Ю.А. СИТЕНКО,[1] В.М. ГОРКАВЕНКО[2]

[1] Інститут теоретичної фізики імені М.М. Боголюбова НАН України
(Вул. Метрологічна, 14б, Київ 03143)

[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка
(Вул. Володимирська, 64, Київ 01601)

УДК 539

ПОЛЯРИЗАЦІЯ ВАКУУМУ КВАНТОВАНОГО СПІНОРНОГО ПОЛЯ ЗА НАЯВНОСТІ ТОПОЛОГІЧНОГО ДЕФЕКТУ У ДВОВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ [1]

Двовимірний простір з топологічним дефектом є поперечним зрізом тривимірного простору з вихором Абрикосова–Нільсена–Олесена, який являє собою непроникливу для квантованої матерії трубку з потоком калібрувального поля. Заряджене поле спінорної матерії квантується в цьому зрізі, задовольняючи найбільш загальним математично допустимим граничним умовам. Показано, що струм та магнітне поле індукуються у вакуумі. Вивчається залежність результатів від граничних умов. Встановлено, що вимога скінченності повного індукованого вакуумного магнітного потоку усуває неоднозначність у виборі граничних умов. Обговорюються відмінності між випадками масивної та безмасової спінорної матерії.

Ключові слова: поляризація вакууму, вихор, струм, магнітний потік.

1. Вступ

Топологічні ефекти представляють великий інтерес внаслідок того, що вони пов'язані з загальними властивостями простору-часу та у зв'язку з численними практичними застосуваннями. У 1959 р. Ааронов та Бом [1] розглянули квантовомеханічну задачу розсіяння заряджених частинок на магнітному вихорі та виявили, що результат не залежить від глибини проникнення частинок в область з магнітним потоком вихору. Вперше було показано, що на рух заряджених частинок, при квантовому описі, може впливати магнітне поле з області, не доступної для частинок. Зазначене стає можливим за умови нетривіальності першої гомотопічної групи просторової області, в якій рухаються заряджені частинки. Даний ефект (відсутній в класичній фізиці) суттєво вплинув на розвиток різних галузей квантової фізики від фізики частинок та космології до фізики конденсованого стану та мезоскопічної фізики, див., наприклад, оглядові роботи [2–4]. Однак, навіть більш важливим є те, що відкриття Ааронова та Бома засвідчило важливість топології в контексті фундаментальних принципів квантової теорії.

У 1957 р. Абрикосов [5] показав, що магнітний вихор може утворюватися у надпровідниках другого роду. Пізніше цей результат був отриманий у більш загальному контексті в релятивістській теорії поля [6]. Такі струноподібні об'єкти (їх стали називати вихорами Абрикосова–Нільсена–Олесена (АНО)) виникають як топологічні дефекти внаслідок фазових переходів при спонтанному порушенні неперервних симетрій. Загальною умовою існування таких об'єктів є нетривіальність першої гомотопічної групи у груповому просторі порушеної симетрії.

В наш час велика увага надається дослідженню непертурбативних ефектів в квантових системах, що виникають внаслідок взаємодії квантованих полів матерії з фоновим класичним полем з нетривіальною топологією. Вихор АНО описується в класичному підході за допомогою поля зі спіном нуль (поля Хіггса), що конденсується, та поля зі спіном один, що відповідає групі спонтанно порушеної симетрії. Зазначені поля взаємодіють мінімальним чином зі сталою $\tilde{e}_{\rm cond}$. Вимога однозна-

[1] Ця робота базується на результатах, які доповідалися на міжнародній конференції "XI Bolyai–Gauss–Lobachevsky (BGL-2019): Non–Euclidean, Noncommutative Geometry and Quantum Physics."

чності поля конденсата та скінченності енергії вихору пов'язує значення потоку зі сталою $\tilde{e}_{\rm cond}$:

$$\Phi = \oint d\mathbf{x}\mathbf{V}(\mathbf{x}) = 2\pi/\tilde{e}_{\rm cond}, \tag{1}$$

де $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ – векторний потенціал калібрувального поля з одиничним спіном, а інтегрування відбувається по контуру, що охоплює вихор один раз (використовуються одиниці $\hbar = c = 1$). При розгляді впливу вихору АНО на квантоване поле матерії потрібно врахувати наступні обставини. Квантоване поле матерії взаємодіє з векторним потенціалом мінімальним чином зі сталою зв'язку $\tilde{e}$. Вихор АНО характеризується двома параметрами з розмірністю довжини: один із них визначає поперечний розмір області з непорушеною калібрувальною симетрією і є порядку кореляційної довжини, а другий – визначає поперечний розмір області з ненульовим значенням напруженості калібрувального поля і є порядку глибини проникнення. Ці параметри визначають параметр Гінзбурга–Ландау, а за його значенням надпровідники поділяются на надпровідники I-го або II-го роду (див., наприклад, огляд [7]). Не вдаючись до деталей, звертаємо увагу на те, що фаза зі спонтанно порушеною симетрією (область з квантованим полем матерії) знаходиться у просторі ззовні вихору і цей простір не є однозв'язним (його перша гомотопічна група є нетривіальною). Відповідно, можна очікувати на тісний зв'язок нашої задачі з ефектом Ааронова–Бома, оскільки вихор АНО не впливає на оточуючу матерію з класичної точки зору, а якщо вплив має місце, то він має квантову природу. Зазначимо також, що гранична умова на квантоване поле матерії на поверхні вихору має особливе значення. Найменш обмежуючою, але фізично придатною, є гранична умова, що забезпечує самоспряженість оператора Гамільтона, див., наприклад, [8].

