. Li and D. Qiu, *J. Phys. A* **40**, 10871 (2007).
16. R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 865 (2009).
17. C.Y. Hu and J.G. Rarity, *Phys. Rev. B* **83**, 115303 (2011).
18. R.F. Werner, *Phys. Rev. A* **40**, 4277 (1989).
19. A. Peres, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1413 (1996).
20. M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, *Phys. Lett. A* **223**, 8 (1996).
21. A. Cabello and A. Feito, *Phys. Rev. A* **72**, 052112 (2005).
22. F.A. Bovino, and G. Castagnoli, *Phys. Rev. A* **73**, 062110 (2006).
23. I.S. Dotsenko and V.G. Voronov, *Ukr. J. Phys.* **53**, 1006 (2008).

Одержано 15.17.11

I.S. Доценко, P.C. Коробка

КВАНТОВАЯ ТЕЛЕПОРТАЦИЯ ЗАПУТАННЫХ СОСТОЯНИЙ В ПРИСУТСТВИИ ШУМА

Резюме

В системе 4 кубитов рассмотрено влияние наличия белого и цветного шума в состояниях изначально приготовленных запутанных пар кубитов на конечное состояние пары кубитов, полученное в результате операции entanglement swapping. Построены соответствующие матрицы плотности, проанализировано перераспределение частей чистого состояния, белого и цветного шума. Получены условия сохранения и разрушения запутанности при переходе от начального к конечному состоянию. Проведено сравнение энтропии фон Неймана для начального и конечного состояний пар кубитов.

I.S. Dotsenko, R.S. Korobka

QUANTUM TELEPORTATION OF ENTANGLED STATES IN THE PRESENCE OF NOISE

Summary

On the basis of a system of four qubits, the influence of white and colored noises in the states of initially prepared entangled qubit pairs on the final state obtained as a result of the entanglement swapping has been considered. The corresponding density matrices are obtained, and the redistribution of fractions for the pure state and white and colored noises is analyzed. Conditions for the entanglement preservation and destruction in the course of the transition from the initial to the final state are determined. A comparison between the von Neumann entropy for the initial and final states of qubits is carried out.