УДК 510.22:519.71

М.М. Лычак, В.П. Евтушок

Интервальный (множественный) анализ процессов

Развит множественный подход к построению математической теории недетерминированных ограниченных процессов путем введения интервальных функций распределения их значений и первых различий этих значений и интервальных функций оценки арифметического среднего значений процесса и его первой разности. Предложена методология обработки данных с шумами для получения гарантированной оценки информативных параметров процессов с использованием интервального (множественного) анализа.

A multiple approach is evolved for the construction of the mathematical theory for non-deterministic limited processes by means of introducing the interval functions of its magnitude distribution and the first differences and the interval estimating functions of the average arithmetical magnitudes for the process and its firs difference. The methods of the noised data processing are suggested for obtaining the guaranteed estimation of the process informative parameters with the use of the interval (multiple) analysis.

Розвинуто множинний підхід до побудови математичної теорії недетермінованих обмежених процесів, шляхом введення інтервальних функцій розподілу їх значень і перших різниць цих значень та інтервальних функцій оцінки арифметичного середнього значень процесу і його першої різниці. Запропоновано методологію обробки даних з шумами для отримання гарантованої оцінки інформативних параметрів процесів з використанням інтервального (множинного) аналізу.

Введение. Значения всех реальных процессов ограниченны по модулю. Этому не соответствует общепринятая вероятностная модель недетерминированных процессов, когда при анализе используется нормальный закон распределения вероятности их значений [1, 2]. С другой стороны, когда процесс не содержит постоянной составляющей (центрированный), то из его ограниченности вытекает ограниченность среднеарифметических значений на конечных интервалах обработки сигналов. Первая разность этого процесса и, соответственно, его среднеарифметические значения на конечных интервалах также ограничены. Существенной операцией при первичной обработке ограниченного процесса является сглаживание его и первой разности скользящими окнами с выбранной фиксированной шириной, так как результаты такого сглаживания также представляют собой ограниченные процессы [3].

Ключевые слова. Интервальный (множественный) анализ, недетерминированные ограниченные процессы, интервальные функции распределения, значения процессов, первая разность значений, оценки арифметического среднего, обработка данных.

Возможности введения интервальных характеристик неизвестных ограниченных сигналов, когда используется, в основном, математический аппарат интервальных функций для оценки и прогнозирования значений этих сигналов, рассмотрены в [4–6].

Для недетерминированных ограниченных процессов при условиях их неопределенности и непредсказуемости целесообразно учитывать параметры этих ограничений при вычислении статистических характеристик, соответствующем моделировании и использовании для получения оценок определенных информационных параметров этих процессов [7, 8].

Интервальные характеристики процессов

Учитывая ограниченность по величине значений реальных процессов при их моделировании целесообразно учитывать такие статистические характеристики, где фигурируют параметры этих ограничений. В классических моделях процессов теории вероятности данная информация не принимается во внимание.

Пусть известно, что модель измерений или наблюдений некоторого реального процесса можно представить в виде

$$y_n = x_n + f_n, \quad n \in (-\infty;\infty), \qquad (1)$$

где y_n – скалярная числовая последовательность, получаемая в результате измерений или наблюдений, x_n – неизвестная последовательность истинных значений измеренного или наблюдаемого процесса, а f_n – неизвестная ограниченная последовательность, отображающая погрешности измерений или наблюдений. На основе этой модели строится процедура обработки полученных значений для вычисления оценок истинных значений процесса. Она существенно зависит от принятых предположений относительно помех измерений или наблюдений. В отличие от вероятностного подхода, рассмотрим случай, когда используются интервальные характеристики ограниченных возмущений [4–6]. Наиболее простыми (и физически обоснованными) предположениями являются ограниченность собственно погрешностей (помех) и скорости их изменения [5]:

$$\begin{aligned} &|f_n| \le \delta = \text{const}, \quad |\Delta f_n| \le \gamma = \\ &= \text{const}\ \forall n, \quad \Delta f_n = f_{n+1} - f_n , \end{aligned} \qquad (2)$$