Тензор енергії-імпульсу вихору АНО має ненульовими лише діагональні компоненти: $-T_{zz} = T_{00} > 0$, $0 < -T_{rr} \ll T_{00}$, $0 < -r^{-2}\, T_{\varphi\varphi} \ll T_{00}$ (див, наприклад, [9]). Згідно з рівнянням Ейнштена–Гільберта значення тензора енергії-імпульсу визначають гравітаційне поле

$$R_{\rho\rho'} - \frac{1}{2} g_{\rho\rho'} R = 8\pi \c{G} T_{\rho\rho'}, \tag{2}$$

де $R_{\rho\rho'}$ – тензор Річчі, $R = g^{\rho\rho'} R_{\rho\rho'}$ – скаляр кривини, $\c{G}$ – гравітаційна стала; ми використовуємо позначення згідно з [10]. Взявши згортку за лоренцевими індексами у (2), можна отримати, що простір-час, у якому знаходиться вихор, характеризується додатним скаляром кривини, $R > 16\pi \c{G} T_{00}$, оскільки T_{00} є додатним. Простір-час ззовні вихору є пласким ($R = 0$), але не є простором-часом Мінковського. Його метрика задається квадратом елемента довжини

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + \nu^{-2} r^2 d\varphi^2 + dz^2, \tag{3}$$

де

$$\nu = (1 - 4\c{G}M)^{-1}, \tag{4}$$

M – лінійна густина маси вихору, що є порядку квадрату маси поля конденсату. Поперечний до вихору зовнішній простір ($z = \mathrm{const}$) є конічною поверхнею з дефіцитом кута $8\pi \c{G} M$.

Квантово-польові теоретичні моделі у $(2+1)$-вимірному просторі-часі мають багато цікавих ефектів, наприклад, подрібнення ферміонного числа, порушення парності, порушення ароматної симетрії, див. огляди [11, 12]. Регулярна конфігурація магнітного поля (яка описується неперервною функцією, що може зростати найбільше як $O(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_w|^{-2+\varepsilon})$ $(\varepsilon > 0)$) індукує ферміонне число у вакуумі квантованої спінорної матерії у двовимірному просторі (поверхні), що протикається лініями магнітного поля; густина ферміонного числа пропорційна напруженості магнітного поля, а повне ферміонне число пропорційне повному магнітному потоку [13]. Вплив сингулярної конфігурації магнітного поля на вакуум є іншим; точка, де лінія магнітного поля перетинає поверхню, є виколотою, загальне ферміонне число індукується на поверхні у вакуумі ззовні виколотої точки та є періодичною функцією повного потоку сингулярного магнітного поля. Даний ефект в загальному випадку розглядався у [14–16], де було вперше показано, що магнітний потік через недоступну для квантованої спінорної матерії область індукує ферміонне число у вакуумі спінорної матерії, що є проявом ефекту Ааронова–Бома (характеризується періодичною залежністю від виданого магнітного потоку) [1] в квантовій теорії поля.

Випадок видаленого магнітного поля є подібним до випадку топологічного дефекту у вигляді вихору АНО, оскільки в останньому випадку роль магнітного поля відіграє калібрувальне поле, що відповідає спонтанно порушеній симетрії, а вакуум квантованого спінорного поля існує ззовні ядра вихору. Для початку можна знехтувати поперечним розміром вихору і формально покласти кореляційну довжину нулю. При цьому питання вибору граничних умов для вихору нескінченно малого поперечного розміру є надзвичайно важливим. Це питання не розглядалося в роботах [14–16], але було розглянуто пізніше з використанням найбільш загального вигляду граничних умов, що забезпечують самоспряженість відповідного оператора гамільтоніана Дірака. Всі ефекти поляризації вакууму, що індукуються сингулярним вихором у квантованій спінорній матерії, були отримані у [17–21] для випадку масивних спінорів та у [22–24] для випадку безмасових спінорів. Слід відзначити, що деякі ефекти поляризації вакууму за наявності сингулярного вихору були розглянуті раніше у [25–27] для часткових випадків граничних умов. Однак результати, отримані у [26, 27], виявилися у підсумку хибними, оскільки періодичність за величиною потоку сингулярного вихору була зігнорована у зусиллях імітувати результати, притаманні випадку регулярної конфігурації зовнішнього поля.

Наступним кроком є врахування конічності простору ззовні вихору. Ця задача була розглянута в роботах [28–35] для квантованої матерії як скалярного так і спінорного поля, іноді в неповному та недостатньо переконливому вигляді у випадку масивної матерії. Нарешті, останнім кроком є врахування ненульового значення кореляційної довжини, тобто поперечного розміру вихору. Ця задача була розглянута в роботах [36–38] для квантованої спінорної матерії за певного вибору граничної умови, а також у [39–42] для квантованої скалярної матерії за граничної умови Діріхлє у просторі-часі довільної розмірності.

Мета даної роботи полягає у вивченні впливу граничної умови найбільш загального вигляду на ефекти поляризації вакууму, що індукуються вихором АНО у квантованій спінорній матерії у $(2+1)$-вимірному просторі-часі. Найбільший інтерес представляють такі характеристики вакууму як струм, порушуючий парність конденсат та тензор енергії-імпульсу, оскільки ферміонне число та кутовий момент змінюють свій знак при переході до нееквівалентного незвідного представлення алгебри Дірака–Кліфорда у $(2+1)$-вимірному просторі-часі [2].