т.е. значения членов числовой последовательности f_n $(n \in (-\infty;\infty))$ непредсказуемы, но они удовлетворяют условию (2). При этом считается, что f_n не содержит постоянной составляющей (центрированная помеха), т.е. является чисто шумовой составляющей погрешностей. При наличии постоянной методической погрешности она относится к неизвестным истинным значениям измеренного процесса. Рассмотрим также возможность сглаживания шумовой составляющей погрешностей и скорости их изменения скользящими окнами с выбранной фиксированной шириной [3]. Самое простое скользящее окно, используеме для сглаживания – это прямоугольное окно шириной

$$N_0 = 2N + 1,\ N = \text{const} \ge 0 . \qquad (3)$$

Тогда для каждого $N \ge 0$ значения сглаженной последовательности $\bar{f}_n$ определяются по формуле

$$\bar{f}_n = N_0^{-1} \cdot \sum_{i=-N}^{i=N} f_{n+i} \quad \forall n,\ N = 0,1,2,\ldots . \qquad (4)$$

Соответственно предположению о том, что процесс погрешностей измерений является центрированным, получим

$$\lim_{N\to\infty} \left| N_0^{-1} \cdot \sum_{i=-N}^{i=N} f_{n+i} \right| = 0 . \qquad (5)$$

Из (5) вытекает, что для любых значений процесса, удовлетворяющих условиям (2), существуют ограниченные функции $m_{\text{н}}(N)$ и $m_{\text{в}}(N)$, для которых справедливы неравенства

$$\begin{aligned} &-\delta \le m_{\text{н}}(N) \le \frac{1}{N_0} \sum_{i=-N}^{i=N} f_{n+i} \le \\ &\le m_{\text{в}}(N) \le \delta\ \forall n,\ N = 0,1,2,..., \end{aligned} \qquad (6)$$

где функции $m_{\text{н}}(N)$ и $m_{\text{в}}(N)$ можно определить экспериментально. Например, измеряя многократно значение некоторого известного эталонного сигнала, можно высчитать различие между измеренными и эталонными значениями, таким образом вычислить погрешности измерений. Тогда можно получить значение неизвестных функций из (6) для данного конкретного случая, которые должны для данного измерительного прибора и типа измеренного процесса остаться неизменными и в случае измерений реального неизвестного сигнала такого же типа.

С другой стороны, можно рассмотреть сглаженную последовательность значений скорости изменения погрешностей

$$\overline{\Delta f}_n = N_0^{-1} \cdot \sum_{i=-N}^{i=N} \Delta f_{n+i} \quad \forall n, \quad N = 0,1,2,\ldots . \qquad (7)$$

Очевидно, что соответственно (2)

$$\left|\overline{\Delta f}_n\right| \le \gamma\ \forall n . \qquad (8)$$

Тем не менее,

$$\begin{aligned} &\Delta f_{n-N} + \Delta f_{n-N+1} + \Delta f_{n-N+2} + \ldots + \Delta f_{n+N} = \\ &= f_{n-N+1} - f_{n-N} + f_{n-N+2} - f_{n-N+1} + f_{n-N+3} - f_{n-N+2} + \\ &\ldots + f_n - f_{n-1} + f_{n+1} - f_n + f_{n+2} - f_{n+1} + \ldots + f_{n+N} - \\ &- f_{n+N-1} + f_{n+N+1} - f_{n+N} = f_{n+N+1} - f_{n-N} , \end{aligned}$$

т.е. вместо (5) можно написать

$$\overline{\Delta f}_n = N_0^{-1} \cdot (f_{n+N+1} - f_{n-N}) \; \forall n, \; N = 0,1,2,\dots . \quad (9)$$

Тогда, соответственно (2), из (7) получим оценку

$$\left| \overline{\Delta f}_n \right| \le 2\delta / N_0 \; \forall n . \quad (10)$$

Окончательно получим, что справедлива система неравенств

$$\begin{aligned} \Delta m_{\text{н}}(N) \le \frac{1}{N_0} \sum_{i=-N}^{i=N} \Delta f_{n+i} = N_0^{-1}(f_{n+N+1} - f_{n-N}) \le \\ \le \Delta m_{\text{в}}(N) \; \forall n, \;\; N = 0,1,2,..., \end{aligned} \quad (11)$$

где $\Delta m_{\text{н}}(N)$ и $\Delta m_{\text{в}}(N)$ – нижняя и верхняя границы интервальной функции оценки среднего арифметического значений скорости изменения помех. При этом согласно (8) и (10) справедливы оценки для указанных границ

$$\begin{cases} \Delta m_{\text{н}}(N) \ge -\gamma, \Delta m_{\text{в}}(N) \le \gamma \text{ для таких} \\ \quad N \ge 0, \text{ что } \gamma \le 2\delta/(2N+1), \\ \Delta m_{\text{н}}(N) \ge -2\delta/(2N+1), \Delta m_{\text{в}}(N) \le \\ \quad \le 2\delta/(2N+1) \text{ для всех других } N. \end{cases} \quad (12)$$

Система неравенств, аналогичная (11), справедлива и относительно значений самой последовательности помех. Для этого введем понятие интегрирующей последовательности $\tilde{f}_n$, которая является решением разностного уравнения

$$\Delta\tilde{f}_n = f_n, \quad \tilde{f}_{n+1} = \tilde{f}_n + f_n \quad \forall n, \quad \tilde{f}_{n_0} = 0 \;, \quad (13)$$

где n_0 – некоторый начальный момент времени исследования последовательности f_n.

Будем считать, что известно ограничение

$$\left| \tilde{f}_n \right| \le \sigma = \text{const} \quad \forall n \ge n_0 . \quad (14)$$

Тогда получим систему неравенств

$$\begin{aligned} m_{\text{н}}(N) \le \frac{1}{N_0} \sum_{i=-N}^{i=N} f_{n+i} = N_0^{-1}(\tilde{f}_{n+N+1} - \tilde{f}_{n-N}) \le \\ \le m_{\text{в}}(N) \; \forall n \ge n_0, \; N = 0,1,2,..., \end{aligned} \quad (15)$$

где $m_{\text{н}}(N)$ и $m_{\text{в}}(N)$ – соответственно нижняя и верхняя границы интервальной функции оценки среднего арифметического значений помехи, для которых справедливы оценки

$$\begin{cases} m_{\text{н}}(N) \ge -\delta, m_{\text{в}}(N) \le \delta \text{ для таких} \\ \quad N \ge 0, \text{ что } \delta \le 2\sigma/(2N+1), \\ m_{\text{н}}(N) \ge -2\sigma/(2N+1), m_{\text{в}}(N) \le \\ \quad \le 2\sigma/(2N+1) \text{ для всех других } N. \end{cases} \quad (16)$$

Оценки (12) и (16) можно использовать как границы интервальной функции среднего арифметического значения помехи и скорости ее изменения, когда истинные границы в (11) и (15) неизвестны. Границы можно оценить экспериментальным путем, проводя обработку достаточно длинных и представительных реализаций исследуемого процесса. Понятия представительной реализации целесообразно связать с фактом достижения значениями этой реализации, близких к граничным, соответственно (2) и (14), причем многократно.

Таким образом, получены интервальные характеристики (11) и (15) ограниченных центрированных процессов, которые существенно отличаются от характеристик случайных процессов типа функций распределения их значений [1, 2]. Тем не менее, оказывается для ограниченных процессов можно также ввести интервальные характеристики, обобщающие известные в теории случайных процессов [4–6].

Примем, что ограничения (2) задают некоторое множество допустимых числовых значений неопределенной последовательности, называемое множеством элементарных событий F_O, откуда некоторый алгоритм выбора элементов этого множества, не являющийся полностью определенным, формирует последовательности чисел определенного класса. Тогда согласно [4] можно ввести интервальные характеристики данного класса последовательностей, называемые хаотичными и формируемые с помощью некоторого алгоритма, также называемого хаотичным.

Введем индикативную функцию от некоторого постоянного $\xi \in [-\delta; \delta]$ и членов ограниченной неопределенной последовательности f_n

$$I(\xi, f_n) \equiv \begin{cases} 1 & \text{при} \quad f_n \le \xi, \\ 0 & \text{при} \quad f_n > \xi. \end{cases} \quad (17)$$

Определение 1. Нижней и верхней гранями интервальной функции распределения членов ограниченной согласно (2) и (14) последовательности f_n, $n \in (-\infty;\ \infty)$, формируемой с помощью определенного хаотичного алгоритма выбора элементов из некоторого множества элементарных событий F_O, будем называть такие функции

$$1 \geq P_{\text{н}}(\xi, N) \geq 0\,,\ 0 \leq P_{\text{в}}(\xi, N) \leq 1\,, \qquad (18)$$