2. Струм та магнітне поле, що індукуються у вакуумі

Відкладаючи розгляд порушуючого парність конденсату та тензора енергії-імпульсу до наступних публікацій, ми почнемо з розгляду індукованого вакуумного струму, що задається виразом

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\sum\!\!\!\!\!\!\int \mathrm{sgn}(\mathrm{E})\psi^{\dagger}_{\mathrm{E}}(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}\psi_{\mathrm{E}}(\mathbf{x}), \tag{5}$$

де $\psi_E(\mathbf{x})$ – розв'язок стаціонарного рівняння Дірака,

$$\begin{aligned} &H\psi_E(\mathbf{x}) = E\psi_E(\mathbf{x}),\\ &H = -\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{\partial} - \mathrm{i}\tilde{e}\,\mathbf{V} + \frac{\mathrm{i}}{2}\boldsymbol{\omega}\right) + \beta m, \end{aligned} \tag{6}$$

$\mathbf{V}(\mathbf{x})$ та $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$ є зв'язністю розшарування та спіновою зв'язністю, символ $\sum\!\!\!\!\!\!\int$ означає підсумовування за дискретною частиною та інтегрування за неперервною частиною енергетичного спектру, sgn(u) – знакова функція ($\mathrm{sgn(u)} = \pm 1$ при $u \gtrless 0$). Як наслідок рівняння Максвелла

$$\boldsymbol{\partial} \times \mathbf{B}_{\mathrm{I}}(\mathbf{x}) = e\,\mathbf{j}(\mathbf{x}), \tag{7}$$

магнітне поле, $\mathbf{B}_{\mathrm{I}}(\mathbf{x})$, також індукується у вакуумі (електромагнітна стала, e, в загальному випадку відрізняється від сталої $\tilde{e}$). Повний потік індукованого у вакуумі магнітного поля визначається як

$$\Phi_I = \int d\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{B}_{\mathrm{I}}(\mathbf{x}). \tag{8}$$

За наявності вихору АНО лише одна компонента зв'язності розшарування та спінової зв'язності є ненульовою:

$$V_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi}, \quad w_\varphi = \mathrm{i}\frac{\nu-1}{r}\,\alpha_\varphi\alpha_r, \tag{9}$$

а оператор Гамільтона набуває вигляду

$$H = -\mathrm{i}\left[\alpha^r\left(\partial_r + \frac{1-\nu}{2r}\right) + \alpha^\varphi\left(\partial_\varphi - \mathrm{i}\frac{\tilde{e}\Phi}{2\pi}\right)\right] + \beta m, \tag{10}$$

[2] Слід відзначити, що тільки струм та тензор енергії-імпульсу індукуються вихором АНО у вакуумі квантованої скалярної матерії в просторі-часі довільної розмірності, див. [44, 45].

де

$$\alpha^r = \alpha_r = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\varphi} \\ -\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\varphi} & 0 \end{pmatrix},$$
$$\alpha^\varphi = \frac{\nu}{r}\begin{pmatrix} 0 & e^{-\mathrm{i}\varphi} \\ e^{\mathrm{i}\varphi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_\varphi = \frac{r^2}{\nu^2}\,\alpha^\varphi. \tag{11}$$

Записавши розклад функції $\psi_E(\mathbf{x})$ у вигляді

$$\psi_E(\mathbf{x}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} f_n(r,E)e^{\mathrm{i}n\varphi} \\ g_n(r,E)e^{\mathrm{i}(n+1)\varphi} \end{pmatrix} \tag{12}$$

($\mathbb{Z}$ – набір цілих чисел), можна представити рівняння Дірака системою двох диференційних рівнянь першого порядку для радіальних функцій:

$$\left[-\partial_r + \frac{\nu\left(n - n_\mathrm{c} - F + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}}{r}\right] f_n = (E+m)g_n,$$
$$\left[\partial_r + \frac{\nu\left(n - n_\mathrm{c} - F + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{r}\right] g_n = (E-m)f_n, \tag{13}$$

де

$$n_\mathrm{c} = \left[\!\left[\frac{\tilde{e}\Phi}{2\pi}\right]\!\right], \quad F = \left\{\!\left|\frac{\tilde{e}\Phi}{2\pi}\right|\!\right\}, \tag{14}$$

$[\![u]\!]$ – ціла частина u (тобто ціле число, що менше або дорівнює u), $\{\!|u|\!\} = u - [\![u]\!]$ – дробова частина u, $0 \le \{\!|u|\!\} < 1$. Використавши (11) та (12), отримаємо $j_r = 0$ та вираз для φ-ої компоненти струму

$$j_\varphi(r) = -\frac{r}{\nu}\,\sum\!\!\!\!\!\!\int \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{sgn}(E) f_n(r,E) g_n(r,E), \tag{15}$$

що не залежить від кутової змінної. Індукована напруженість магнітного поля спрямована вздовж вісі вихору

$$B_\mathrm{I}(r) = e\nu \int\limits_r^\infty \frac{dr'}{r'}\, j_\varphi(r'), \tag{16}$$

а повний потік визначається як

$$\Phi_\mathrm{I} = \frac{2\pi}{\nu}\int\limits_{r_0}^\infty dr\, r B_\mathrm{I}(r), \tag{17}$$

де вихор був представлений у вигляді трубки радіуса r_0.