где $\xi \in [-\delta; \delta]$, а $N = 0,1,2,\ldots,$ – последовательные значения, определяющие согласно (3) ширину N_0 скользящего окна сглаживания, что для них и членов хаотичной последовательности справедлива система неравенств

$$P_{\text{н}}(\xi, N) \leq \frac{1}{N_0} \sum_{i=-N}^{N} I(\xi, f_{n+i}) \leq \\ \leq P_{\text{в}}(\xi, N)\ \forall\, n, \quad N = 0,1,2,\ldots. \qquad (19)$$

По аналогии с теорией случайных процессов установим тот признак, когда хаотичную последовательность можно назвать случайной [1, 2].

Определение 2. Если для всех $\xi \in F_O$ существуют предельные переходы

$$\lim_{N\to\infty} P_{\text{н}}(\xi, N) = \lim_{N\to\infty} P_{\text{в}}(\xi, N) = P(\xi)\,, \qquad (20)$$

то такие хаотичные последовательности будем называть случайными, а однозначную функцию распределения хаотичных последовательностей $P(\xi)$ назовем функцией распределения случайных последовательностей на множестве F_O.

Как показано в [4–6], интегрируя неравенства (19) по ξ на интервале $[-\delta; \delta]$, получим неравенства вида (15), где

$$m_{\text{н}}(N) = \delta - \int_{-\delta}^{\delta} P_{\text{в}}(\xi, N) d\xi, \\ m_{\text{в}}(N) = \delta - \int_{-\delta}^{\delta} P_{\text{н}}(\xi, N) d\xi, \qquad (21)$$

т.е. оба вида интервальных характеристик взаимосвязаны. Из (20) и (21) вытекает, что для случайной последовательности существует величина

$$m_0 = \lim_{N\to\infty} m_{\text{н}}(N) = \lim_{N\to\infty} m_{\text{в}}(N)\,, \qquad (22)$$

которая полностью соответствует понятию математического ожидания в теории вероятности $m_0 = M\{x_n\}$, а $M\{x_n\}$, по теории вероятности, означает среднее по ансамблю реализаций случайных числовых последовательностей [1, 2].

Таким же способом может быть введена интервальная функция частот членов неопределенной последовательности, с помощью которой получается полный аналог плотности распределения членов случайной последовательности [1, 2].

На данном множестве F_O, т.е. на интервале чисел (2), в указанном пространстве введем такую индикативную функцию $\Delta F(\cdot)$ от постоянных $\xi \in F_O$, $\xi - \Delta\xi \in F_O$ и членов любой хаотичной последовательности $f_n\ (n = 1,2,\ldots)$, которая

$$\Delta F(\xi, \xi - \Delta\xi, f_n) = \\ = \begin{cases} 1 \text{ при } \xi - \Delta\xi \leq f_n \leq \xi\ , \\ 0 \text{ при } f_n > \xi \quad \text{или} \quad f_n < \xi - \Delta\xi. \end{cases} \qquad (23)$$

Определение 3. Для членов любой хаотичной последовательности $f_n\ (n = 1,2,\ldots)$, для которых справедлива система неравенств (19), существуют такие соответствующие функции

$$0 \leq \Delta P_{\text{н}}(\xi, \xi - \Delta\xi, N) \leq 1 \text{ и} \\ 0 \leq \Delta P_{\text{в}}(\xi, \xi - \Delta\xi, N) \leq 1, \qquad (24)$$

где $\xi \in F_O$, $\xi - \Delta\xi \in F_O$, $N = 1,2,\ldots,$ что выполняется система неравенств

$$\Delta P_{\text{н}}(\xi, \xi - \Delta\xi, N) \leq \frac{1}{N_0} \sum_{i=-N}^{N} \Delta F(\xi, \xi - \Delta\xi, x_{n+i}) \leq \\ \leq \Delta P_{\text{в}}(\xi, \xi - \Delta\xi, N),\ \forall\, n = 1,2,\ldots,\ N = 1,2,\ldots. \qquad (25)$$

Функции $\Delta P_{\text{н}}(\xi, \xi - \Delta\xi, N)$ и $\Delta P_{\text{в}}(\xi, \xi - \Delta\xi, N)$ будем называть соответственно нижней и верхней гранями интервальной функции частот членов хаотичной последовательности на множестве F_O.