Ми стверджуємо, що найбільш загальний вигляд граничної умови, що забезпечує самоспряженість оператора H (10), має вигляд

$$\left(I - \mathrm{i}\beta\alpha^r\, e^{-\mathrm{i}\theta\alpha^r}\right)\psi|_{r=r_0} = 0, \tag{18}$$

де θ – параметр самоспряженого розширення. Дана умова є також найбільш загальною умовою, що забезпечує відсутність проходження потоку частинок матерії через ядро вихору, тобто забезпечує конфайнмент для поля матерії по відношенню до області поза вихором. Використавши (18) для розв'язків рівняння Дірака, $\psi_E(\mathbf{x})$ (12), отримаємо умову на моди

$$\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) f_n(r_0, E) = -\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) g_n(r_0, E). \tag{19}$$

Використання явного вигляду для мод, що задовольняє (13) та (19), дає аналітичний вираз для індукованого струму, $j_\varphi(r)$ (15), та індукованого магнітного поля у вакуумі, $B_\mathrm{I}(r)$ (16), у випадку $\nu \ge 1$ та $0 < F < 1$, а також у випадку $\frac{1}{2} \le \nu < 1$ та $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu} - 1\right) < F < \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{\nu}\right)$. Результати можна представити у вигляді

$$j_\varphi(r) = j_\varphi^{(a)}(r) + j_\varphi^{(b)}(r; r_0),$$
$$B_\mathrm{I}(r) = B_\mathrm{I}^{(a)}(r) + B_\mathrm{I}^{(b)}(r; r_0), \tag{20}$$

де вся залежність від r_0 знаходиться у виразах для $j_\varphi^{(b)}$ та $B_\mathrm{I}^{(b)}$, більш того,

$$\lim_{r_0\to 0} j_\varphi^{(b)}(r; r_0) = 0, \quad \lim_{r_0\to 0} B_\mathrm{I}^{(b)}(r; r_0) = 0. \tag{21}$$

Принциповою є поведінка $j_\varphi^{(b)}$ та $B_\mathrm{I}^{(b)}$ при $r \to r_0$. Якщо

$$\lim_{r\to r_0} j_\varphi^{(b)}(r; r_0)\,(r - r_0)^2 = 0 \tag{22}$$

та, відповідно,

$$\lim_{r\to r_0} B_\mathrm{I}^{(b)}(r; r_0)\,(r - r_0) = 0, \tag{23}$$

тоді потік Φ_I (17) буде скінченим. Акуратно проведений чисельний аналіз показав, що умова (22) виконується лише у випадках $\theta = 0$ та $\theta = \pi$. Випадок $F = 1/2$ вимагає окремого обговорення внаслідок непарності за параметром θ. В той час як струм та, відповідно, індуковане магнітне поле зануляються при $\theta = 0$, вони є ненульовими та розривними функціями за параметром θ при $\theta = \pi$, а саме

$$\Phi_\mathrm{I}|_{F=1/2,\,\theta=\pi_\pm} =$$
$$= \pm\frac{e}{8m}\, e^{2mr_0}\left[\Gamma(2, 2mr_0) - 4m^2 r_0^2 \Gamma(0, 2mr_0)\right], \tag{24}$$

де

$$\Gamma(z,u) = \int\limits_u^\infty dy\, y^{z-1} \mathrm{e}^{-y}$$

– неповна гамма-функція; зокрема,

$$\lim_{r_0\to 0} \Phi_\mathrm{I}|_{F=1/2,\,\theta=\pi_\pm} = \pm\frac{e}{8m}. \tag{25}$$

У випадку $F \neq 1/2$ неперервність за параметром θ відновлюється та можна отримати вираз для індукованого у вакуумі магнітного потоку у наступному представленні:

$$\Phi_\mathrm{I}|_{\theta=\frac{\pi}{2}\mp\frac{\pi}{2}} = \Phi_\mathrm{I}^{(a)}|_{\theta=\frac{\pi}{2}\mp\frac{\pi}{2}} + \Phi_\mathrm{I}^{(b)}|_{\theta=\frac{\pi}{2}\mp\frac{\pi}{2}}, \quad F \neq 1/2, \tag{26}$$

де

$$\Phi_\mathrm{I}^{(a)}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}\mp\frac{\pi}{2}} = \\
= \frac{e}{4\nu m}\left\{\sum_{p=1}^{[|\nu/2|]} \exp[-2mr_0\sin(p\pi/\nu)]\,\frac{\sin[(2F-1)p\pi]}{\sin^3(p\pi/\nu)} - \right. \\
\left. - \frac{\nu}{4N}\,(-1)^N \sin\left(2NF\pi\right) \mathrm{e}^{-2mr_0}\,\delta_{\nu,\,2N}\right\} + \\
+ \operatorname{sgn}\left(F-\frac{1}{2}\right)\frac{e}{8\pi m}\int\limits_0^\infty \frac{du}{\cosh^3(u/2)}\,\mathrm{e}^{-2mr_0\cosh(u/2)} \times \\
\times \left\{\cos\left[\nu\left(F-\frac{1}{2}\right)\pi\right]\cosh\left[\nu\left(\left|F-\frac{1}{2}\right|-1\right)u\right] - \right. \\
\left. - \cos\left[\nu\left(\left|F-\frac{1}{2}\right|-1\right)\pi\right]\cosh\left[\nu\left(F-\frac{1}{2}\right)u\right]\right\} \times \\
\times \left[\cosh(\nu u) - \cos(\nu\pi)\right]^{-1}, \tag{27}$$

$$\Phi_\mathrm{I}^{(b)}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}\mp\frac{\pi}{2}} = \frac{e}{(4\pi)^2} r_0 \int\limits_{mr_0}^\infty \frac{dv\, v}{\sqrt{v^2 - m^2 r_0^2}} \times \\
\times \left\{\frac{1}{2}\left[\operatorname{sgn}\left(F-\frac{1}{2}\right)\left(C^{(\pm)}_{\frac{1}{2}+\nu\left(F-\frac{1}{2}\right)}(v) + C^{(\pm)}_{\frac{1}{2}-\nu\left(F-\frac{1}{2}\right)}(v)\right) + \right.\right. \\
\left. + C^{(\pm)}_{\frac{1}{2}+\nu\left(F-\frac{1}{2}\right)}(v) - C^{(\pm)}_{\frac{1}{2}-\nu\left(F-\frac{1}{2}\right)}(v)\right] D_{\frac{1}{2}+\nu\left|F-\frac{1}{2}\right|}(v) + \\
+ \sum_{l=1}^\infty \left[C^{(\pm)}_{\nu\left(l+F-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}(v) D_{\nu\left(l+F-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}(v) - \right. \\
\left.\left. - C^{(\pm)}_{\nu\left(l-F+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}(v) D_{\nu\left(l-F+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}(v)\right]\right\}, \tag{28}$$

$$C_\rho^{(\pm)}(v) = \Big\{vI_\rho(v)K_\rho(v) \pm mr_0[I_\rho(v)K_{\rho-1}(v) - \\
- I_{\rho-1}(v)K_\rho(v)] - vI_{\rho-1}(v)K_{\rho-1}(v)\Big\} \times \\
\times [vK_\rho^2(v) \pm 2mr_0 K_\rho(v)K_{\rho-1}(v) + vK_{\rho-1}^2(v)]^{-1} \tag{29}$$

та

$$D_\rho(v) = \rho K_\rho^2(v) - (\rho-1)K_{\rho+1}(v)K_{\rho-1}(v) + \\
+ v\left[K_\rho(v)\frac{d}{d\rho}K_{\rho-1}(v) - K_{\rho-1}(v)\frac{d}{d\rho}K_\rho(v)\right]. \tag{30}$$

Зокрема,

$$\lim_{r_0\to 0}\Phi_\mathrm{I}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}\mp\frac{\pi}{2}} = -\frac{e}{6m}\left[F - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sgn}\left(F-\frac{1}{2}\right)\right] \times \\
\times \left\{\frac{3}{4} - \nu^2\left[\frac{1}{4} - \left|F-\frac{1}{2}\right| - F(1-F)\right]\right\}, \quad F \neq 1/2. \tag{31}$$

Випадок безмасового спінорного поля має певні особливості. По-перше, існує інваріантність відносно перетворень $\theta \to \pi - \theta$. Внаслідок цього результати є неперервними за параметром θ і їх значення при $\theta = 0$ та $\theta = \pi$ збігаються, зокрема,

$$j_\varphi(r)|_{F=\frac{1}{2},\,\theta=0} = j_\varphi(r)|_{F=\frac{1}{2},\,\theta=\pi} = 0 \tag{32}$$

та

$$B_\mathrm{I}(r)|_{F=\frac{1}{2},\,\theta=0} = B_\mathrm{I}(r)|_{F=\frac{1}{2},\,\theta=\pi} = 0. \tag{33}$$

По-друге, замість експоненційного спадання, j_φ та B_I спадають на великих відстанях від вихору АНО як r^{-1}. Внаслідок цього вираз для потоку Φ_I, див. (17), визначається інтегралом, що лінійно розбігається при $r \to \infty$. Єдиною можливістю вирішити цю проблему є введення обрізання при $r_\mathrm{max} > r$. Тоді вираз для потоку набуде вигляду

$$\Phi_{\mathrm{I}(r_\mathrm{max})} = \frac{2\pi}{\nu}\int\limits_{r_0}^{r_\mathrm{max}} dr\, rB_\mathrm{I}(r). \tag{34}$$

Чисельний аналіз підінтегральної функції в (34) поблизу нижньої границі інтегрування доводить виконання співвідношення (22). Потік $\Phi_{\mathrm{I}(r_\mathrm{max})}$ (34) має скінчене значення лише при $\theta = \frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{2}$. Легко отримати, що

$$\Phi_{\mathrm{I}(r_\mathrm{max})}|_{\theta=\frac{\pi}{2}\mp\frac{\pi}{2}} = 0, \quad F = 1/2. \tag{35}$$

Незважаючи на те, що у випадку $F \neq 1/2$ можна отримати аналітичний вираз для $\Phi_{\mathrm{I}(r_\mathrm{max})}\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}\mp\frac{\pi}{2}}$

ISSN 0372-400X. Укр. фіз. журн. 2019. Т. 64, № 11

для довільного значення $r_{\max} > r_0$, фізично цікавим є випадок $r_{\max} \gg r_0$. Залишаючи лише головні доданки, отримаємо у цьому випадку вираз для потоку:

$$\Phi_{\mathrm{I}(r_{\max})}\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}\mp\frac{\pi}{2}} = \frac{e\,r_{\max}}{4\nu}\left\{\sum_{p=1}^{[|\nu/2|]}\frac{\sin[(2F-1)p\pi]}{\sin^2(p\pi/\nu)} - \right.$$
$$\left. - \frac{\nu}{4N}(-1)^N\sin(2NF\pi)\,\delta_{\nu,\,2N}\right\} +$$
$$+\,\mathrm{sgn}\left(F-\frac{1}{2}\right)\frac{e\,r_{\max}}{8\pi}\int\limits_0^\infty\frac{du}{\cosh^2(u/2)}\times$$
$$\times\left\{\cos\left[\nu\left(F-\frac{1}{2}\right)\pi\right]\cosh\left[\nu\left(\left|F-\frac{1}{2}\right|-1\right)u\right]-\right.$$
$$\left.-\cos\left[\nu\left(\left|F-\frac{1}{2}\right|-1\right)\pi\right]\cosh\left[\nu\left(F-\frac{1}{2}\right)u\right]\right\}\times$$
$$\times\,[\cosh(\nu u)-\cos(\nu\pi)]^{-1} + O\left(e\,r_0\right),\quad F \neq 1/2 \quad (36)$$

та співвідношення між струмом та магнітним полем:

$$\nu e\, j_\varphi(r)|_{\theta=\frac{\pi}{2}\mp\frac{\pi}{2}} = \frac{r_{\max}}{r_{\max}-r}\,B_{\mathrm{I}}(r)|_{\theta=\frac{\pi}{2}\mp\frac{\pi}{2}} =$$
$$= \frac{\nu}{\pi r_{\max} r}\,\Phi_{\mathrm{I}(r_{\max})}\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}\mp\frac{\pi}{2}},\quad r \gg r_0. \quad (37)$$