Очевидно, что если $\Delta\xi = \xi + \delta$, т.е. $\xi - \Delta\xi = -\delta$

$$\begin{cases} \Delta P_{\text{н}}(\xi, -\delta, N) = P_{н}(\xi, N), \\ \Delta P_{\text{в}}(\xi, -\delta, N) = P_{в}(\xi, N), \end{cases} \qquad (26)$$

что доказывает существование функций $\Delta P_{\text{н}}(\xi, \xi - \Delta\xi, N)$ и $\Delta P_{\text{в}}(\xi, \xi - \Delta\xi, N)$ при других значениях $\Delta\xi$, так как согласно (19) и (26) для них существуют ограничения снизу и сверху.

С другой стороны, справедливы неравенства

$$\begin{cases} \Delta P_{\text{в}}(\xi, \xi - \Delta\xi, N) \le P_{\text{в}}(\xi, N) - P_{\text{н}}(\xi - \Delta\xi, N), \\ \Delta P_{\text{н}}(\xi, \xi - \Delta\xi, N) \ge P_{\text{н}}(\xi, N) - P_{\text{в}}(x - \Delta x, N) \end{cases} \tag{27}$$

$\forall \xi \in F_O$, $\xi - \Delta\xi \in F_O$, $N = 1,2,\ldots$.

Следствие 1. Если для случайных последовательностей, по определению 2, существует функция их распределения $P(\xi)$ на множестве F_O, то соответственно определению 3 существует функция частот членов этих случайных последовательностей

$$\Delta P(\xi, \xi - \Delta\xi) = \lim_{N \to \infty} \Delta P_{\text{н}}(\xi, \xi - \Delta\xi, N) = \\ = \lim_{N \to \infty} \Delta P_{\text{в}}(\xi, \xi - \Delta\xi, N), \tag{28}$$

причем

$$\Delta P(\xi, \xi - \Delta\xi) = P(\xi) - P(\xi - \Delta\xi) \\ \forall \xi \in F_O, \ \xi - \Delta\xi \in F_O. \tag{29}$$

Справедливость соотношений (28) и (29) непосредственно следуют из (20) и неравенств (25) и (27).

Следствие 2. Пусть для членов случайной числовой последовательности, соответственно определению 2, существует непрерывная и дифференцированная функция их распределения $P(\xi)$. При этом, соответственно следствию 1 (соотношения (28) и (29)), существует функция частот их распределения $\Delta P(\xi, \xi - \Delta\xi) = P(\xi) - P(\xi - \Delta\xi)$. Тогда существует функция $\rho(\xi)$, которую будем называть плотностью распределения членов случайной числовой последовательности на множестве элементарных событий F_O, и эта функция определяется как

$$\rho(\xi) = \lim_{\Delta\xi \to 0} \frac{1}{\Delta\xi} \Delta P(\xi, \xi - \Delta\xi) = \frac{dP(\xi)}{d\xi}. \tag{30}$$

А отсюда

$$P(\xi) = \int_{-\delta}^{\xi} \rho(u) du . \tag{31}$$

Значения функции $\rho(\xi)$ для конкретных значений $\xi \in [-\delta; \delta]$ соответствует понятию плотности вероятности реализации членов данной случайной числовой последовательности x_n $(n = 1,2,\ldots)$ [1] при ее формировании путем случайного выбора элементов из множества элементарных событий F_O. Поскольку для существования функции $\rho(\xi)$ требуется выполнение достаточно жестких требований (20) и дополнительно еще непрерывность и дифференцируемость функции распределения $P(\xi)$, отсюда вытекают причины трудностей исследователей, которые старались заложить понятие вероятности в основу методологии работы со случайными числовыми последовательностями. В рамках данного подхода понятие вероятности не используется, а функция $\rho(\xi)$, как и функция распределения $P(\xi)$, есть некоторые предельные случаи, существующие лишь при определенных условиях. Они следуют из общих понятий интервальной функции распределения хаотичных событий и интервальной функции частот этих событий, соответственно определениям 1 и 3.

Введенные понятия распространяются как на случай квантованных по уровню ограниченных дискретных последовательностей [6], так и на случай непрерывных по времени процессов [9].

Пусть истинные значения процессов зависят от некоторой заданной числовой последовательности «входов» – u_n $(n = \overline{1, M})$, причем эта зависимость имеет вид

$$x_n = \sum_{k=1}^{S} l_k \cdot \varphi_k(u_n, n), \quad n = 1, 2, \ldots, M , \tag{32}$$

где $\varphi_k(u_n, n)$ – известные функции своих аргументов (так называемые «опорные» функции), а l_k $(k = \overline{k = 1, S}, \ S = \text{const})$ – неизвестные постоянные параметры. Для удобства дальнейшего анализа известные функции объединены в вектор-строку $\Phi_n = (\varphi_1(u_n, n); \varphi_2(u_n, n); \ldots; \varphi_S(u_n, n))$, а неизвестные параметры – в вектор $L^T = (l_1; l_2; ...; l_S)$. Для определения оценок значений этих параметров с достаточной точностью по результату обработки M полученных значений y_n $(n = \overline{1, M})$, и построения таким образом достоверной математической модели рассматриваемого процесса, который дает возможность дальнейшего его прогнозирования, может быть применен интервальный (множественный) анализ [7, 8]. При этом основой такой обработки есть соотношения

$$y_n = \sum_{k=1}^{S} l_k \cdot \varphi_k(u_n, n) + f_n, \quad n = 1, 2, ..., M. \quad (33)$$

Для использования ограничений, связанных с скоростью изменения помех, будут использованы соотношения

$$\Delta y_n = \sum_{k=1}^{S} l_k \cdot \Delta\varphi_k(u_n, n) + \Delta f_n, \quad n = 1, 2, ..., M-1, \quad (34)$$

где $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$, $\Delta\varphi_k(u_n, n) = \varphi_k(u_{n+1}, n+1) - -\varphi_k(u_n, n)$.

Наличие помех не дает возможности в результате обработки получить точные значения параметров, но, как следует из ограничений (11) и (15), позволяет получить их гарантированную оценку в виде множества в пространстве параметров E^S, которое выделяется неравенствами, получаемыми из условия удовлетворения соотношений (11) и (15) при всех n и для всех значений f_n и Δf_n, удовлетворяющих данным ограничениям. Если в результате обработки получим пустое множество, то это будет означать, что или гипотеза о связи истинных значений с «входами» не выполняется (из-за неправильного выбора вида или количества «опорных» функций), или информация об интервальных характеристиках помех измерения неточна. Такой случай в данной статье рассматривать не будем.

Сформируем процедуру обработки данных с использованием интервальных характеристик помех. Для этого перепишем (33) в виде

$$y_n - \Phi_n \cdot L = f_n, \quad n = 1,2,..., M. \quad (35)$$

Тогда можно записать выражение для суммы любых равенств (33) подряд, разделенной на их количество, начиная с некоторой $(n - N)$-й к $(n + N)$-й суммы равенства

$$\frac{1}{N_0}\sum_{i=-N}^{N}(y_{n+i} - \Phi_{n+i} \cdot L) = \frac{1}{N_0}\sum_{i=-N}^{N} f_{n+i} \ \forall\ N = 0, 1, 2, ..., (M-1)/2, \ n = N+1, ..., M-N.$$

Отсюда, на основе (6), получим систему линейных неравенств

$$m_{\text{н}}(N) \le \frac{1}{2N+1}\sum_{i=-N}^{i=N}(y_{n+i} - \Phi_{n+i} \cdot L) \le m_{\text{в}}(N) \quad \forall N = 0, 1, 2, ..., (M-1)/2, \quad n = N+1, N+2, ..., M-N, \quad (36)$$

что определяет множество значений вектора L в пространстве параметров E^S, удовлетворяющих всем неравенствам (36) при заданных границах $m_{\text{н}}(N)$ и $m_{\text{в}}(N)$ интервальной функции оценки среднего арифметического значений помех. Систему неравенств (36) можно переписать компактно

$$\bar{y}(n, N) - m_{\text{в}}(N) \le \bar{\Phi}(n, N) \cdot L \le \bar{y}(n, N) - -m_{\text{н}}(N) \ \forall\ N = 0, 1, 2, ..., (M-1)/2, \quad n = N+1, N+2, ..., M-N, \quad (37)$$