Зокрема, у випадку $\nu = 1$

$$\Phi_{\mathrm{I}(r_{\max})}\big|_{\nu=1,\,\theta=\frac{\pi}{2}\mp\frac{\pi}{2}} =$$
$$= \frac{e}{4}\,r_{\max}\tan(F\pi)\left|F-\frac{1}{2}\right|\left(\left|F-\frac{1}{2}\right|-1\right)+O(er_0) \quad (38)$$

та

$$ej_\varphi(r)|_{\nu=1,\,\theta=\frac{\pi}{2}\mp\frac{\pi}{2}} =$$
$$= \frac{r_{\max}}{r_{\max}-r}\;B_I(r)|_{\nu=1,\,\theta=\frac{\pi}{2}\mp\frac{\pi}{2}} =$$
$$= \frac{e}{4\pi r}\tan(F\pi)\left|F-\frac{1}{2}\right|\left(\left|F-\frac{1}{2}\right|-1\right),\quad r \gg r_0. \quad (39)$$

Останній вираз для струму був вперше отриманий у роботі [24] (див. (10.6) в зазначеній роботі, де визначення струму відрізняється на множник r^{-1}). Розрив при $F = 1/2$ не залежить від ν та має вигляд

$$\lim_{F\to(1/2)_\pm} ej_\varphi(r)|_{\theta\neq\pm\frac{\pi}{2}} = \pm\frac{e}{4\pi^2 r},\quad r \gg r_0. \quad (40)$$

Це є суттєвою відмінністю від випадку квантованого скалярного поля з граничною умовою Діріхлє, коли струм є неперервною функцією та зникає при $F = 1/2$ [44, 46, 47], див. відповідні вирази в наведених джерелах при $m = 0$ та $\nu = 1$:

$$ej_\varphi(r)|_{\mathrm{scalar,\,Dirichlet}} = -\frac{e}{4\pi r}\tan(F\pi)\left(F-\frac{1}{2}\right)^2. \quad (41)$$

3. Обговорення та висновки

Ефекти, пов'язані з конічністю простору, що визначається значенням дефіциту кута, $8\pi \c{G}M$, є нехтовно малими для вихорів АНО у звичайних надпровідниках, оскільки стала $\c{G}$ є порядку квадрата довжини Планка і значення M є порядку квадрата оберненої кореляційної довжини. Однак, топологічні дефекти типу вихорів АНО виникають і у інших галузях фізики – в космології та фізиці високих енергій, де вони мають назву космічних струн [48, 49]. Існування космічних струн з $8\pi\c{G}M \sim 1$ заперечується астрофізичними спостереженнями, проте залишаються можливими космічні струни з $8\pi\c{G}M \sim 10^{-6}$ та менше (див., напр., [50]), хоча прямих доказів їх існування поки ще не виявлено.

Сучасний розвиток матеріалознавства також забезпечує неочікуваний зв'язок між фізикою конденсованого стану та фізикою високих енергій, що пов'язаний значною мірою з експериментальним відкриттям графену – двовимірного кристалічного алотропу, сформованого одношаром з атомів вуглецю [51]. Одиночний топологічний дефект (дисклинація) деформує лист графену, скручуючи його в наноконус, який подібний до простору в поперечному напрямку ззовні космічної струни; вуглецеві наноконуси з дефіцитом кута $N_d\pi/3$ (N_d – можлива кількість секторів, що видалені з гексагональної ґратки: $N_d = 1, 2, 3, 4, 5$, тобто $\nu = = \frac{6}{5}, \frac{3}{2}, 2, 3, 6)$ спостерігалися в експериментах, див. роботу [52] та посилання в ній. Більш того, теорія передбачає існування сідлоподібних наноконусів з від'ємними значеннями дефіциту кута, необмеженими знизу (можуть бути додані сектори: $N_d = -1, -2, -3, -4, -5, -6, ..., -\infty$, тобто $\nu = \frac{6}{7}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{6}{11}, \frac{1}{2}, ..., 0)$; такі наноконуси відповідають космічним струнам з негативною густиною маси. Слід відзначити, що наноконічні структури можуть виникати також у різноманітних системах конденсованого стану, відомих як двовимірні матеріали Дірака, починаючи від стільникових кристалічних алотропів (силіцин та германен [53], фосфорен [54]) до високо температурних купратних надпровідників [55] та топологічних ізоляторів [56].

Оскільки поперечний розмір вихорів АНО пов'язаний з кореляційною довжиною, його ненульове значення, r_0, має враховуватися. Ми розглянули струм та магнітне поле, що індукуються у вакуумі квантованого спінорного поля у випадку $\nu \geq 1$ та $0 < F < 1$, а також у випадку $\frac{1}{2} \leq \nu < 1$ та $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu} - 1\right) < F < \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{\nu}\right)$. Було проаналізовано залежність зазначених вакуумних характеристик від граничних умов, що забезпечують непроникливість ядра вихору для поля матерії. Ми отримали, що вимога скінченного значення повного індукованого у вакуумі магнітного потоку знімає невизначеність у виборі граничних умов.

Випадок безмасового квантованого спінорного поля вимагає введення максимального розміру системи, $r_{\max}$. Ми показали, що для фізично цікавого випадку $r_{\max} \gg r_0$, ефекти поляризації вакууму, на відміну від випадку масивного квантованого спінорного поля, не залежать від поперечного розміру вихору АНО. Завдяки цій відмінності результати для безмасового випадку не є неперервними в точці $F = 1/2$ зі стрибком функції, що не залежить від ν, в той час як результати при врахуванні поперечного розміру вихору у масивному випадку при $\theta = 0$ є неперервними за значенням F та зануляються при $F = 1/2$.