где фигурируют усредненные значения измеренных «выходов» и выбранных «опорных» функций:

$$\bar{y}(n, N) = \frac{1}{2N+1}\sum_{i=-N}^{i=N} y_{n+i}, \quad \bar{\Phi}(n, N) = \frac{1}{2N+1}\sum_{i=-N}^{i=N}\Phi_{n+i}.$$

Аналогично системе (36), может быть записана, на основе (11) и (34), система линейных неравенств

$$\Delta m_{н}(N) \le \frac{1}{2N+1} \times \sum_{i=-N}^{i=N}(\Delta y_{n+i} - \Delta\Phi_{n+i} \cdot L) \le \Delta m_{\text{в}}(N) \quad \forall N = 0, 1, 2, ..., (M-2)/2, \quad n = N+1, N+2, ..., M-N-1. \quad (38)$$

Она может быть переписана в компактном виде

$$\begin{gathered} y_{n+N+1} - y_{n-N} - \Delta m_{\text{в}}(N) \le (\Phi_{n+N+1} - \Phi_{n-N}) \cdot \\ \cdot L \le y_{n+N+1} - y_{n-N} - \Delta m_{\text{н}}(N) \\ \forall\ N = 0,1,2,\dots,(M-2)/2, \\ n = N+1, N+2, \dots, M-N-1. \end{gathered} \qquad (39)$$

Очевидно, что множество значений вектора L в пространстве параметров E^S, которому принадлежат истинные значения неизвестных параметров, определяется объединенной системой линейных неравенств (37), (39).

Выбор опорных функций и учета неточности ограничений

Бесспорно, что множественная оценка вектора L зависит от выбора опорных функций. Обозначим такое множество через Ω_L, т.е. в результате обработки данных получим оценку

$$L \in \Omega_L, \qquad (40)$$

где границы этой множественной оценки определяются неравенствами (37) и (39).

Введем критерий размеров множественной оценки, которым может служить, например, диаметр соответствующего множества $d(\Omega_L)$ в пространстве параметров E^S (максимально возможное расстояние между двумя точками этого множества). Для ограниченного множества Ω_L, которое в этом случае есть выпуклым многогранником, это будет максимально возможное расстояние между его двумя вершинами:

$$d(\Omega_L) = \max_{k,\ j,\ k \ne j} (L_k - L_j), \qquad (41)$$

где L_k и L_j – пронумерованные вершины многогранника Ω_L ($k \ne j$ – номера этих вершин), которые определяются координатами в пространстве параметров E^S.

Величина этого диаметра характеризует качество оценивания с учетом размера множества Ω_L (чем меньший диаметр, тем меньше размеры множества и высше качество оценивания). Причем, с увеличением количества параметров (размерности их пространства), при неизменной точности по предварительно выбранным параметрам, величина диаметра будет возрастать, а качество оценивания ухудшится.

С другой стороны, необходима точность оценивания непосредственно полезного сигнала x_n

$$\begin{gathered} q_n\left[S, \left(\Phi_n \Big|_{n=1}^{M}\right)\right] = \left\{\max_{L\in\Omega_L}\left[\sum_{k=1}^{S} l_k \cdot \varphi_k(u_n, n)\right] - \right. \\ \left. - \min_{L\in\Omega_L}\left[\sum_{k=1}^{S} l_k \cdot \varphi_k(u_n, n)\right]\right\}^2. \end{gathered} \qquad (42)$$

Она в каждый момент дискретного времени n зависит как от множества Ω_L, так и от количества и вида опорных функций.

Можно ввести функционал качества оценивания полезного сигнала в виде

$$J\left[S,\ \left(\Phi_n \Big|_{n=1}^{M}\right)\right] = \sum_{n=1}^{M} q_n\left[S,\ \left(\Phi_n \Big|_{n=1}^{M}\right)\right]. \qquad (43)$$

Тогда оптимальный выбор количества и вида опорных функций сводится к задаче обеспечения минимальной величины критерия $J\left[S,\ \left(\Phi_n \Big|_{n=1}^{M}\right)\right]$ согласно (43).