The work was presented at the XI International Bolyai–Gauss–Lobachevskii (BGL-2019) Conference on Non-Euclidean, Non-Commutative Geometry and Quantum Physics, May 19–24, Kyiv, Ukraine. Yu.A.S. acknowledges a support from the National Academy of Sciences of Ukraine (project No. 01172U000237), from the Program of Fundamental Research of the Department of Physics and Astronomy of the National Academy of Sciences of Ukraine (project No. 0117U000240), and from the ICTP – SEENET-MTP project NT-03 "Cosmology – Classical and Quantum Challenges".

1. Y. Aharonov, D. Bohm. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959).
2. M. Peshkin, A. Tonomura. *The Aharonov–Bohm Effect* (Springer, 1989).
3. I.V. Krive, A.S. Rozhavsky. Non-traditional Aharonov–Bohm effects in condensed matter. *Int. J. Mod. Phys. B* **6**, 1255 (1992).
4. A. Tonomura. The AB effect and its expanding applications. *J. Phys. A: Math. Theor.* **43**, (2010) 354021.
5. A.A. Abrikosov. On the magnetic properties of superconductors of the second group. *Sov. Phys. – JETP* **5**, 1174 (1957).
6. H.B. Nielsen, P. Olesen. Vortex-line models for dual strings. *Nucl. Phys. B* **61**, 45 (1973).
7. R.P. Huebener. *Magnetic Flux Structure in Superconductors* (Springer, 1979).
8. M. Reed, B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics II. Fourier Analysis, Self-Adjointness* (Academic Press, 1975).
9. D. Garfinkle. General relativistic strings. *Phys. Rev. D* **32**, 1323 (1985).
10. C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler. *Gravitation* (W.H. Freeman, 1973).
11. G.V. Dunne. *Topological Aspects of Low Dimensional Systems* (Springer, 1999).
12. E.C. Marino. *Quantum Field Theory Approach to Condensed Matter Physics* (Cambridge Univ. Press, 2017).
13. A.J. Niemi, G.W. Semenoff. Fermion number fractionization in quantum field theory. *Phys. Rep.* **135**, 99 (1984).
14. Yu.A. Sitenko. On the electron charge fractionization in magnetic field with boundaries present. *Sov. J. Nucl. Phys.* **47**, 184 (1988).
15. Yu.A. Sitenko. Electron-charge fractionization on surfaces of various geometry in an external magnetic field. *Nucl. Phys. B* **342**, 655 (1990).
16. Yu.A. Sitenko. Geometry of the base manifold and fermion number fractionization. *Phys. Lett. B* **253**, 138 (1991).
17. Yu.A. Sitenko. Self-adjointness of the Dirac Hamiltonian and fermion number fractionization in the background of a singular magnetic vortex. *Phys. Lett. B* **387**, 334 (1996).
18. Yu.A. Sitenko. Self-adjointness of the Dirac Hamiltonian and vacuum quantum numbers induced by a singular external field. *Phys. Atom. Nucl.* **60**, 2102 (1997); (E) **62**, 1084 (1999).
19. Yu.A. Sitenko, D.G. Rakityansky. Quantum numbers of the theta vacuum in $(2+1)$-dimensional spinor electrodynamics: Charge and magnetic flux. *Phys. Atom. Nucl.* **60**, 1497 (1997).
20. Yu.A. Sitenko. Effects of fermion vacuum polarization by a singular magnetic vortex: Zeta function and energy. *Phys. Atom. Nucl.* **62**, 1056 (1999).
21. Yu.A. Sitenko. Polarization of a fermion vacuum by a singular magnetic vortex: Spin and angular momentum. *Phys. Atom. Nucl.* **62**, 1767 (1999).
22. Yu.A. Sitenko. Induced vacuum condensates in the background of a singular magnetic vortex in $2+1$-dimensional space-time. *Phys. Rev. D* **60**, 125017 (1999).
23. Yu.A. Sitenko. Chiral symmetry breaking as a consequence of nontrivial spatial topology. *Mod. Phys. Lett. A* **14**, 701 (1999).
24. Yu.A. Sitenko. Self-adjointness of the two-dimensional massless Dirac Hamiltonian and vacuum polarization effects in the background of a singular magnetic vortex. *Annals Phys.* **282**, 167 (2000).

25. P. Gornicki. Aharonov–Bohm effect and vacuum polarization. *Annals Phys.* **202**, 271 (1990).
26. E.G. Flekkoy, J.M. Leinaas. Vacuum currents around a magnetic flux string. *Int. J. Mod. Phys. A* **6**, 5327 (1991).
27. R.R. Parwani, A.S. Goldhaber. Decoupling in (2 + 1)-dimensional QED? *Nucl. Phys. B* **359**, 483 (1991).
28. V.P. Frolov, E.M. Serebriany. Vacuum polarization in the gravitational field of a cosmic string. *Phys. Rev. D* **35**, 3779 (1987).
29. J.S. Dowker. Vacuum averages for arbitrary spin around a cosmic string. *Phys. Rev. D* **36**, 3742 (1987).
30. M.E.X. Guimaraes, B. Linet. Scalar Green's functions in an Euclidean space with a conical-type line singularity. *Commun. Math. Phys.* **165**, 297 (1994).
31. E.S. Moreira. Massive quantum fields in a conical background. *Nucl. Phys. B* **451**, 365 (1995).
32. M. Bordag, K. Kirsten, S. Dowker. Heat-kernels and functional determinants on the generalized cone. *Commun. Math. Phys.* **182**, 371 (1996).
33. D. Iellici. Massive scalar field near a cosmic string. *Class. Quantum Grav.* **14**, 3287 (1997).
34. L. Sriramkumar. Fluctuations in the current and energy densities around a magnetic flux carrying cosmic string. *Class. Quantum Grav.* **18**, 1015 (2001).
35. J. Spinelly, E.R. Bezerra de Mello. Spinor Green function in higher-dimensional cosmic string space-time in the presence of magnetic flux. *J. High Energy Phys.* **09**, 005 (2008).
36. E.R. Bezerra de Mello, V. Bezerra, A.A. Saharian, V.M. Bardeghyan. Fermionic current densities induced by magnetic flux in a conical space with a circular boundary. *Phys. Rev. D* **82**, 085033 (2010).
37. S. Bellucci, E.R. Bezerra de Mello, A.A. Saharian. Fermionic condensate in a conical space with a circular boundary and magnetic flux. *Phys. Rev. D* **83**, 085017 (2011).
38. E.R. Bezerra de Mello, F. Moraes, A.A. Saharian. Fermionic Casimir densities in a conical space with a circular boundary and magnetic flux. *Phys. Rev. D* **85**, 045016 (2012).
39. V.M. Gorkavenko, Yu.A. Sitenko, O.B. Stepanov. Polarization of the vacuum of a quantized scalar field by an impenetrable magnetic vortex of finite thickness. *J. Phys. A: Math. Theor.* **43**, 175401 (2010).
40. V.M. Gorkavenko, Yu.A. Sitenko, O.B. Stepanov. Vacuum energy induced by an impenetrable flux tube of finite radius. *Int. J. Mod. Phys. A* **26**, 3889 (2011).
41. V.M. Gorkavenko, Yu.A. Sitenko, O.B. Stepanov. Casimir energy and force induced by an impenetrable flux tube of finite radius. *Int. J. Mod. Phys. A* **28**, 1350161 (2013).
42. V.M. Gorkavenko, I.V. Ivanchenko, Yu.A. Sitenko. Induced vacuum current and magnetic field in the background of a vortex. *Int. J. Mod. Phys. A* **31**, 1650017 (2016).
43. Yu.A. Sitenko, V.M. Gorkavenko. Induced vacuum energy-momentum tensor in the background of a $(\mathrm{d}-2)$-brane in $(\mathrm{d}+1)$-dimensional space-time. *Phys. Rev. D* **67**, 085015 (2003).
44. Yu.A. Sitenko, N.D. Vlasii. Induced vacuum current and magnetic field in the background of a cosmic string. *Class. Quantum Grav.* **26**, 195009 (2009).
45. Yu.A. Sitenko, N.D. Vlasii. Induced vacuum energy-momentum tensor in the background of a cosmic string. *Class. Quantum Grav.* **29**, 095002 (2012).
46. Yu.A. Sitenko, A.Yu. Babansky. The Casimir–Aharonov–Bohm effect? *Mod. Phys. Lett. A* **13**, 379 (1998).
47. Yu.A. Sitenko, A.Yu. Babansky. Effects of boson-vacuum polarization by a singular magnetic vortex. *Phys. At. Nucl.* **61**, 1594 (1998).
48. A. Vilenkin, E.P.S. Shellard. *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge Univ. Press, 1994).
49. M.B. Hindmarsh, T.W.B. Kibble. Cosmic strings. *Rep. Prog. Phys.* **58**, 477 (1995).
50. R.A. Battye, B. Garbrecht, A. Moss, H. Stoica. Constraints on brane inflation and cosmic strings. *J. Cosmol. Astropart. Phys. JCAP* **0801**, 020 (2008).
51. A.K. Geim, K.S. Novoselov. The rise of graphene. *Nature Mater.* **6**, 183 (2007).
52. S.N. Naess, A. Elgsaeetter, G. Helgesen, K.D. Knudsen. Carbon nanocones: Wall structure and morphology. *Sci. Technol. Adv. Mat.* **10**, 065002 (2009).
53. S. Cahangirov, M. Topsakal, E. Akturk, H. Sahin, S. Ciraci. Two- and one-dimensional honeycomb structures of silicon and germanium. *Phys. Rev. Lett.* **102**, 236804 (2009).
54. H. Liu, A.T. Neal, Z. Zhu, Z. Luo, X. Xu, D. Tomanek, P.D. Ye. Phosphorene: an unexplored 2D semiconductor with a high hole mobility. *ACS NANO* **8**, 4033 (2014).
55. C.C. Tsuei, J.R. Kirtley. Pairing symmetry in cuprate superconductors. *Rev. Mod. Phys.* **72**, 969 (2000).
56. X.L. Qi, S.C. Zhang. Topological insulators and superconductors. *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1057 (2011).

Одержано 22.01.19

Y.A. Sitenko, V.M. Gorkavenko

PPOLARIZATION OF THE VACUUM
OF THE QUANTIZED SPINOR FIELD
BY A TOPOLOGICAL DEFECT
IN THE TWO-DIMENSIONAL SPACE

S u m m a r y

The two-dimensional space with a topological defect is a transverse section of the three-dimensional space with an Abrikosov–Nielsen–Olesen vortex, i.e. a gauge-flux-carrying tube which is impenetrable for quantum matter. Charged spinor matter field is quantized in this section with the most general mathematically admissible boundary condition at the edge of the defect. We show that a current and a magnetic field are induced in the vacuum. The dependence of results on the boundary conditions is studied, and we find that the requirement of finiteness of the total induced vacuum magnetic flux removes an ambiguity in the choice of boundary conditions. The differences between the cases of massive and massless spinor matters are discussed.