Или

$$\begin{gathered} \left[S_{opt}, (\Phi_n \Big|_{n=1}^{M})_{opt}\right] = \\ = \arg\left\{\min_{S,\Phi_n(n=\overline{1,M})} \max_{n\in\overline{1,M}} q_n\left[S,\ (\Phi_n \Big|_{n=1}^{M})\right]\right\}. \end{gathered} \qquad (44)$$

К сожалению, формализация этого процесса подбора количества и вида опорных функций для решения задач (43) или (44) довольно громоздка и требует больших вычислительных мощностей [10]. Тем не менее, задача структурной оптимизации здесь ставится прозрачно и однозначно. Очевидно, что существует конечное оптимальное количество опорных функций определенного вида, не меньшее того количества, которое необходимо, чтобы множество Ω_L было непустым и ограниченным. Чрезмерное его возрастание сверх того приведет к увеличению его размеров, а значит, к ухудшению точности интервального оценивания полезного сигнала соответственно (42) и (43) или (44).

Существует зависимость качества оценивания от величины ограничений в (2) и (14), которые существенно влияют на оценки (12) и (16). Будем считать, что на протяжении последовательности из M значений характеристики помех проявляются в полной мере (т.е. они много раз принимают экстремальные значения по отношению к этим ограничениям). Получив при некоторых завышенных значениях ограничений и определенном выборе опорных функций непустую множественную оценку параметров, сделаем ее оптимальной соответственно (43) или (44) (или хотя бы приблизим к оптимальной). Тогда организуем итеративную процедуру постепенного уменьшения величины ограничений, решая при этом на каждом шаге задачу оптимизации (43) или (44). Завершение этой процедуры происходит при увеличении полученного критерия качества оценивания полезного сигнала, после чего как оптимальное выбирается предыдущее значение ограничений.

Заключение. Применение метода интервального (множественного) анализа позволило получить интервальные статистические характеристики неопределенных последовательностей (помех). На основе таких характеристик построена процедура обработки результатов измерений с ограниченными погрешностями неизвестного процесса (множественное оценивание его параметров). При его представлении сформулирована задача структурной оптимизации для выбора количества и вида опорных функций. Предложена итерационная процедура уточнения ограничений на процесс погрешностей измерений.

Работа выполнена при финансовой поддержке НАН Украины (Постановление № 104 от 02.04.2008 г.) в рамках совместного проекта НАН Украины и Российского фонда фундаментальных исследований «Управление динамическими системами в условиях неопределенности и возмущений».

1. *Бендат Дж.*, *Пирсол А*. Измерение и анализ случайных процессов. – М.: Мир. – 1971. – 408 с.
2. *Рабинер Л.*, *Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир. – 1978. – 848 с.
3. *Лычак М.М*. Анализ циклических процессов солнечной активности // Проблемы управления и информатики. – 2006. – № 1–2. – С. 248–259.
4. *Лычак М.М*. Интервальные характеристики хаотических последовательностей // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – № 5. – С. 58–71.
5. *Личак М.М*. Альтернативна модель невизначеності – інтервальні характеристики хаотичних процесів // Зб. праць Міжнар. семінару з індуктивного моделювання. – Київ: МННЦІТ та С, 2005. – С. 197–206.
6. *Личак М.М.* Інтервальна функція розподілу обмеженої хаотичної послідовності як основа неаксіоматичної теорії ймовірностей // Український математичний журнал. – 2008. – Т. 60, № 8. – С. 1128–1137.
7. *Лычак М.М*. Интервальные функции распределения и скользящего среднего возмущений как основа множественного оценивания // Тр. Всерос. (с междунар. участием) совещания по интервальному анализу и его приложениям. – СПб. – 2006. – С. 78–82.
8. *Личак М.М*. Інтервальні характеристики обмежених збурень як основа інтервального (множинного) оцінювання інформативних параметрів // Матеріали проблемно-наукової міжгалузевої конф. «Інформаційні проблеми комп'ютерних систем, юриспруденції, економіки та моделювання» (ПНМК–2008). – Бучач: Бучацький ін-ут менеджменту і аудиту. – 2008. – С. 170–172.
9. *Лычак М.М*. Хаотические непрерывные процессы и их интервальные характеристики // Проблемы управления и информатики. – 2004. – № 3. – С. 82–96.
10. *Лычак М.М*. О решении задачи структурной параметрической идентификации (дискретной аппроксимации) в условиях неопределенности // Автоматика. – 1990. – № 6. – С. 72–77.